Title	劣微分と共役関数
Sub Title	Subdifferentials and conjugate functions
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.4 (1979. 8) ,p.498(94)- 505(101)
JaLC DOI	10.14991/001.19790801-0094
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790801-0094

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

劣微分と共役関数

渡部 隆一

最近、凸解析の色々な手法が経済分析において極めて有効である事が注目されてきている。凸解析は、従来の微分積分にとってかわるものであって、その手法で特記すべきは次の2点にあると思われる。

- 1° 今までの解析学の基礎となっている考え方が局部的であるのに対して、大局的であること。
- 2° 図形の幾何学的な性質を十分に利用していること。

経済分析においては、結局は最適値問題を解くという形に帰着する問題が多いが、そのような問題では凸解析は極めて有効な手段を提供する。その場合、具体的には劣微分と共役関数の考えがよく用いられる。

この論文の目的は、経済分析によく現われると思われる関数について、劣微分と共役関数を求め、その性質を解説する事にある。

§ 1 準備

凸解析に関する基本的事柄は〔7〕に解説してある。この論文で用いる概念や記号で〔7〕に用いられているものは、そのまま用いる事にする。

この論文で取り扱う関数は、バナッハ空間 L を定義域とする関数、

$$f: L \rightarrow \bar{R}$$

である。

このような関数に関して以下よく用いる記号をまとめておこう。

〔1-1〕 本質的定義域: —

$$\text{dom} f = \{x \mid f(x) < +\infty\}$$

〔1-2〕 f のグラフ: —

$$G[f] = \{(x, y) \in L \times R \mid y = f(x)\}$$

〔1-3〕 f のエピグラフ: —

$$E[f] = \{(x, y) \mid x \in \text{dom} f, f(x) \leq y\}$$

〔1-4〕 方向微分係数: —

$$f'(a; u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

〔1-5〕 劣微分: —

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{x^* \mid \langle x - a, x^* \rangle \leq f(x) - f(a), \forall x\} \\ \text{ただし, } f(a) = +\infty \text{ の時は } \partial f(a) = \emptyset \text{ とする。} \end{aligned}$$

〔1-6〕 劣導写像: —

$$\begin{aligned} \partial f: L &\rightarrow L^* \\ x &\mapsto \partial f(x) \end{aligned}$$

〔1-7〕 共役関数: —

$$\begin{aligned} f^*: L^* &\rightarrow \bar{R} \\ x^* &\mapsto \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\} \end{aligned}$$

〔1-8〕 下界関数: —

次の式を満たす連続なアフィン関数 g を f の下界関数といい、その集合を M_f で表す。

$$\forall x; g(x) \leq f(x)$$

〔1-9〕 関数 f の閉包: —

$$\bar{f}(x) = \sup_{g \in M_f} g(x)$$

〔1-10〕 関数 f の支持関数: —

関数 f の下界関数 g が、次の式を満たす時、 g を点 a における f の支持関数という。

$$g(a) = f(a)$$

次に、特別な関数の定義をあげておこう。

劣微分と共役関数

[1-11] 指標関数: —

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

[1-12] 集合の支持関数: —

$$A \subset L, \sigma_A(x^*) = \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle$$

$$A^* \subset L^*, \sigma_{A^*}(x) = \sup_{x^* \in A^*} \langle x, x^* \rangle$$

[1-13] ミンコフスキーの関数: —

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \inf \{ t > 0 \mid x \in tA \} & (x \neq 0 \text{ で, } x \in tA \text{ となる } t > 0 \text{ が存在しない時}) \\ +\infty & \end{cases}$$

次に、定義から直ちに導かれる簡単な公式をあげておこう。

[1-14] (劣微分に関する公式)

- (i) $\alpha > 0$ ならば, $\partial(\alpha f) = \alpha(\partial f)$
- (ii) $\partial(f + \alpha) = \partial f, \alpha \in R$
- (iii) $(\text{dom } f)^i \cap (\text{dom } g)^i \neq \emptyset$ ならば,
 $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
- (iv) g が単調増加な凸関数であって,
 $\{f(\text{dom } f)\}^i \cap (\text{dom } g)^i \neq \emptyset$ ならば,
 $\partial(g \circ f)(x) = \partial g(f(x)) \partial f(x)$

[1-15] (共役関数に関する公式)

$f: L \rightarrow \bar{R}$ が下半連続 (*l.s.c.*) な凸関数ならば、その共役関数 f^* も *l.s.c.* な凸関数であって、次が成り立つ。

