Title	多意写像の凸性について(その2)
Sub Title	On the convexity of multi-valued mappings II
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.4 (1979. 8) ,p.446(42)- 466(62)
JaLC DOI	10.14991/001.19790801-0042
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790801-0042

多意写像の凸性について（その2）

渡部隆一

この論文は，多意写像の凸性について（その1）〔7〕の続きである。（その1）においては，

1章　凸関数の基本性質

について解説したが，この論文では，

2章　凸写像の基本性質

3章　凸多意関数の構成

について解説する。

目標は凸多意写像の構成にあるのであるが，（その1）の最初に述べたように，問題となるのは順序の導入の仕方である。応用する場合を考えると，なるべく自然でしかも取り扱い易い形で導入しなくてはならない。一般的過ぎても特殊過ぎても具合が悪く，どの辺が最適であるかを決めるのは難しい。

以下の2章，3章において，その基本となる考え方を述べる事にする。

2章　凸写像の基本性質

この章では，写像

$$f : X \longrightarrow Y$$

の凸性について解説する。

凸関数というものは，不等式を用いて定義されるから，上のような写像の凸性について考えるためには，まず Y に順序を導入しなくてはならない。

すなわち，何らかの意味で次の不等式が意味を持たなくてはならない。

$$f(\lambda a + \mu b) \leqq \lambda f(a) + \mu f(b)$$

そのためには，XやYは線形空間であって，さらにYにおける順序がある種の条件を満足する必要がある。

以下，X，Yは実係数のバナッハ空間とする。

§ 2.1. 順序の導入

一般に，集合Sの上の順序関係とは，

推移律； $a \leqq b$，$b \leqq c \Longrightarrow a \leqq c$

を満たす関係の事である。

推移律を満たすだけならば，適当な関数

$$u: \quad S \longrightarrow R$$

を選び，S上の順序関係“$\leqq$”を，

$$a \leqq b \Longleftrightarrow u(a) \leqq u(b)$$

と定めればよい。効用関数はこの例である。

関数uによって導入された順序関係は，さらに次の条件を満たしている。

反射律； $\forall a$；$a \leqq a$

完全性； 任意のa，bに対して，$a \leqq b$または$b \leqq a$のどちらかが成り立つ。

ところで，u以外にもう1つの関数，

$$v: \quad S \longrightarrow R$$

を選び，関数u, vを用いて，順序関係“$\leqq$”を

$$a \leqq b \Longleftrightarrow u(a) \leqq u(b),\ v(a) \leqq v(b)$$

と定義すると，これは推移律と反射律を満たすが完全性は満たさない。

次に，バナッハ空間L上の順序関係について考えてみよう。

空間Lには，加法と実数倍という2つの算法が定義されているから，L上の順序関係もこれら2つの算法と両立する事が望ましい。すなわち，

$$a \leqq b \Longrightarrow a + c \leqq b + c$$

$$a \leqq b,\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda a \leqq \lambda b$$

そのためには，前のuとして線形関数を選べばよい。

例えばn次元の場合，

$$(a_i) \leqq (b_i) \Longleftrightarrow a_i \leqq b_i,\ \forall i$$

として順序関係を導入する事がよく行われるが，これは座標軸上への射影を

$$p_i(x) = x_i$$

とした時，

$$a \leqq b \Longleftrightarrow p_i(a) \leqq p_i(b),\ 1 \leqq i \leqq n$$

と定義したと考える事が出来る。

そこで，L上の線形関数族$\{p_\alpha\}$を選び，L上の順序関係“$\leqq$”を，

$$a \leqq b \Longleftrightarrow p_\alpha(a) \leqq p_\alpha(b), \ \forall \alpha$$

