Title	劣微分と共役関数
Sub Title	Subdifferentials and conjugate fanctions
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.4 (1979. 8) ,p.498(94)- 505(101)
JaLC DOI	10.14991/001.19790801-0094
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790801-0094

研究ノート

劣微分と共役関数

渡部隆一

最近，凸解析の色々な手法が経済分析において極めて有効である事が注目されてきている。凸解析は，従来の微分積分にとってかわるものであって，その手法で特記すべきは次の2点にあると思われる。

1° 今までの解析学の基礎となっている考え方が局所的であるのに対して，大局的であること。

2° 図形の幾何学的な性質を十分に利用していること。

経済分析においては，結局は最適値問題を解くという形に帰着する問題が多いが，そのような問題では凸解析は極めて有効な手段を提供する。その場合，具体的には劣微分と共役関数の考えがよく用いられる。

この論文の目的は，経済分析によく現われると思われる関数について，劣微分と共役関数を求め，その性質を解説する事にある。

§1 準　備

凸解析に関する基本的事柄は〔7〕に解説してある。この論文で用いる概念や記号で〔7〕に用いられているものは，そのまま用いる事にする。

この論文で取り扱う関数は，バナッハ空間Lを定義域とする関数，

$$f : L \longrightarrow \bar{R}$$

である。

このような関数に関して以下よく用いる記号をまとめておこう。

〔1—1〕 本質的定義域：——
$\mathrm{dom} f = \{x \mid f(x) < +\infty\}$

〔1—2〕 fのグラフ：——
$G[f] = \{(x, y) \in L \times R \mid y = f(x)\}$

〔1—3〕 fのエピグラフ：——
$E[f] = \{(x, y) \mid x \in \mathrm{dom} f,\ f(x) \leqq y\}$

〔1—4〕 方向微分係数：——

$$f'(a ; u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}$$

〔1—5〕 劣微分：——
$\partial f(a)$
$= \{x^* \mid \langle x-a, x^* \rangle \leqq f(x) - f(a),\ \forall x\}$
ただし，$f(a) = +\infty$の時は　$\partial f(a) = \emptyset$とする。

〔1—6〕 劣導写像：——

$$\partial f : L \longrightarrow\!\!\!\!\!\to L^*$$
$$x \longmapsto\!\!\!\!\!\to \partial f(x)$$

〔1—7〕 共役関数：——

$$f^* : L^* \longrightarrow \bar{R}$$
$$x^* \longmapsto \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

〔1—8〕 下界関数：——
次の式を満たす連続なアフィン関数gをfの下界関数といい，その集合をM_fで表す。
$\forall x ;\quad g(x) \leqq f(x)$

〔1—9〕 関数fの閉包：——

$$\bar{f}(x) = \sup_{g \in M_f} g(x)$$

〔1—10〕 関数fの支持関数：——
関数fの下界関数gが，次の式を満たす時，gを，点aにおけるfの支持関数という。
$g(a) = f(a)$

次に，特別な関数の定義をあげておこう。

〔1—11〕**指標関数**：——

$$\delta_A(x)=\begin{cases} 0 & (x\in A) \\ +\infty & (x\notin A) \end{cases}$$

〔1—12〕**集合の支持関数**：——

$$A\subset L,\ \sigma_A(x^*)=\sup_{x\in A}\langle x,\ x^*\rangle$$

$$A^*\subset L^*,\ \sigma_A{}^*(x)=\sup_{x^*\in A^*}\langle x,\ x^*\rangle$$

〔1—13〕**ミンコフスキーの関数**：——

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ \inf\{t>0\mid x\in tA\} & \\ +\infty & (x\neq 0\text{で，}x\in tA\text{となる}\ t>0\text{が存在しない時}) \end{cases}$$

次に，定義から直ちに導かれる簡単な公式をあげておこう。

〔1—14〕（劣微分に関する公式）

(i) $\alpha>0$ ならば，$\partial(\alpha f)=\alpha(\partial f)$

(ii) $\partial(f+\alpha)=\partial f,\ \ \alpha\in R$

(iii) $(\mathrm{dom} f)^i\cap(\mathrm{dom} g)^i\neq\emptyset$ ならば，

$$\partial(f+g)=\partial f+\partial g$$

(iv) g が単調増加な凸関数であって，

$$\{f(\mathrm{dom} f)\}^i\cap(\mathrm{dom} g)^i\neq\emptyset$$

ならば，

$$\partial(g\circ f)(x)=\partial g(f(x))\partial f(x)$$

〔1—15〕（共役関数に関する公式）

$f:L\longrightarrow\bar{R}$ が下半連続 $(l.s.c)$ な凸関数ならば，その共役関数 f^*も $l.s.c.$ な凸関数であって，次が成り立つ。