- (i) $\forall x, \forall x^*; \langle x, x^* \rangle \leq f(x) + f^*(x^*)$
- (ii) $(f + \alpha)^*(x^*) = f^*(x^*) - \alpha, \alpha \in R$
- (iii) $(\alpha f)^*(x^*) = \alpha f^*\left(\frac{x^*}{\alpha}\right), \alpha > 0$
- (iv) $\langle x, x^* \rangle = f(x) + f^*(x^*) \iff x^* \in \partial f(x)$
- (v) $\partial(f^*) = (\partial f)^{-1}$
- (vi) $f^{**} = f$

以上の事はよく知られている事柄である。

次節以下で、これらを用いて劣微分や共役関数を求める事にする。

§ 2 集合の支持関数

ある集合 A の支持関数として表される関数の中には重要なものがいろいろある。

例えば、 L, L^* の原点を中心とする単位球をそれぞれ、

$$B = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$B^* = \{x^* \mid \|x^*\| \leq 1\}$$

とすれば、

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B^*} \langle x, x^* \rangle = \sigma_B(x)$$

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B} \langle x, x^* \rangle = \sigma_{B^*}(x^*)$$

である。

空間 L^* の部分集合 $M (\neq \emptyset)$ に対する支持関数を、

$$f(x) = \sigma_M(x) = \sup_{x^* \in M} \langle x, x^* \rangle$$

とおく時、これは明らかに次の2つの式を満たす事を注意しておこう。

[2-1] $\forall \alpha \geq 0, \forall x; f(\alpha x) = \alpha f(x)$ (正の同次性)

[2-2] $\forall x, \forall y; f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
(劣加法性)

この[2-2]より、

$$f(x) = f(x-y+y) \leq f(x-y) + f(y)$$

したがって、次が成り立つ。

[2-3] $f(x-y) \geq f(x) - f(y)$

空間 L の部分集合 $A (\neq \emptyset)$ に対する支持関数についても同様である。

支持関数の劣微分については、次の定理が成り立つ。

[定理 1]

空間 L^* の w^* -コンパクトな凸集合を M とし、

$$f(x) = \max_{x^* \in M} \langle x, x^* \rangle = \sigma_M(x)$$

とおけば、

$$\partial f(a) = \{x^* \in M \mid \langle a, x^* \rangle = f(a)\}$$

である。

[証明]

$g(x^*) = \langle a, x^* \rangle$ とおけば、 g は空間 L^* 上の連続な線形関数となる。 M は w^* -コンパクトであるから、次のような x_0^* が存在する。

$$g(x_0^*) = \max_{x^* \in M} g(x^*) = \max_{x^* \in M} \langle a, x^* \rangle$$

$$\therefore \langle a, x_0^* \rangle = f(a), x_0^* \in M$$

任意の x に対して、

$$\begin{aligned} \langle x-a, x_0^* \rangle &= \langle x, x_0^* \rangle - \langle a, x_0^* \rangle \\ &= \langle x, x_0^* \rangle - f(a) \leq f(x) - f(a) \end{aligned}$$

$$\therefore x_0^* \in \partial f(a)$$

逆に、 $x_1^* \in \partial f(a)$ とする時、

(1) $\langle a, x_1^* \rangle = f(a)$

(2) $x_1^* \in M$

が成り立つ事を示す。

劣微分の定義より、

(3) $f(x) - f(a) \geq \langle x - a, x_1^* \rangle, \forall x$
 が成り立っている。

いま, (2)が成り立たないとすれば, 分離定理により,

$$(4) \max_{x^* \in M} \langle e, x^* \rangle < \langle e, x_1^* \rangle$$

となるような L の元 e が存在する。

ところで [2-3] より,

$$f(x - a) \geq f(x) - f(a)$$

関数 f の定義と (3) より,

$$\max_{x^* \in M} \langle x - a, x^* \rangle \geq \langle x - a, x_1^* \rangle, \forall x$$

ここで $x - a = e$ とおけば

$$\max_{x^* \in M} \langle e, x^* \rangle \geq \langle e, x_1^* \rangle$$

これは (4) に反する。

$$\therefore x_1^* \in M$$

次に (1) が成り立たないとする。(2) は成り立っているから,

$$\langle a, x_1^* \rangle < f(a)$$

でなくてはならない。不等式 (3) より

$$f(x) - \langle x, x_1^* \rangle \geq f(a) - \langle a, x_1^* \rangle$$

$$\therefore f(x) - \langle x, x_1^* \rangle > 0, \forall x$$

ここで $x = 0$ とおけば, $0 > 0$ となり不合理。よって, (1), (2) が成り立つ。Q. E. D.