と定義すれば，これはL上にLの算法と両立するような順序関係を導入する。

さて，このような順序関係において $a \leqq b$ とする。もし2つの線形関数 p，q において，

$$p(a) \leqq p(b), \quad q(a) \leqq q(b)$$

であるならば，任意の $\lambda \geqq 0$ に対して

$$(\lambda p)(a) \leqq (\lambda p)(b)$$

であり，

$$(p+q)(a) \leqq (p+q)(b)$$

である。したがって，L上の線形関数族 $\{p_\alpha\}$ の張る凸錐をPとすれば，Pに属する任意の線形関数 p に対しても

$$a \leqq b \Longrightarrow p(a) \leqq p(b)$$

が成り立つ。

解析的な操作を行う為には，線形関数は連続である方が望ましいから，空間Lの 双対空間 L^* の閉凸錐 P^* を1つ定め，

$$(2.1) \quad a \leqq b \Longleftrightarrow \langle a, p^* \rangle \leqq \langle b, p^* \rangle, \ \forall p^* \in P^*$$

としてL上に順序を導入する。

以下，このようにして導入した順序について考察する。

念の為，まず凸錐の定義をあげておく。

凸錐： 線形空間の部分集合Kが，次の条件を満たす時，Kを**凸錐**という。

(i) $K+K \subset K$

(ii) $\alpha \geqq 0$ ならば，$\alpha K \subset K$

(iii) $K \cap (-K) = \{0\}$

ところで，空間L^*の凸錐P^*の任意の元p^*に対して，

$$\langle a, p^* \rangle \leqq \langle b, p^* \rangle \Longleftrightarrow 0 \leqq \langle b-a, p^* \rangle$$

であるから，

$$P = \{x \in L \mid \forall p^* \in P^*; \ \langle x, p^* \rangle \geqq 0\}$$

とおくと，(2.1) 式は次のように表せる。

$$a \leqq b \Longleftrightarrow b-a \in P$$

明らかに，

$$P+P \subset P$$

$$\alpha \geqq 0 \text{ ならば，} \alpha P \subset P$$

であるから，凸錐の条件(i)，(ii)は満たされるが，条件(iii)は凸錐 P^* にさらに条件をつけ加えないと必ずしも満たされない。それは，P^*が唯1つの p^*（$\neq 0$）によって張られる場合を考えてみればわかる。

条件(iii)を$K=P$に対して書き換えると，

$$P\cap(-P)=\{0\}$$

$$\therefore \quad x\geqq 0,\ -x\geqq 0 \Longrightarrow x=0$$

$$\therefore \quad \left\{\begin{array}{l}\forall p^*\in P^*;\ \langle x,\ p^*\rangle\geqq 0\\ \forall p^*\in P^*;\ \langle -x,\ p^*\rangle\geqq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

これは，線形関数の性質から，

$$(2.2)\quad [\forall p^*\in P^*;\ \langle x,\ p^*\rangle=0] \Longrightarrow x=0$$

と書ける。

この（2.2）が成り立つようなP^*の条件はいろいろあるが，簡単なものとして，

$$(2.3)\quad P^*-P^*=L^*$$

というのがある。

もし（2.3）が満たされていれば，L^* の任意の元 a^* は

$$a^*=p^*-q^*,\ p^*\in P^*,\ q^*\in P^*$$

と書ける。したがって，

$$\forall p^*\in P^*;\ \langle x,\ p^*\rangle=0$$

であるならば，

$$\langle x,\ a^*\rangle=\langle x,\ p^*\rangle-\langle x,\ q^*\rangle=0-0=0$$

$$\therefore \quad x=0$$

となり（2.2）が成り立つ。

一般に，線形空間Lの凸錐Kが，

$$K-K=L$$

を満たす時，Kを**再生的** (reproducing) という。

以上から，凸錐 P^* が再生的ならばPは凸錐になるという事が導けた事になる。

また，P^* の元 p^* に対して，半空間

$$H_{p^*}=\{x\mid\langle x,\ p^*\rangle\geqq 0\}$$

を考えると，p^* は連続であるからこれは閉集合であって，

$$P=\bigcap_{p^*\in P^*}H_{p^*}$$

したがって，Pも閉集合である。

閉凸錐Pに属する元を**非負の元**と呼ぶ。

また，このようにして導入されたL上の順序関係をP^***により導入された順序**という。

次に，この順序の基本的性質をあげておく。

〔O—1〕 $a \leqq b \Longleftrightarrow b-a \in P$

$\Longleftrightarrow \forall p^* \in P^*$；$\langle a, p^* \rangle \leqq \langle b, p^* \rangle$