(i) $\forall x,\ \forall x^*;\ \langle x,\ x^*\rangle\leqq f(x)+f^*(x^*)$

(ii) $(f+\alpha)^*(x^*)=f^*(x^*)-\alpha,\ \ \alpha\in R$

(iii) $(\alpha f)^*(x^*)=\alpha f^*\left(\dfrac{x^*}{\alpha}\right),\ \ \alpha>0$

(iv) $\langle x,\ x^*\rangle=f(x)+f^*(x^*)\Longleftrightarrow x^*\in\partial f(x)$

(v) $\partial(f^*)=(\partial f)^{-1}$

(vi) $f^{**}=f$

以上の事はよく知られている事柄である。

次節以下で，これらを用いて劣微分や共役関数を求める事にする。

§2　集合の支持関数

ある集合 A の支持関数として表される関数の中には重要なものがいろいろある。

例えば，L，L^* の原点を中心とする単位球をそれぞれ，

$$B=\{x\mid\|x\|\leqq 1\}$$

$$B^*=\{x^*\mid\|x^*\|\leqq 1\}$$

とすれば，

$$\|x\|=\sup_{x^*\in B^*}\langle x,x^*\rangle=\sigma_B{}^*(x)$$

$$\|x^*\|=\sup_{x\in B}\langle x,\ x^*\rangle=\sigma_B(x^*)$$

である。

空間 L^* の部分集合 $M(\neq\emptyset)$ に対する支持関数を，

$$f(x)=\sigma_M(x)=\sup_{x^*\in M}\langle x,\ x^*\rangle$$

とおく時，これは明らかに次の2つの式を満たす事を注意しておこう。

〔2—1〕 $\forall\alpha\geqq 0,\ \forall x;f(\alpha x)=\alpha f(x)$（正の同次性）

〔2—2〕 $\forall x,\ \forall y;\ f(x+y)\leqq f(x)+f(y)$（劣加法性）

この〔2—2〕より，

$$f(x)=f(x-y+y)\leqq f(x-y)+f(y)$$

したがって，次が成り立つ。

〔2—3〕 $f(x-y)\geqq f(x)-f(y)$

空間 L の部分集合 $A(\neq\emptyset)$ に対する支持関数についても同様である。

支持関数の劣微分については，次の定理が成り立つ。

〔定理1〕

空間 L^* の w^* −コムパクトな凸集合を M とし，

$$f(x)=\max_{x^*\in M}\langle x,\ x^*\rangle=\sigma_M(x)$$

とおけば，

$$\partial f(a)=\{x^*\in M\mid\langle a,\ x^*\rangle=f(a)\}$$

である。

〔証明〕

$g(x^*)=\langle a,\ x^*\rangle$ とおけば，g は空間 L^* 上の連続な線形関数となる。M は w^* −コムパクトであるから，次のような $x_0{}^*$ が存在する。

$$g(x_0{}^*)=\max_{x^*\in M}g(x^*)=\max_{x^*\in M}\langle a,\ x^*\rangle$$

$$\therefore\ \langle a,\ x_0{}^*\rangle=f(a),\ x_0{}^*\in M$$

任意の x に対して，

$$\langle x-a,\ x_0{}^*\rangle=\langle x,x_0{}^*\rangle-\langle a,x_0{}^*\rangle$$
$$=\langle x,x_0{}^*\rangle-f(a)\leqq f(x)-f(a)$$

$$\therefore\ x_0{}^*\in\partial f(a)$$

逆に，$x_1{}^*\in\partial f(a)$ とする時，

(1) $\langle a,\ x_1{}^*\rangle=f(a)$

(2) $x_1{}^*\in M$

が成り立つ事を示す。

劣微分の定義より，

(3)　$f(x)-f(a) \geqq \langle x-a,\ x_1^*\rangle,\ \forall x$

が成り立っている。

いま，(2)が成り立たないとすれば，分離定理により，

(4)　$\max_{x^*\in M} \langle e,\ x^*\rangle < \langle e,\ x_1^*\rangle$

となるようなLの元eが存在する。

ところで〔2−3〕より，

$$f(x-a) \geqq f(x)-f(a)$$

関数fの定義と(3)より，

$$\max_{x^*\in M} \langle x-a,\ x^*\rangle \geqq \langle x-a,\ x_1^*\rangle,\ \forall x$$

ここで $x-a=e$ とおけば

$$\max_{x^*\in M} \langle e,\ x^*\rangle \geqq \langle e,\ x_1^*\rangle$$

これは(4)に反する。

$$\therefore\ x_1^*\in M$$

次に(1)が成り立たないとする。(2)は成り立っているから，

$$\langle a,\ x_1^*\rangle < f(a)$$

でなくてはならない。不等式(3)より

$$f(x)-\langle x,\ x_1^*\rangle \geqq f(a)-\langle a,\ x_1^*\rangle$$

$$\therefore\ f(x)-\langle x,\ x_1^*\rangle > 0,\ \forall x$$

ここで$x=0$とおけば，$0>0$となり不合理。よって，(1)，(2)が成り立つ。Q. E. D.