次に共役関数について考察する。

〔定理 2〕

関数 f が正の同次性を満たすならば,

$$\forall x; \langle x, x^* \rangle - f(x) \leq 0$$

となる x^* の集合を A とおくと,

$$f^*(x^*) = \delta_A(x^*)$$

である。

〔証明〕

仮定から,

$$\forall \alpha \geq 0, \forall x; f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

である。したがって, $f(0) = 0$ である。

もし $x^* \in A$ ならば,

$$\forall x; \langle x, x^* \rangle - f(x) \leq 0$$

であり, $x = 0$ の時,

$$\langle 0, x^* \rangle - f(0) = 0$$

である。したがって,

$$f^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \} = 0$$

もし $x^* \notin A$ ならば,

$$\exists x_0; \langle x_0, x^* \rangle - f(x_0) > 0$$

また, 任意の正の数 α に対して,

$$\langle \alpha x_0, x^* \rangle - f(\alpha x_0) = \alpha \{ \langle x_0, x^* \rangle - f(x_0) \}$$

$$\therefore f^*(x^*) \geq \sup_{\alpha > 0} [\alpha \{ \langle x_0, x^* \rangle - f(x_0) \}]$$

$$\therefore f^*(x^*) = +\infty$$

以上から,

$$f^*(x^*) = \delta_A(x^*)$$

〔系〕

空間 L^* の凸部分集合を M とすれば,

$$(\sigma_M)^*(x^*) = \delta_M(x^*)$$

である。

〔証明〕

集合 M の支持関数 σ_M の定義より,

$$\sigma_M(x) = \sup_{x^* \in M} \langle x, x^* \rangle$$

したがって, $x^* \in M$ ならば,

$$(1) \quad \forall x; \langle x, x^* \rangle - \sigma_M(x) \leq 0$$

$\langle x, x^* \rangle$ は固定された x に対して, x^* の連続関数であるから, $x^* \in \overline{M}$ に対しても (1) が成り立つ。

次に, $x_0^* \in \overline{M}$ ならば, 分離定理により,

$$\sup_{x^* \in M} \langle e, x^* \rangle < \langle e, x_0^* \rangle$$

となる $e \in L$ が存在する。したがって,

$$\langle e, x_0^* \rangle - \sigma_M(e) > 0$$

ゆえに, 定理 2 より,

$$(\sigma_M)^*(x^*) = \delta_M(x^*)$$

これらの定理を利用して具体的な関数の劣微分と共役関数を求めよう。

〔例 1〕 (線形関数)

$$f(x) = \langle x, p^* \rangle, p^* \in L^*$$

とする。

空間 L^* の 1 点 p^* のみからなる集合を M とすれば,

$$f(x) = \sigma_M(x)$$

である。したがって, 定理 1 より

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{ x^* \in M \mid \langle a, x^* \rangle = \langle a, p^* \rangle \} \\ &= \{ p^* \} = M \end{aligned}$$

定理 2 の系より,

$$\begin{aligned} f^*(x^*) &= \delta_M(x^*) = \delta_{\{p^*\}}(x^*) \\ &= \begin{cases} 0 & (x^* = p^*) \\ +\infty & (x^* \neq p^*) \end{cases} \end{aligned}$$

〔例 2〕 (アフィン関数)

$$f(x) = \langle x, p^* \rangle + \alpha, p^* \in L^*, \alpha \in R$$

とすれば, 前例と公式 [1-14], [1-15] より,

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{ p^* \} \\ f^*(x^*) &= \delta_{\{p^*\}}(x^*) - \alpha \\ &= \begin{cases} -\alpha & (x^* = p^*) \\ +\infty & (x^* \neq p^*) \end{cases} \end{aligned}$$

〔例 3〕 (ノルム)

劣微分と共役関数

$$f(x) = \|x\| = \sigma_{B^*}(x)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{x^* \in B^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\|\} \\ &= \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\|, \|x^*\| = 1\} \end{aligned}$$

$$f^*(x^*) = \delta_{B^*}(x^*) = \begin{cases} 0 & (\|x^*\| \leq 1) \\ +\infty & (\|x^*\| > 1) \end{cases}$$