〔O—2〕 $a \leqq b \Longleftrightarrow a+c \leqq b+c$

〔O—3〕 $\lambda \geqq 0$，$a \leqq b \Longrightarrow \lambda a \leqq \lambda b$

〔O—4〕 $a \leqq b$，$b \leqq a \Longrightarrow a=b$ （反対称律）

〔O—5〕 $P-P=L$

〔O—6〕 Lの任意の元xに対して，$x \leqq u$となるPの元が存在する。

〔O—7〕 Lの任意の2つの元x，yに対し$x \leqq u$，$y \leqq u$となるPの元uが存在する。

ここで，凸錐について重要な概念を導入しておく。すなわち，正の数εが存在して，凸錐Pに属する任意の2つの点x，yに対して，

$$\| x \| \geqq 1, \ \| y \| \geqq 1 \Longrightarrow \| x+y \| \geqq \varepsilon$$

が成り立つ時，Pは**正規** (normal) であるという。

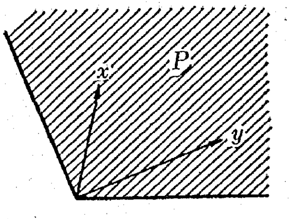

図1

これは幾何学的にいうと，Pに属する任意の2点x，yの位置ベクトルのなす角が，πより小さいという事を意味している。

この正規という概念については，次が成り立つ。

命題1 (M. G. Krein の定理)（〔8〕参照）

凸錐Pが正規である為の必要十分条件は，凸錐P^*が再生的である事である。

バナッハ空間Lには凸錐P^*によって順序が導入されており，P^*は再生的であったから非負の元よりなる凸錐Pは正規である。

さて，Lの部分集合Aに対して，適当なLの元a，bが存在して，

$A \subset \{ x \mid a \leqq x \leqq b \}$

となる時，集合Aは**順序有界** (order-bounded) であるという。これについて次が成り立つ。

命題2 （〔8〕参照）

バナッハ空間Lの非負の元からなる凸錐Pが正規ならば，Lの順序有界な集合Aは有界である。

もう1つ重要な概念を導入しておく必要がある。

非負の元からなる凸錐Pに対して正の定数γが存在して，

$y \in P$，$-y \leqq x \leqq y \Longrightarrow \| x \| \leqq \gamma \| y \|$

が成り立つ時，空間Lのノルムは**半単調**（semi-monotonic）であるという。次が成り立つ。

命題3　（〔8〕参照）

ノルムが半単調である為の必要十分条件は，凸錐Pが正規である事である。

以上のように順序を導入すれば，Pは正規となるから，ノルムは半単調になっているわけである。

§ 2.2　凸写像の定義

実係数のバナッハ空間X，Yおよび写像

$$f:\quad X \longrightarrow Y$$

が与えられたとする。

空間Yには，Yの双対空間Y^*の閉凸錐P^*によって，前節で述べたような順序関係が導入されているものとする。

さらに，空間Yに1つの仮想的な元∞をつけ加えて，

$$\overline{Y}=Y\cup\{\infty\}$$

とし，Yの任意の元yに対して

$$y\leqq\infty,\quad y\neq\infty$$

であり，P^*の任意の元p^*に対して，

$$\langle\infty,\ p^*\rangle=+\infty$$

と規約する。

このようにすれば，$\overline{Y}$の任意の2元y_1，y_2に対して，

$$(2.4)\qquad y_1\leqq y_2 \Longleftrightarrow \forall p^*\in P^*;\ \langle y_1,\ p^*\rangle\leqq\langle y_2,\ p^*\rangle$$