次に共役関数について考察する。

〔定理2〕

関数fが正の同次性を満たすならば，

$$\forall x;\ \langle x,\ x^*\rangle - f(x) \leqq 0$$

となる x^* の集合をAとおくと，

$$f^*(x^*)=\delta_A(x^*)$$

である。

〔証明〕

仮定から，

$$\forall\alpha \geqq 0,\ \forall x;\ f(\alpha x)=\alpha f(x)$$

である。したがって，$f(0)=0$である。

もし $x^*\in A$ ならば，

$$\forall x;\ \langle x,\ x^*\rangle - f(x) \leqq 0$$

であり，$x=0$の時，

$$\langle x,\ x^*\rangle - f(x)=0$$

である。したがって，

$$f^*(x^*)=\sup_x\{\langle x,\ x^*\rangle - f(x)\}=0$$

もし $x^*\notin A^*$ ならば，

$$\exists x_0;\ \langle x_0,\ x^*\rangle - f(x_0) > 0$$

また，任意の正の数αに対して，

$$\langle \alpha x_0,\ x^*\rangle - f(\alpha x_0)=\alpha\{\langle x_0,\ x^*\rangle - f(x_0)\}$$

$$\therefore\ f^*(x^*) \geqq \sup_{\alpha>0}\ [\alpha\{\langle x_0,\ y^*\rangle - f(x_0)\}]$$

$$\therefore\ f^*(x^*)=+\infty$$

以上から，

$$f^*(x^*)=\delta_A(x^*)$$

〔系〕

空間 L^* の凸部分集合をMとすれば，

$$(\sigma_M)^*(x^*)=\delta_{\bar M}(x^*)$$

である。

〔証明〕

集合Mの支持関数 σ_M の定義より，

$$\sigma_M(x)=\sup_{x^*\in M}\langle x,\ x^*\rangle$$

したがって，$x^*\in M$ならば，

(1)　$\forall x;\ \langle x,\ x^*\rangle - \sigma_M(x) \leqq 0$

$\langle x,\ x^*\rangle$ は固定されたxに対して，x^*の連続関数であるから，$x^*\in \overline{M}$に対しても(1)が成り立つ。

次に，$x_0^*\notin \overline{M}$ ならば，分離定理により，

$$\sup_{x^*\in \bar M}\langle e,\ x^*\rangle < \langle e,\ x_0^*\rangle$$

となる$e\in L$が存在する。したがって，

$$\langle e,\ x_0^*\rangle - \sigma_{\bar M}(e) > 0$$

ゆえに，定理2より，

$$(\sigma_M)^*(x^*)=\delta_{\bar M}(x^*)$$

これらの定理を利用して具体的な関数の劣微分と共役関数を求めよう。

〔例1〕（線形関数）

$$f(x)=\langle x,\ p^*\rangle,\ p^*\in L^*$$

とする。

空間L^*の1点p^*のみからなる集合をMとすれば，

$$f(x)=\sigma_M(x)$$

である。したがって，定理1より

$$\partial f(a)=\{x^*\in M \mid \langle a,\ x^*\rangle=\langle a,\ p^*\rangle\}$$
$$=\{p^*\}=M$$

定理2の系より，

$$f^*(x^*)=\delta_{\bar M}(x^*)=\delta_{\{p^*\}}(x^*)$$
$$=\begin{cases}0 & (x^*=p^*)\\ +\infty & (x^*\neq p^*)\end{cases}$$

〔例2〕（アフィン関数）

$$f(x)=\langle x,\ p^*\rangle+\alpha,\ p^*\in L^*,\ \alpha\in R$$

とすれば，前例と公式〔1−14〕，〔1−15〕より，

$$\partial f(a)=\{p^*\}$$

$$f^*(x^*)=\delta_{\{p^*\}}(x^*)-\alpha$$
$$=\begin{cases}-\alpha & (x^*=p^*)\\ +\infty & (x^*\neq p^*)\end{cases}$$

〔例3〕（ノルム）

$$f(x)=\|x\|=\sigma_B{}^*(x)$$

したがって,

$$\partial f(a)=\{x^*\in B^*|\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|\}$$
$$=\{x^*|\langle a, x^*\rangle=\|a\|, \|x^*\|=1\}$$

$$f^*(x^*)=\delta_B{}^*(x^*)=\begin{cases}0 & (\|x^*\|\leqq 1)\\ +\infty & (\|x^*\|>1)\end{cases}$$