ここで、いくつか注意しておくべき事柄がある。

定理1において、

$$f(x) = \max_{x^* \in M} \langle x, x^* \rangle = \sigma_M(x)$$

というのは、集合M上における線形関数 $\langle x, x^* \rangle$ の最大値であり、

$$\partial f(a) = \{x^* \in M \mid \langle a, x^* \rangle = f(a)\}$$

は、集合M上において線形関数 $\langle a, x^* \rangle$ が最大となるような x^* の集合を表している。

幾何学的な意味を考えると、 $a \neq 0$ の時、 x^* に関する方程式

$$[2-4] \quad \langle a, x^* \rangle = f(a)$$

は空間 L^* における超平面を表しているわけであるが、

$$f(a) = \max_{x^* \in M} \langle a, x^* \rangle$$

であるから、[2-4]は集合Mの支持平面になっており、その接点の集合が $\partial f(a)$ というわけである。

$a = 0$ の時は、[2-4]は空間 L^* 全体を表すから、

$$\partial f(0) = M$$

となる。

また、Mが原点に関して対称、すなわち、

$$M = -M$$

ならば、

$$\max_{x^* \in M} \langle x, x^* \rangle = \max_{x^* \in M} |\langle x, x^* \rangle|$$

である。不等式

$$[2-5] \quad |\langle a, x^* \rangle| \leq \|a\| \|x^*\|$$

より、[例3]の $M = B^*$ の場合には、

$$|\langle a, x^* \rangle| \leq \|a\|$$

となり、 $a \neq 0$ の時、

$$\langle a, x^* \rangle = \|a\|$$

となる x^* の集合は、単位球 B^* の支持平面を表すというわけである。

ところで、

$$M = \{x^* \mid \|x^*\| \leq r\} \quad (r > 0)$$

の場合には、不等式[2-5]より、

$$\langle a, x^* \rangle \leq |\langle a, x^* \rangle| \leq \|a\| r$$

であるが、単位球 B^* を r 倍に拡大して考えれば、

$$[2-6] \quad \sigma_M(a) = \max_{x^* \in M} \langle a, x^* \rangle = \|a\| r$$

であり、

$$f(x) = \sigma_M(x) = \|x\| r$$

とおけば、

$$\partial f(a) = \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\| r, \|x^*\| \leq r\}$$

というわけである。

さて、 L の元 a ($a \neq 0$) に対して L^* の半径 $\|a\|$ の球を考え、その球を $M(a)$ で表せば、この球上における $\langle a, x^* \rangle$ の最大値は、[2-6]において $r = \|a\|$ の場合だから、

$$\sigma_{M(a)} = \max_{x^* \in M(a)} \langle a, x^* \rangle = \|a\|^2$$

となっている。また、

$$\langle a, x^* \rangle = \|a\|^2$$

となる x^* は、今までの考察より明らかなように、球 $M(a)$ の境界上になければならないから、 $\|x^*\| = \|a\|$ を満たす。したがって、

$$[2-7] \quad \langle a, x^* \rangle = \|a\|^2 = \|x^*\|^2$$

を満たすような x^* の集合というわけである。

$a = 0$ の場合には、 $M(0)$ は原点のみからなる集合と考えれば、以上の事はそのまま成り立つ。

$$\gamma(a) = \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

と書き表し、多意写像、

$$\gamma : L \rightarrow L^*$$

$$x \mapsto \gamma(x)$$

を双対写像と呼ぶ。

[例3]において、 $a \neq 0$ の時、

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\|, \|x^*\| \leq 1\} \\ &= \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \|a\|, \|x^*\| = 1\} \end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \|a\| \partial f(a) &= \{y^* \mid y^* = \|a\| x^*, x^* \in \partial f(a)\} \\ &= \{y^* \mid \langle a, y^* \rangle = \|a\|^2, \|y^*\| = \|a\|\} \\ &= \{y^* \mid \langle a, y^* \rangle = \|a\|^2 = \|y^*\|^2\} = \gamma(a) \end{aligned}$$

したがって、次の公式が得られる。

$$[2-8] \quad \partial(\|x\|) = \begin{cases} \gamma(x) / \|x\| & (x \neq 0) \\ B^* & (x = 0) \end{cases}$$

[例4] $f(x) = \frac{1}{p} \|x\|^p$, $p > 1$ とすると、公式[1-14]より、

$$\partial f(x) = \begin{cases} \|x\|^{p-1} \cdot \frac{\gamma(x)}{\|x\|} = \|x\|^{p-2} \gamma(x) & (x \neq 0) \\ 0 \cdot B^* = \{0\} & (x = 0) \end{cases}$$