となる。

さて，空間Xに含まれる任意の2点a，bと，

$$\lambda+\mu=1,\quad \lambda\geqq 0,\quad \mu\geqq 0$$

を満足する任意の2つの実数λ，μに対して，

$$(2.5)\qquad f(\lambda a+\mu b)\leqq\lambda f(a)+\mu f(b)$$

が成り立つ時，fは**凸写像**（convex mapping）であるといい，

$$\mathrm{dom}\,f=\{x\in X\,|\,f(x)\neq\infty\}$$

をfの**本質的定義域**と呼ぶ。ただし，

$$\mathrm{dom}\,f\neq\emptyset$$

とする。

以上の事は，P^* に属する任意の線形関数 p^* と f との合成関数，

$$p^* \circ f : \quad X \longrightarrow \bar{R}$$

が凸関数になるという事と同値である。また，

$$\mathrm{dom}\, f = \mathrm{dom}(p^* \circ f)$$

となっている。

［例1］

$X=L^n$，$Y=L^m$ とし，Y の基底を$\{e_i\}$，$(1 \leqq i \leqq m)$ とする。Y^* も m 次元となるが，Y^*の基底としては $\{e_i\}$ の双対基底，すなわち，

$$\langle e_i,\ p_j^* \rangle = \delta_{ij} \quad \text{(クロネッカーのデルタ)}$$

となる$\{p_j^*\}$，$(1 \leqq j \leqq m)$ をとる。凸錐 P^* としては，$\{p_j^*\}$の張る凸錐を考える。

$$P^* = \{ p^* \mid p^* = \sum_{j=1}^{m} \rho_j\, p_j^*,\ \rho_j \geqq 0 \}$$

Y の任意の元を

$$y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i\, e_i$$

とすれば，

$$y \geqq 0 \Longleftrightarrow \langle y,\ p_j^* \rangle \geqq 0,\ 1 \leqq j \leqq m$$
$$\Longleftrightarrow \eta_i \leqq 0,\ 1 \leqq i \leqq m$$

である。したがって，

$$P = \{ y \mid y = \sum_{i=1}^{m} \eta_i\, e_i,\ \eta_i \geqq 0 \}$$

となる。

空間Xの元 x を，適当な基底により成分表示して，

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

とし，写像 f ： $X \longrightarrow Y$ を

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) e_i$$

と表せば，

$$\langle f(x),\ p_j^* \rangle = f_j(x),\ 1 \leqq j \leqq m$$

となるから，写像 f が凸写像であるという事と関数 f_j が凸関数という事は同値である。

以上はよく現れるタイプであるが，一般に Y^* の有限個の元，p_1^*，……，p_k^* によって P^* が張られる場合は，写像 f が凸であるとは，k 個の関数 $\langle f(x),\ p_j^* \rangle$ が凸という事と同値である。

§ 2.3 凸写像の性質

以下，第1章で述べた〔CF—1〕～〔CF—5〕の性質が果し成立するかどうかを調べよう。

関数fのエピグラフとは，$X\times\overline{Y}$の部分集合，

$$E[f]=\{(x,\ y)\mid y\geqq f(x),\ x\in\mathrm{dom}\,f\}$$

の事であって，明らかに次が成り立つ。

〔CF—1〕

関数fが凸写像である為の必要十分条件は，fのエピグラフ$E[f]$が$X\times\overline{Y}$の凸集合となる事である。

これはまた次のようにいいかえる事が出来る。

〔CF—1′〕

関数fが凸写像である為の必要十分条件は，任意の $p^*\in P^*$ に対して，$p^*\circ f$のエピグラフ$E[p^*\circ f]$が$X\times\bar{R}$の凸集合となる事である。