ここで,いくつか注意しておくべき事柄がある。

定理1において,

$$f(x)=\max_{x^*\in M}\langle x,\ x^*\rangle=\sigma_M(x)$$

というのは,集合M上における線形関数$\langle x, x^*\rangle$の最大値であり,

$$\partial f(a)=\{x^*\in M|\langle a,\ x^*\rangle=f(a)\}$$

は,集合M上において線形関数$\langle a, x^*\rangle$が最大となるようなx^*の集合を表している。

幾何学的な意味を考えると,$a\neq 0$の時,x^*に関する方程式

〔2−4〕 $\langle a,\ x^*\rangle=f(a)$

は空間L^*における超平面を表しているわけであるが,

$$f(a)=\max_{x^*\in M}\langle a,\ x^*\rangle$$

であるから,〔2−4〕は集合Mの支持平面になっており,その接点の集合が$\partial f(a)$というわけである。

$a=0$の時は,〔2−4〕は空間L^*全体を表すから,

$$\partial f(0)=M$$

となる。

また,Mが原点に関して対称,すなわち,

$$M=-M$$

ならば,

$$\max_{x^*\in M}\langle x,\ x^*\rangle=\max_{x^*\in M}|\langle x,\ x^*\rangle|$$

である。不等式

〔2−5〕 $|\langle a,\ x^*\rangle|\leqq\|a\|\ \|x^*\|$

より,〔例3〕の$M=B^*$の場合には,

$$|\langle a,\ x^*\rangle|\leqq\|a\|$$

となり,$a\neq 0$の時,

$$\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|$$

となるx^*の集合は,単位球B^*の支持平面を表すというわけである。

ところで,

$$M=\{x^*|\ \|x^*\|\leqq r\}\qquad (r>0)$$

の場合には,不等式〔2−5〕より,

$$\langle a,\ x^*\rangle\leqq|\langle a,\ x^*\rangle|\leqq\|a\|\ r$$

であるが,単位球B^*をr倍に拡大して考えれば,

〔2−6〕 $\sigma_M(a)=\max_{x^*\in M}\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|\ r$

であり,

$$f(x)=\sigma_M(x)=\|x\|\ r$$

とおけば,

$$\partial f(a)=\{x^*|\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|\ r,\ \|x^*\|\leqq r\}$$

というわけである。

さて,Lの元$a\,(\neq 0)$に対してL^*の半径$\|a\|$の球を考え,その球を$M(a)$で表せば,この球上における$\langle a, x^*\rangle$の最大値は,〔2−6〕において$r=\|a\|$の場合だから,

$$\sigma_{M(a)}=\max_{x^*\in M(a)}\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|^2$$

となっている。また,

$$\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|^2$$

となるx^*は,今までの考察より明らかなように,球$M(a)$の境界上になければならないから,$\|x^*\|=\|a\|$を満たす。したがって,

〔2−7〕 $\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|^2=\|x^*\|^2$

を満たすようなx^*の集合というわけである。

$a=0$の場合には,$M(0)$は原点のみからなる集合と考えれば,以上の事はそのまま成り立つ。

$$\gamma(a)=\{x^*|\langle a,\ x^*\rangle=\|a\|^2=\|x^*\|^2\}$$

と書き表し,多意写像,

$$\gamma:L\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow L^*$$
$$x\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\gamma(x)$$

を双対写像と呼ぶ。

〔例3〕において,$a\neq 0$の時,

$$\partial f(a)=\{x^*|\langle a, x^*\rangle=\|a\|, \|x^*\|\leqq 1\}$$
$$=\{x^*|\langle a, x^*\rangle=\|a\|, \|x^*\|=1\}$$

となるが,

$$\|a\|\partial f(a)$$
$$=\{y^*|y^*=\|a\|x^*, x^*\in\partial f(a)\}$$
$$=\{y^*|\langle a, y^*\rangle=\|a\|^2, \|y^*\|=\|a^*\|\}$$
$$=\{y^*|\langle a, y^*\rangle=\|a\|^2=\|y^*\|^2\}=\gamma(a)$$

したがって,次の公式が得られる。

〔2−8〕 $\partial(\|x\|)=\begin{cases}\gamma(x)/\|x\| & (x\neq 0)\\ B^* & (x=0)\end{cases}$

〔例4〕 $f(x)=\dfrac{1}{p}\|x\|^p$, $p>1$とすると,

公式〔1—14〕より,

$$\partial f(x)=\begin{cases}\|x\|^{p-1}\cdot\dfrac{\gamma(x)}{\|x\|}=\|x\|^{p-2}\cdot\gamma(x) & (x\neq 0)\\ 0\cdot B^*=\{0\} & (x=0)\end{cases}$$