特に $p=2$ ならば, $f(0)=\{0\}$ であるから,

$$\partial f(x) = f'(x)$$

となる。次に f の共役関数を求める。

$$f^*(x^*) = \sup_x \{ \langle x, x^* \rangle - \frac{1}{p} \|x\|^p \}$$

いま,

$$F(x) = \langle x, x^* \rangle - \frac{1}{p} \|x\|^p$$

とおく。明らかに $F(0)=0$ である。

さて, 空間 L の単位球面

$$S = \{x \mid \|x\| = 1\}$$

上の1点 a をとり, 原点を出発点として a を通る半直線

$$l; x = ta \quad (0 \leq t < +\infty)$$

の上で $F(x)$ の最大値を考察する。

$$\varphi(t) = F(ta) = t \langle a, x^* \rangle - \frac{t^p}{p}$$

とおく。

もし, $\langle a, x^* \rangle \leq 0$ ならば,

$$\varphi(t) \leq 0$$

であるから,

$$\max \varphi(t) = 0$$

である。

もし, $\langle a, x^* \rangle > 0$ ならば,

$$\varphi'(t) = \langle a, x^* \rangle - t^{p-1}$$

$$\varphi''(t) = -(p-1)t^{p-2}$$

仮定から, $p > 1$ だから, $\varphi'' < 0$ である。

したがって, $\varphi(t)$ は $\varphi'(t) = 0$ となる t において最大となる。 $\varphi'(t_0) = 0$ とおくと,

$$t_0 = \{ \langle a, x^* \rangle \}^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\therefore \max \varphi(t) = \varphi(t_0)$$

$$= t_0 \langle a, x^* \rangle - \frac{t_0}{p} \cdot t_0^{p-1}$$

$$= t_0 \left(1 - \frac{1}{p} \right) \langle a, x^* \rangle$$

$$= \frac{p-1}{p} \{ \langle a, x^* \rangle \}^{\frac{p}{p-1}}$$

いま, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q を考えると,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$\therefore \max \varphi(t) = \frac{1}{q} \{ \langle a, x^* \rangle \}^q$$

L の任意の元 x は, l のような半直線のどれかの上
にあり,

$$\sup_{a \in S} \langle a, x^* \rangle = \|x^*\|$$

であるから,

$$\sup_{x \in L} F(x) = \frac{1}{q} \|x^*\|^q$$

$$\therefore f^*(x^*) = \frac{1}{q} \|x^*\|^q$$

§ 3 指標関数

次に指標関数

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

について考察する。

最初にいくつかの概念を導入する。

[3-1] 空間 L の部分集合 A に対して, 次のような L^* の集合を A の直交補集合 (orthogonal complement) といひ $A^\perp$ と書き表す。

$$A^\perp = \{x^* \mid \forall x \in A, \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

これは L^* の線形部分空間である。

同様に, 空間 L^* の部分集合 A に対して,

$$A^\perp = \{x \mid \forall x^* \in A, \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

とする。これは L の線形部分空間である。

[3-2] A を空間 L の凸集合とする時, 点 a における A の法線錐 (normal cone) を次のように定義する。

$a \in \bar{A}$ の時: —

$$N(a; A) = \{x^* \mid \forall x \in A; \langle x - a, x^* \rangle \leq 0\}$$

$a \notin \bar{A}$ の時: —

$$N(a; A) = \emptyset$$

これは L^* の閉凸錐になっている。

特に A が閉線形部分空間ならば,

$$N(a; A) = A^\perp$$

である。

A が L^* の凸集合の時も同様に定義される。

[3-3] A を空間 L の凸集合とする時, 点 a における A の支持凸錐 (support cone) を次のように定義する。

$a \in \bar{A}$ の時: —

$$S(a; A) = \overline{\{y \mid y = a + \lambda(x - a), \lambda \geq 0, x \in A\}}$$

$a \notin \bar{A}$ の時: —

$$S(a; A) = \emptyset$$

特に, A が閉線形部分空間ならば,

$$S(a; A) = A$$

である。

A が L^* の凸集合の時も同様に定義される。

劣微分と共役関数

[3-4] 集合 A の極 (polar) を次のように定義する。

$$A^\circ = \{x^* | \forall x \in A; \langle x, x^* \rangle \leq 1\}$$

もし C が凸錐ならば, $x \in C$ と $\lambda > 0$ に対して $\lambda x \in C$ となるから,

$$C^\circ = \{x^* | \forall x \in C; \langle x, x^* \rangle \leq 0\}$$

と書き表す事が出来る。

また, S が空間 L の線形部分空間ならば, $x \in S$ と任意の実数 λ に対して $\lambda x \in S$ となるから,

$$S^\circ = \{x^* | \forall x \in S; \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

$$\therefore S^\circ = S^\perp$$

となる。

[例5] A を空間 L の閉凸集合とし,

$$f(x) = \delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

とする。 $a \notin A$ ならば, $f(a) = +\infty$ となるから, 規約により

$$\partial f(a) = \emptyset$$

である。

$a \in A$ ならば,

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{x^* | \forall x; \langle x - a, x^* \rangle \leq \delta_A(x)\} \\ &= \{x^* | \forall x \in A; \langle x - a, x^* \rangle \leq 0\} \\ &= N(a; A) \end{aligned}$$