次に，〔CF—2〕について考えよう。空間Xの部分集合Aにおいて，

$$\forall x\in A\ ;\ f(x)\leqq k\quad(k\in Y)$$

が成り立つ時，fはAにおいて**上に有界**であるといい，

$$\forall x\in A\ ;\quad l\leqq f(x)\quad(l\in Y)$$

が成り立つ時，fはAにおいて**下に有界**であるという。

また，fがAにおいて上にも下にも有界である時，fはAにおいて**順序有界**であるという。

さらに，fが1点aの適当な近傍において上に有界の時，fは点aの近傍で上に有界であるといい，集合Aの各点の近傍で上に有界の時，fはAで**局所的に上に有界**であるという。局所的に下に有界，局所的に順序有界という事も同様に定義される。

なお，リプシッツ条件については1章で解説した。

1章の〔CF—2″〕は形式的にはそのまま成立する。いくつかの段階に分けて解説しよう。

〔CF—2″〕

写像$f:X\longrightarrow Y$は凸写像であるとする。もし，$\mathrm{dom}\,f$の内部$(\mathrm{dom}f)^i$に含まれるある1点の近傍において上に有界ならば，fは$(\mathrm{dom}f)^i$において，局所的に有界であり，局所的にリプシッツ条件を満たす。したがって，fは$(\mathrm{dom}\,f)^i$において連続となり，$(\mathrm{dom}\,f)^i$に含まれる任意のコムパクト集合においてfはリプシッツ条件を満たす。

〔解説〕

(i)　$(\mathrm{dom}\,f)^i$の1点aの近傍においてfが上に有界ならば，$(\mathrm{dom}\,f)^i$の各点の適当な近傍にお

いてfは有界となる事を導く。

$$g(x)=f(a+x)-f(a)$$

とおけば，$g(0)=0$であり，gは原点0の近傍で上に有界となる。この時，$(\mathrm{dom}\, g)^i$の各点の近傍でgは有界となる事を導けばよい。

原点Oを中心とする半径rの閉球Bにおいて，gは上に有界とすると，〔O—6〕より，

(1) $\forall x\in B$； $g(x)\leqq v$ $(v\in P)$

とおく事が出来る。

さて，$0<\varepsilon<1$であるεをとり，

$$x\in\varepsilon B \quad \therefore \ \frac{x}{\varepsilon}\in B$$

とすると，

$$g(x)=g\left((1-\varepsilon)0+\varepsilon\cdot\frac{x}{\varepsilon}\right)\leqq(1-\varepsilon)g(0)+\varepsilon g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\leqq\varepsilon v$$

$$g(0)=g\left(\frac{1}{1+\varepsilon}x+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\leqq\frac{1}{1+\varepsilon}g(x)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}g\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$\therefore \quad g(x)\geqq(1+\varepsilon)g(0)-\varepsilon g\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\geqq-\varepsilon v$$

したがって，

(2) $-\varepsilon v\leqq g(x)\leqq\varepsilon v$

ゆえに，命題3より，

$$\| g(x)\| \leqq \gamma \,\| \varepsilon v\| =\gamma\varepsilon\| v\|$$

すなわち，εB上で写像gは有界であるから，点aの近傍で写像fも有界である。

次に，$(\mathrm{dom}\, g)^i$の1点$y\neq 0$を考える。

原点Oを出発点とし点yに向う半直線上に1点$z\in(\mathrm{dom} g)^i$をとり，

$$z=\rho y,\quad \rho>1$$

とする。また，$\lambda=1/\rho$とおき，

$$M=y+(1-\lambda)(\varepsilon B)=\{u\mid u=(1-\lambda)x+\lambda z,\ \ x\in\varepsilon B\}$$