特に $p=2$ ならば，$\gamma(0)=\{0\}$ であるから，

$$\partial f(x)=\gamma(x)$$

となる。次に f の共役関数を求める。

$$f^*(x^*)=\sup_x\{\langle x,\ x^*\rangle-\frac{1}{p}\|x\|^p\}$$

いま，

$$F(x)=\langle x,\ x^*\rangle-\frac{1}{p}\|x\|^p$$

とおく。明らかに $F(0)=0$ である。

さて，空間 L の単位球面

$$S=\{x\mid\|x\|=1\}$$

上の1点 a をとり，原点を出発点として a を通る半直線

$$l;\ x=ta\quad(0\leqq t<+\infty)$$

の上で $F(x)$ の最大値を考察する。

$$\varphi(t)=F(ta)=t\langle a,\ x^*\rangle-\frac{t^p}{p}$$

とおく。

もし，$\langle a,\ x^*\rangle\leqq 0$ ならば，

$$\varphi(t)\leqq 0$$

であるから，

$$\max\varphi(t)=0$$

である。

もし，$\langle a,\ x^*\rangle>0$ ならば，

$$\varphi'(t)=\langle a,\ x^*\rangle-t^{p-1}$$

$$\varphi''(t)=-(p-1)t^{p-2}$$

仮定から，$p>1$ だから，$\varphi''<0$ である。

したがって，$\varphi(t)$ は $\varphi'(t)=0$ となる t において最大となる。$\varphi'(t_0)=0$ とおくと，

$$t_0=\{\langle a,\ x^*\rangle\}^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\max\varphi(t)&=\varphi(t_0)\\&=t_0\langle a,\ x^*\rangle-\frac{t_0}{p}\cdot t_0^{p-1}\\&=t_0\left(1-\frac{1}{p}\right)\langle a,\ x^*\rangle\\&=\frac{p-1}{p}\{\langle a,\ x^*\rangle\}^{\frac{p}{p-1}}\end{aligned}$$

いま，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ となる q を考えると，

$$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}=\frac{p-1}{p}$$

$$\therefore\quad\max\varphi(t)=\frac{1}{q}\{\langle a,\ x^*\rangle\}^q$$

L の任意の元 x は，l のような半直線のどれかの上にあり，

$$\sup_{a\in S}\langle a,x^*\rangle=\|x^*\|$$

であるから，

$$\sup_{x\in L}F(x)=\frac{1}{q}\|x^*\|^q$$

$$\therefore\quad f^*(x^*)=\frac{1}{q}\|x^*\|^q$$

§3 指標関数

次に指標関数

$$\delta_A(x)=\begin{cases}0 & (x\in A)\\+\infty & (x\notin A)\end{cases}$$

について考察する。

最初にいくつかの概念を導入する。

〔3—1〕 空間 L の部分集合 A に対して，次のような L^* の集合を A の**直交補集合** (orthogonal complement) といい $A^\perp$ と書き表す。

$$A^\perp=\{x^*\mid\forall x\in A,\ \langle x,\ x^*\rangle=0\}$$

これは L^* の線形部分空間である。

同様に，空間 L^* の部分集合 A に対して，

$$A^\perp=\{x\mid\forall x^*\in A,\ \langle x,\ x^*\rangle=0\}$$

とする。これは L の線形部分空間である。

〔3—2〕 A を空間 L の凸集合とする時，点 a における A の**法線錐** (normal cone) を次のように定義する。

$a\in\overline{A}$ の時：——

$$N(a;A)=\{x^*\mid\forall x\in A;\ \langle x-a,x^*\rangle\leqq 0\}$$

$a\notin\overline{A}$ の時：——

$$N(a;\ A)=\emptyset$$

これは L^* の閉凸錐になっている。

特に A が閉線形部分空間ならば，

$$N(a;\ A)=A^\perp$$

である。

A が L^* の凸集合の時も同様に定義される。

〔3—3〕 A を空間 L の凸集合とする時，点 a における A の**支持凸錐** (support cone) を次のように定義する。

$a\in\overline{A}$ の時：——

$$S(a;A)=\overline{\{y\mid y=a+\lambda(x-a),\ \lambda\geqq 0,\ x\in A\}}$$

$a\notin\overline{A}$ の時：——

$$S(a;\ A)=\emptyset$$

特に，A が閉線形部分空間ならば，

$$S(a;\ A)=A$$

である。

A が L^* の凸集合の時も同様に定義される。

〔3−4〕 集合Aの極(polar)を次のように定義する。

$$A^\circ=\{x^*|\forall x\in A;\ \langle x,\ x^*\rangle\leqq 1\}$$

もし C が凸錐ならば，$x\in C$ と $\lambda>0$ に対して $\lambda x\in C$となるから，

$$C^\circ=\{x^*|\forall x\in C;\ \langle x,\ x^*\rangle\leqq 0\}$$

と書き表す事が出来る。

また，Sが空間Lの線形部分空間ならば，$x\in S$と任意の実数λに対して $\lambda x\in S$となるから，

$$S^\circ=\{x^*|\forall x\in S;\ \langle x,\ x^*\rangle=0\}$$

$$\therefore\quad S^\circ=S^\perp$$

となる。

〔例5〕 Aを空間Lの閉凸集合とし，

$$f(x)=\delta_A(x)=\begin{cases}0 & (x\in A)\\ +\infty & (x\notin A)\end{cases}$$

とする。$a\notin A$ ならば，$f(a)=+\infty$となるから，規約により

$$\partial f(a)=\emptyset$$

である。

$a\in A$ならば，

$$\begin{aligned}\partial f(a)&=\{x^*|\forall x;\ \langle x-a,\ x^*\rangle\leqq\delta_A(x)\}\\&=\{x^*|\forall x\in A;\ \langle x-a,\ x^*\rangle\leqq 0\}\\&=N(a\,;\,A)\end{aligned}$$