以上2つの場合を合せて,

$$\partial f(a) = N(a; A)$$

次に共役関数について考える。

$$\langle x, x^* \rangle - f(x) = \begin{cases} \langle x, x^* \rangle & (x \in A) \\ -\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

したがって,

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle = \sigma_A(x^*)$$

すなわち,

$$(\delta_A)^*(x^*) = \sigma_A(x^*)$$

特に A が単位球 $B = \{x | \|x\| \leq 1\}$ ならば,

$$(\delta_B)^*(x^*) = \sigma_B(x^*) = \|x^*\|$$

[例6] S を空間 L の閉線形部分空間とし,

$$f(x) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$$

とする。 $f(x)$ は点 x より S に至る最短距離であるから, これを $d(x, S)$ で表す。

$$\varphi^* \in S^\perp \cap B^*$$

とすれば,

$$\forall y \in S, \langle y, \varphi^* \rangle = 0, \|\varphi^*\| \leq 1$$

である。

空間 L の1点を a とすると, 任意の $y \in S$ に対して,

$$|\langle a, \varphi^* \rangle| = |\langle a - y, \varphi^* \rangle|$$

$$\leq \|a - y\| \|\varphi^*\| \leq \|a - y\|$$

ゆえに, 次が成り立つ。

$$(1) |\langle a, \varphi^* \rangle| \leq d(a, S)$$

一方, 点 a を中心とする半径 $d(a, S)$ の球 B_a と, 部分空間 S とを考えると, 分離定理によって,

$$u \in B_a \implies \langle u, \varphi^* \rangle \geq 0,$$

$$u \in S \implies \langle u, \varphi^* \rangle = 0$$

となる $\varphi^* (\neq 0)$ がある。したがって,

$$\|x\| \leq d(a, S)$$

ならば, $a + x \in B_a$ であるから,

$$\langle a + x, \varphi^* \rangle \geq 0$$

$$\therefore -\langle a, \varphi^* \rangle \leq \langle x, \varphi^* \rangle$$

したがって,

$$(2) -\langle a, \varphi^* \rangle \leq \inf \{ \langle x, \varphi^* \rangle | \|x\| \leq d(a, S) \} = -\|\varphi^*\| d(a, S)$$

そこで,

$$\tilde{\varphi}^* = \frac{\varphi^*}{\|\varphi^*\|}$$

とおけば, $\tilde{\varphi}^* \in M^+ \cap B^*$ であって, (2)より

$$(3) \langle a, \tilde{\varphi}^* \rangle \geq d(a, S)$$

(1), (3)より,

$$\begin{aligned} d(a, S) &= \max_{\varphi^*} \{ \langle a, \varphi^* \rangle | \varphi^* \in S^\perp \cap B^* \} \\ &= \sigma_{S^\perp \cap B^*}(a) \end{aligned}$$

である。ゆえに定理1, 定理2 [系] より,

$$\begin{aligned} \partial f(a) &= \{x^* \in S^\perp \cap B^* | \langle a, x^* \rangle = d(a, S)\} \\ f^*(x^*) &= \delta_{S^\perp \cap B^*}(x^*) \end{aligned}$$

となる。

空間 L の閉超平面を H とし, その方程式を

$$\langle x, p^* \rangle = c$$

とする。 H 上の1点を x_0 とすれば

$$\langle x_0, p^* \rangle = c$$

であって, H の方程式は

$$\langle x - x_0, p^* \rangle = 0$$

となる。 $H - x_0 = S$ とすれば, S は閉線形部分空間であって,

$$\begin{aligned} d(a, H) &= d(a - x_0, S) \\ &= \sigma_{S^\perp \cap B^*}(a - x_0) \end{aligned}$$