とすると，$u\in M$に対して，

$$g(u)\leqq(1-\lambda)g(x)+\lambda g(z)\leqq(1-\lambda)v+\lambda g(z)\leqq v+g(z)$$

ゆえに，gはM上で上に有界となるから，前半で示した事よりfはMにおいて有界となる。すなわちfは$(\mathrm{dom}\, f)^i$において局所的に有界となる。

(ii) 局所的にリプシッツ条件を満たす事を示そう。すなわち，$(\mathrm{dom}\, f)^i$の1点をbとした時，bのある近傍でリプシッツ条件を満たす事を導く。

(i)の証明からわかるように，fはbを中心とする適当な半径rの閉球において上に有界となる。

いま，$0<r_0<r$ となる r_0 をとり，閉球

$$B_0=\{x \mid \| x-b \| \leqq r_0\}$$

を考え，B_0 に含まれる任意の1点を x_1,

$$g(y)=f(y+x_1)-f(x_1)$$

とおく。$g(0)=0$ であり，g は閉球

$$W=\{y \mid \| y \| \leqq r-r_0\}$$

において上に有界である。すなわち，

$$\forall y \in W;\ g(y) \leqq v \quad (v \in P)$$

とかく事が出来る。したがって，(i)の証明より，$0<\varepsilon<1$ である ε をとると，

$$\forall y \in W;\ \| g(y) \| \leqq r\varepsilon \| v \|$$

そこで，

$$\| x-x_1 \| < r-r_0$$

の時，

$$y=x-x_1, \qquad \varepsilon=\frac{\| x-x_1 \|}{r-r_0},\ K=\frac{r \| v \|}{r-r_0}$$

とおけば，

$$\| y \| = \| x-x_1 \| = \varepsilon(r-r_0) \qquad \therefore \quad y \in \varepsilon W$$

$$\therefore \quad \| g(y) \| \leqq r \cdot \frac{\| x-x_1 \|}{r-r_0} \| v \|$$

したがって，

(3) $\quad \| x-x_1 \| < r-r_0 \Longrightarrow \| f(x)-f(x_1) \| \leqq K \| x-x_1 \|$

次に，閉球 B_0 に含まれる点 x_2 $(\neq x_1)$ をとり，線分 $[x_1,\ x_2]$ 上の n 等分点，

$$x_1=u_0,\ u_1,\ \cdots\cdots,\ u_{n-1},\ u_n=x_2$$

をとり，n を十分大きくとって，

$$\| u_k-u_{k-1} \| < r-r_0$$

となるようにすると，(3)より，

$$\| f(u_k)-f(u_{k+1}) \| \leqq K \| u_k-u_{k+1} \| = \frac{K}{n} \| x_1-x_2 \| \quad (k=0,\ 1,\ 2 \cdots\cdots,\ n-1)$$

したがって，

$$\| f(x_1)-f(x_2) \| \leqq \sum_{k=0}^{n-1} \| f(u_k)-f(u_{k+1}) \| \leqq K \| x_1-x_2 \|$$

2点 x_1, x_2 は閉球 B_0 の任意の点でよいから，写像 f は B_0 においてリプシッツ条件を満たす。すなわち，f は $(\mathrm{dom}\, f)^i$ において局所的にリプシッツ条件を満たす。〔CF—2″〕の後半の部分は明らかである。

空間XからYへの線形写像Tに対して，

$$A\ ;\quad X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto A(x)=T(x)+a,\ (a\in Y)$$

である写像Aを**アフィン写像**と呼ぶ。これからは，線形写像，アフィン写像は連続なものだけを考え，連続な線形写像の全体を$\mathscr{L}(X,Y)$で表す。