以上２つの場合を合せて，

$$\partial f(a)=N(a;\ A)$$

次に共役関数について考える。

$$\langle x,\ x^*\rangle-f(x)=\begin{cases}\langle x,\ x^*\rangle & (x\in A)\\ -\infty & (x\notin A)\end{cases}$$

したがって，

$$f^*(x^*)=\sup_{x^*\in A}\langle x,\ x^*\rangle=\sigma_A(x^*)$$

すなわち，

$$(\delta_A)^*(x^*)=\sigma_A(x^*)$$

特にAが単位球 $B=\{x\mid\|x\|\leqq 1\}$ならば，

$$(\delta_B)^*(x^*)=\sigma_B(x^*)=\|x^*\|$$

〔例6〕 Sを空間Lの閉線形部分空間とし，

$$f(x)=\inf_{y\in S}\|x-y\|$$

とする。$f(x)$は点xよりSに至る最短距離であるから，これを$d(x,\ S)$で表す。

$$\varphi^*\in S^\perp\cap B^*$$

とすれば，

$$\forall y\in S,\ \langle y,\ \varphi^*\rangle=0,\ \ \|\varphi^*\|\leqq 1$$

である。

空間Lの１点をaとすると，任意の$y\in S$に対して，

$$\begin{aligned}|\langle a,\ \varphi^*\rangle|&=|\langle a-y,\ \varphi^*\rangle|\\&\leqq\|a-y\|\,\|\varphi^*\|\leqq\|a-y\|\end{aligned}$$

ゆえに，次が成り立つ。

(1) $|\langle a,\ \varphi^*\rangle|\leqq d(a,\ S)$

一方，点aを中心とする半径$d(a,\ S)$の球B_aと，部分空間Sとを考えると，分離定理によって，

$$u\in B_a\Longrightarrow\langle u,\ \phi^*\rangle\geqq 0,$$

$$u\in S\Longrightarrow\langle u,\ \phi^*\rangle=0$$

となる $\phi^*(\neq 0)$がある。したがって，

$$\|x\|\leqq d(a,\ S)$$

ならば，$a+x\in B_0$，であるから，

$$\langle a+x,\ \phi^*\rangle\geqq 0$$

$$\therefore\quad -\langle a,\ \phi^*\rangle\leqq\langle x,\ \phi^*\rangle$$

したがって，

(2) $$\begin{aligned}-\langle a,\phi^*\rangle&\leqq\inf_x\{\langle x,\phi^*\rangle\mid\|x\|\leqq d(a,S)\}\\&=-\|\phi^*\|\,d(a,\ S)\end{aligned}$$

そこで，

$$\tilde{\varphi}^*=\frac{\phi^*}{\|\phi^*\|}$$

とおけば，$\tilde{\varphi}^*\in M^\perp\cap B^*$であって，(2)より

(3) $\langle a,\ \tilde{\varphi}^*\rangle\geqq d(a,\ S)$

(1)，(3)より，

$$\begin{aligned}d(a,\ S)&=\max_{\varphi^*}\{\langle a,\ \varphi^*\rangle|\varphi^*\in S^\perp\cap B^*\}\\&=\sigma_{S^\perp\cap B^*}(a)\end{aligned}$$

である。ゆえに定理１，定理２〔系〕より，

$$\partial f(a)=\{x^*\in S^\perp\cap B^*|\langle a,x^*\rangle=d(a,S)\}$$

$$f^*(x^*)=\delta_{S^\perp\cap B^*}(x^*)$$

となる。

空間Lの閉超平面をHとし，その方程式を

$$\langle x,\ p^*\rangle=c$$

とする。H上の１点をx_0とすれば

$$\langle x_0,\ p^*\rangle=c$$

であって，Hの方程式は

$$\langle x-x_0,\ p^*\rangle=0$$

となる。$H-x_0=S$とすれば，Sは閉線形部分空間であって，

$$\begin{aligned}d(a,\ H)&=d(a-x_0,\ S)\\&=\sigma_{S^\perp\cap B^*}(a-x_0)\end{aligned}$$