ところが

$$S^\perp \cap B^* = \{ \varphi^* = t p^* | |t| \leq \frac{1}{\|p^*\|} \}$$

であるから,

$$d(a, H) = \sigma_{S^\perp \cap B^*}(a - x_0) = \langle a - x_0, \frac{p^*}{\|p^*\|} \rangle$$

$$= \frac{1}{\|p^*\|} |\langle a, p^* \rangle - c|$$

これは、通常の解析幾何学における1点より平面に至る距離の公式と同様である。

超平面 H 上に a がないならば、 H の方程式の両辺に適当な実数を掛ける事により、 H の方程式を

$$\langle x, p^* \rangle = c, \|p^*\| = 1, \langle a, p^* \rangle > 0$$

とすることが出来る。

$$f(x) = d(x, H), g(x) = d(x, S)$$

とすれば、

$$f(x) = g(x - x_0)$$

であり、

$$S^+ \cap B^* = \{tp^* \mid \|t\| \leq 1\}$$

$$\{x^* \in S^+ \cap B^* \mid \langle a - x_0, x^* \rangle = d(a - x_0, S)\} = \{p^*\}$$

$$\therefore \partial f(a) = \{p^*\}$$

となる。

§4 ミンコフスキーの関数

次にミンコフスキーの関数

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \inf\{t > 0 \mid x \in tA\} & (x \neq 0 \text{ で } x \in tA \text{ となる } t > 0 \text{ が存在しない時}) \\ +\infty & \end{cases}$$

について考察する。

(i) $A = \emptyset$ または $A = \{0\}$ の時は、上の定義式で一番上の場合しか起らないから、

$$\mu_{\emptyset}(x) = \mu_{\{0\}}(x) = \delta_{\{0\}}(x)$$

(ii) A が線形部分空間、または凸錐の時は、

$$A = tA \ (t \geq 0) \text{ となるから、}$$

$$\mu_A(x) = \delta_A(x)$$

(iii) A が原点を中心とする半径1の閉球 B に等しい時は、

$$x \in tB \iff \|x\| \leq t$$

$$\therefore \mu_B(x) = \|x\|$$

(iv) $a^* \in L^*$, $a^* \neq 0$, $\lambda > 0$ の時は、

$$A = \{x \mid |\langle x, a^* \rangle| \leq \lambda\}$$

とすれば、 $t > 0$ の時、

$$x \in tA \iff \frac{x}{t} \in A \iff |\langle \frac{x}{t}, a^* \rangle| \leq \lambda$$

$$\iff \frac{1}{\lambda} |\langle x, a^* \rangle| \leq t$$

$$\therefore \mu_A(x) = \frac{1}{\lambda} |\langle x, a^* \rangle|$$

一般に、 A を含む最小の凸錐を $C(A)$ とすれば、

$$x \in C(A) \iff \mu_A(x) = +\infty$$

となっている。

さて、集合 A があまり一般的過ぎると μ_A の便利な性質が導けないので、 A にいくつかの制限を課す事にする。

任意の $x \in L$ に対して、適当な正の数 ϵ をとると、

$$0 < \lambda < \epsilon \implies \lambda x \in A$$

となる時、 A を吸収的(absorbing)であるという。もちろん $C(A) = L$ となっている。

また、

$$|\lambda| \leq 1 \implies \lambda A \subset A$$

となる時、 A は球形的(balanced)であるという。この場合には、

$$-A \subset A, A \subset -A \quad \therefore A = -A$$

となっている。

〔定理3〕

集合 A が、吸収的、球形的な凸集合ならば、

- (1) μ_A は正の同次性を持つ。
- (2) μ_A は劣加法性を持つ。
- (3) 任意の $x \in L$ と任意の実数 λ に対して、

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$$

が成り立つ。

〔証明〕

(1) 明らか。

(2) $x, y \in L$ とし、

$$\mu_A(x) + \mu_A(y) < t$$

となる t を選ぶと、

$$\mu_A(x) < \alpha, \mu_A(y) < \beta, \alpha + \beta = t$$

となる α, β が存在する。 A は吸収的であるから、

$$\mu_A(z) < 1 \implies z \in A$$

$$\therefore \frac{x}{\alpha} \in A, \frac{y}{\beta} \in A$$

したがって、 A の凸性より、

$$\frac{x+y}{t} = \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \left(\frac{y}{\beta}\right) \in A$$

$$\therefore \mu_A(x+y) \leq t$$

$$\therefore \mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$$

(3) $\lambda \neq 0$ とし、 $\mu_A(x) < t$ となる t を1つ選び、

$\mu_A(x) < s \leq t$ となる任意の s を考えると、

$$x \in sA$$

であって、 A は球形的であるから、

劣微分と共役関数

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in sA \quad \therefore \lambda x \in |\lambda|sA$$

$$\therefore \mu_A(\lambda x) \leq |\lambda|s$$

$$\therefore \mu_A(\lambda x) \leq |\lambda|\mu_A(x)$$

ここで、 x の代りに λx 、 λ の代りに $1/\lambda$ と置きかえれば逆向きの不等式が得られるから、

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda|\mu_A(x)$$

となる。

この定理3の仮定を A が満たす時、 μ_A をセミノルム (semi-norm) という。セミノルムは(1), (2), (3)の性質を持つが、逆に(1), (2), (3)の性質を持つ関数を ρ として、

$$A = \{x \mid \rho(x) \leq 1\}$$

とすれば、 $\rho = \mu_A$ となる事が導かれる。セミノルム ρ に対して、

$$S = \{x \mid \rho(x) = 0\}$$

とすれば、 S は L の線形部分空間となる。 S が原点のみからなる時に、 ρ はノルムになる。

[例7] (μ_A の劣微分と共役関数)