ところが

$$S^\perp\cap B^*=\{\varphi^*=tp^*|\ |t|\leqq\frac{1}{\|p^*\|}\}$$

であるから，

$$d(a,H)=\sigma_{S^\perp\cap B^*}(a-x_0)=\langle a-x_0,\frac{p^*}{\|p^*\|}\rangle|$$

$$=\frac{1}{\|p^*\|}|\langle a,\ p^*\rangle-c|$$

これは，通常の解析幾何学における1点より平面に至る距離の公式と同様である。

超平面H上にaがないならば，Hの方程式の両辺に適当な実数を掛ける事により，Hの方程式を

$$\langle x,\ p^*\rangle=c,\ \|p^*\|=1,\ \langle a,\ p^*\rangle>0$$

とすることが出来る。

$$f(x)=d(x,\ H),\ g(x)=d(x,\ S)$$

とすれば，

$$f(x)=g(x-x_0)$$

であり，

$$S^\perp\cap B^*=\{tp^*|\ \|t\|\leqq 1\}$$

$$\{x^*\in S^\perp\cap B^*|\langle a-x_0,x^*\rangle=d(a-x_0,S)\}=\{p^*\}$$

$$\therefore\ \partial f(a)=\{p^*\}$$

となる。

§4　ミンコフスキーの関数

次にミンコフスキーの関数

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ \inf\{t>0\,|,\ x\in tA\} & \\ +\infty & (x\neq 0\text{で，}x\in tA\text{となる}\ t>0\text{が存在しない時})\end{cases}$$

について考察する。

(i)　$A=\emptyset$または$A=\{0\}$の時は，上の定義式で一番上の場合しか起らないから，

$$\mu_\emptyset(x)=\mu_{\{0\}}(x)=\delta_{\{0\}}(x)$$

(ii)　Aが線形部分空間，または凸錐の時は，

$A=tA(t\geqq 0)$となるから，

$$\mu_A(x)=\delta_A(x)$$

(iii)　Aが原点を中心とする半径1の閉球Bに等しい時は，

$$x\in tB=\Longleftrightarrow\|x\|\leqq t$$

$$\therefore\ \mu_B(x)=\|x\|$$

(iv)　$a^*\in L^*$，$a^*\neq 0$，$\lambda>0$の時は，

$$A=\{x\,|\,|\langle x,\ a^*\rangle|\leqq\lambda\}$$

とすれば，$t>0$の時，

$$x\in tA\Longleftrightarrow\frac{x}{t}\in A\Longleftrightarrow|\langle\frac{x}{t},\ a^*\rangle|\leqq\lambda$$

$$\Longleftrightarrow\frac{1}{\lambda}|\langle x,\ a^*\rangle\leqq t$$

$$\therefore\ \mu_A(x)=\frac{1}{\lambda}|\langle x,\ a^*\rangle|$$

一般に，Aを含む最小の凸錐を$C(A)$とすれば，

$$x\notin C(A)\Longleftrightarrow\mu_A(x)=+\infty$$

となっている。

さて，集合Aがあまり一般的過ぎるとμ_Aの便利な性質が導けないので，Aにいくつかの制限を課す事にする。

任意の$x\in L$に対して，適当な正の数εをとると，

$$0<\lambda<\varepsilon\Longrightarrow\lambda x\in A$$

となる時，Aを吸収的 (absorbing) であるという。もちろん $C(A)=L$ となっている。

また，

$$|\lambda|\leqq 1\Longrightarrow\lambda A\subset A$$

となる時，Aは球形的 (balanced) であるという。この場合には，

$$-A\subset A,\ A\subset -A\quad\therefore\ A=-A$$

となっている。

〔定理3〕

集合Aが，吸収的，球形的な凸集合ならば，

(1)　μ_A は正の同次性を持つ。

(2)　μ_A は劣加法性を持つ。

(3)　任意の$x\in L$と任意の実数λに対して，

$$\mu_A(\lambda x)=|\lambda|\mu_A(x)$$

が成り立つ。

〔証明〕

(1)　明らか。

(2)　$x,\ y\in L$とし，

$$\mu_A(x)+\mu_A(y)<t$$

となるtを選ぶと，

$$\mu_A(x)<\alpha,\ \mu_A(y)<\beta,\ \alpha+\beta=t$$

となるα，βが存在する。Aは吸収的であるから，

$$\mu_A(z)<1\Longrightarrow z\in A$$

$$\therefore\ \frac{x}{\alpha}\in A,\quad\frac{y}{\beta}\in A$$

したがって，Aの凸性より，

$$\frac{x+y}{t}=\frac{x+y}{\alpha+\beta}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{y}{\beta}\right)\in A$$

$$\therefore\ \mu_A(x+y)\leqq t$$

$$\therefore\ \mu_A(x+y)\leqq\mu_A(x)+\mu_A(y)$$

(3)　$\lambda\neq 0$とし，$\rho_A(x)<t$ となるtを1つ選び，$\rho_A(x)<s\leqq t$となる任意のsを考えると，

$$x\in sA$$

であって，Aは球形的であるから，

$$\frac{\lambda}{|\lambda|}x \in sA \quad \therefore \quad \lambda x \in |\lambda| sA$$

$$\therefore \quad \mu_A(\lambda x) \leqq |\lambda| s$$

$$\therefore \quad \mu_A(\lambda x) \leqq |\lambda| \mu_A(x)$$

ここで，xの代りにλx，λの代りに$1/\lambda$と置きかえれば逆向きの不等式が得られるから，

$$\mu_A(\lambda x) = |\lambda| \mu_A(x)$$

となる。

この定理3の仮定をAが満たす時，μ_Aを**セミノルム** (semi-norm) という。セミノルムは(1), (2), (3)の性質を持つが，逆に(1), (2), (3)の性質を持つ関数をρとして，

$$A = \{x \mid \rho(x) \leqq 1\}$$

とすれば，$\rho = \mu_A$となる事が導かれる。セミノルムρに対して，

$$S = \{x \mid \rho(x) = 0\}$$

とすれば，SはLの線形部分空間となる。Sが原点のみからなる時に，ρはノルムになる。

〔例7〕(μ_Aの劣微分と共役関数)