A は定理3の仮定を満たしているとする。

$\partial\mu_A(a)$ に x^* が含まれるという事は、

$$\forall x \in L; \langle x - a, x^* \rangle \leq \mu_A(x) - \mu_A(a)$$

が成り立つという事である。

まず、 $x = a \pm \lambda a$ 、 $0 < \lambda < 1$ とおくと、

$$\begin{aligned} \pm \lambda \langle a, x^* \rangle &\leq (1 \pm \lambda)\mu_A(a) - \mu_A(a) \\ &= \pm \lambda \mu_A(a) \end{aligned}$$

$$(1) \quad \therefore \langle a, x^* \rangle = \mu_A(a)$$

次に L の任意の点 u に対して、 $x = a + u$ とおくと、

$$\langle u, x^* \rangle \leq \mu_A(a + u) - \mu_A(a) \leq \mu_A(u)$$

したがって

$$\forall x \in A; \langle x, x^* \rangle \leq \mu_A(x) \leq 1$$

ところが、 $\mu_A(a) = \alpha$ とおくと、

$$\langle \frac{a}{\alpha}, x^* \rangle = \mu_A\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 1$$

$$(2) \quad \therefore \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle = 1$$

逆に(1), (2)が成り立てば、 $x^* \in \partial f(a)$ となる事がいえる。すなわち、 $\mu_A(x) < t$ とすれば、

$$\frac{x}{t} \in A \quad \therefore \langle x, x^* \rangle \leq t$$

$$\therefore \langle x, x^* \rangle \leq \mu_A(x)$$

$$(1)より、\langle x - a, x^* \rangle \leq \mu_A(x) - \mu_A(a)$$

したがって、

$$\partial f(a) = \{x^* \mid \langle a, x^* \rangle = \mu_A(a), \sup_{x \in A} \langle x, x^* \rangle = 1\}$$

となる。

次に μ_A の共役関数を求める。

$$(\mu_A)^*(x^*)$$

$$= \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - \mu_A(x)\}$$

$$= \sup_x [\langle x, x^* \rangle - \inf\{t > 0; x \in tA\}]$$

$$= \sup_x [\sup_{t > 0} \{\langle x, x^* \rangle - t \mid x \in tA\}]$$

もし、 $x^* \in A^\circ$ ならば、 $x \in tA$ となる x に対して、 $\langle x, x^* \rangle \leq 1$ となるから、

$$\sup_{t > 0} \{\langle x, x^* \rangle - t \mid x \in tA\} \leq 0$$

ところが、 $\mu_A(0) = 0$ であるから、

$$\sup \{\langle x, x^* \rangle - t \mid x \in tA\} = 0$$

一方、 $x^* \in A^\circ$ ならば、

$$\exists \bar{x} \in A; \langle \bar{x}, x^* \rangle = 1 + \epsilon > 1, \quad \epsilon > 0$$

したがって、

$$(\mu_A)^*(x^*) \geq \langle t\bar{x}, x^* \rangle - t = t\epsilon$$

$$\therefore (\mu_A)^*(x^*) = +\infty$$

ゆえに、

$$\mu_A^*(x^*) = \delta_{A^\circ}(x^*)$$

となる。

以上のほか色々な公式が知られているが、それらについては別の機会に解説したい。

References

- [1] V. Barbu, Th. Precupanu: Convexity and Optimization in Banach spaces, Sijthoff and Noordhoff, 1978.
- [2] R. B. Holmes: A course on optimization and best approximation, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [3] —: Geometric functional analysis and its applications, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [4] A. D. Ioffe, V. L. Levin: Subdifferentials of convex functions, Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 26(1972)
- [5] A. D. Ioffe, W. M. Tihomirov: Duality of convex functions and extremum problems, Russian Math. Surveys, 23(1968)
- [6] A. W. Roberts and D. E. Varberg: Convex functions, Acad. press, New York, 1973.
- [7] 渡部隆一: 多意写像の凸性について (その1), 「三田学会雑誌」72巻3号(1979)

(法学部助教授)