Aは定理3の仮定を満たしているとする。

$\partial\mu_A(a)$にx^*が含まれるという事は，

$$\forall x \in L;\ \langle x-a,\ x^*\rangle \leqq \mu_A(x) - \mu_A(a)$$

が成り立つという事である。

まず，$x = a \pm \lambda a$，$0 < \lambda < 1$とおくと，

$$\pm\lambda\langle a,\ x^*\rangle \leqq (1\pm\lambda)\mu_A(a) - \mu_A(a) = \pm\lambda\mu_A(a)$$

(1) $\therefore\ \langle a,\ x^*\rangle = \mu_A(a)$

次にLの任意の点uに対して，$x = a + u$とおくと，

$$\langle u,\ x^*\rangle \leqq \mu_A(a+u) - \mu_A(a) \leqq \mu_A(u)$$

したがって

$$\forall x \in A;\ \langle x,\ x^*\rangle \leqq \mu_A(x) \leqq 1$$

ところが，$\mu_A(a) = \alpha$とおくと，

$$\left\langle \frac{a}{\alpha},\ x^*\right\rangle = \mu_A\left(\frac{a}{\alpha}\right) = 1$$

(2) $\therefore\ \sup\limits_{x\in A}\langle x,\ x^*\rangle = 1$

逆に(1), (2)が成り立てば，$x^* \in \partial f(a)$となる事がいえる。すなわち，$\mu_A(x) < t$とすれば，

$$\frac{x}{t} \in A \quad \therefore \quad \langle x,\ x^*\rangle \leqq t$$

$$\therefore \quad \langle x,\ x^*\rangle \leqq \mu_A(x)$$

(1)より，$\langle x-a,\ x^*\rangle \leqq \mu_A(x) - \mu_A(a)$

したがって，

$$\partial f(a) = \{x^* \mid \langle a,\ x^*\rangle = \mu_A(a),\ \sup_{x\in A}\langle x,\ x^*\rangle = 1\}$$

となる。

次にμ_Aの共役関数を求める。

$$\begin{aligned}(\mu_A)^*(x^*) &= \sup_x\{\langle x,\ x^*\rangle - \mu_A(x)\}\\ &= \sup_x[\langle x,\ x^*\rangle - \inf\{t>0\,;x\in tA\}]\\ &= \sup_x[\sup_{t>0}\{\langle x,\ x^*\rangle - t \mid x\in tA\}]\end{aligned}$$

もし，$x^* \in A^\circ$ならば，$x \in tA$となるxに対して，$\langle x,\ x^*\rangle \leqq 1$となるから，

$$\sup_{t>0}\{\langle x,\ x^*\rangle - t \mid x \in tA\} \leqq 0$$

ところが，$\mu_A(0) = 0$であるから，

$$\sup_t\{\langle x,\ x^*\rangle - t \mid x \in tA\} = 0$$

一方，$x^* \notin A^\circ$ならば，

$$\exists\overline{x} \in A;\ \langle\overline{x},\ x^*\rangle = 1+\varepsilon > 1,\quad \varepsilon > 0$$

したがって，

$$(\mu_A)^*(x^*) \geqq \langle tx,\ x^*\rangle - t = t\varepsilon$$

$$\therefore \quad (\mu_A)^*(x^*) = +\infty$$

ゆえに，

$$\mu_A{}^*(x^*) = \delta_{A^\circ}(x^*)$$

となる。

以上のほか色々な公式が知られているが，それらについては別の機会に解説したい。

References

〔1〕 *V. Barbu, Th. Precupann*: Convexity and Optimization in Banach spaces, *Sijthoff and Noordhoff, 1978.*

〔2〕 *R. B. Holmes*: A course on optimization and best approximation, *Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1972.*

〔3〕 ——: Geometric functional analysis and its applications, *Springer-Verlag, Berlin, 1975.*

〔4〕 *A. D. Ioffe, V. L. Levin: Subdifferentials of convex functions, Trans. Moscow Math. Soc. Vol. 26(1972)*

〔5〕 *A. D. Ioffe, W. M. Tihomirov: Duality of convex functions and extremum problems, Russian Math. Surveys, 23(1968)*

〔6〕 *A. W. Roberts and D. E. Varberg*: Convex functions, *Acad. press, New York, 1973.*

〔7〕 渡部隆一：多意写像の凸性について (その1)，「三田学会雑誌」72巻3号(1979)

(法学部助教授)