凸写像fが与えられた時，次の(2.6)を満たすようなアフィン写像Aをfの**下界写像**(minorant)という。

(2.6)　$\forall x\ ;\quad A(x)\leqq f(x)$

特に，

(2.7)　$\exists a\ ;\quad A(a)=f(a)$

が成り立つ時，Aを点aにおけるfの**支持写像**(support mapping)という。

この(2.6)は，任意の$p^*\in P^*$に対して，関数$p^*\circ A$が凸関数$p^*\circ f$の下界関数になっている事と同値であり，(2.7)は(2.2)より，$p^*\circ A$が点aにおいて$p^*\circ f$の支持関数になっている事と同値である。

また，空間Yの点列$\{y_n\}$が与えられた時，

$$w-\lim_{n\to\infty} y_n=a \iff \forall y^*\in Y^*\ ;\ \lim_{n\to\infty}\langle y_n,\ y^*\rangle=\langle a,\ y^*\rangle$$

であるが，$P^*-P^*=Y^*$であるから，これは，

$$\forall p^*\in P^*\ ;\ \lim_{n\to\infty}\langle y_n,\ p^*\rangle=\langle a,\ p^*\rangle$$

と同値である。

さらに，1章（T—1）より，凸集合Aがs－閉集合という事とw－閉集合という事は同値である。

以上の事をふまえて次のように定義する。

写像$f:X\longrightarrow\overline{Y}$が与えられた時，任意の$p^*\in P^*$に対して，関数

$$p^*\circ f : X\longrightarrow \bar{R}$$

が下半連続の時，fは**下半連続**(l. s. c.)であるという。

また，$a\in Y$に対して，

$$L_a=\{x\mid f(x)\leqq a\}$$
$$=\{x\mid \forall p^*\in P^*\ ;\ \langle f(x),\ p^*\rangle\leqq\langle a,\ p^*\rangle\}$$

をfの**レベル集合**という。

写像fが凸ならば，$\forall p^* \in P^*$に対して$E[p^* \circ f]$が閉集合という事と$E[f]$が閉集合という事は同値になるから，次の命題が得られる。

命題 4

凸写像fに関して次の3つの条件は同値である。

(1) エピグラフ$E[f]$が閉集合である。

(2) fが l. s. c. である。

(3) 任意の$b \in Y$に対して，レベル集合L_bが閉集合である。

さて，写像fが l. s. c. であって，$(\mathrm{dom}\, f)^i$ が空集合ではないとする。$a \in (\mathrm{dom}\, f)^i$ に対し，$f(a) \leqq b$，$f(a) \neq b$となるYの点bをとると，

$$\{x \mid \forall p^* \in P^*;\ \langle f(x),\ p^* \rangle \leqq \langle b,\ p^* \rangle\}$$

という集合は閉凸集合で，しかも点aの近傍を含む事がいえる。したがって，〔CF―2″〕よりfは$(\mathrm{dom}\, f)^i$において連続となる事がいえる。

さらに，fのエピグラフは，

$$E[f] = G[f] + P$$

という形に書け，Pは再生的であったから，その内部P^iは空でない。したがって，$(\mathrm{dom}\, f)^i$が空でなければ$(E[f])^i$は空でないから，分離定理より，閉集合$E[f]$の境界上に閉じた支持平面が存在する。これはfに支持写像が存在するという事である。すなわち，次が成り立つ。

〔CF―3″〕

下半連続な写像fが凸写像である為の必要十分条件は，$\mathrm{dom}\, f$の任意の内点において，fの支持写像が存在する事である。($(\mathrm{dom}\, f)^i \neq \emptyset$とする)

凸写像fの下界写像全体の集合をM_fとする。このM_fに含まれる1つのアフィン写像をgとすれば，(2.6) が成り立っているから，

$$\forall x;\ \sup_{g \in M_f} g(x) \leqq f(x)$$

であり，fが l. s. c. ならば，$(\mathrm{dom}\, f)^i$の点xに対してfの支持写像が存在するから，上の式で等号が成り立つ。そこで

$$\bar{f}(x) = \sup_{g \in M_f} g(x)$$

とおき，この$\bar{f}$をfの閉包と呼ぶ，fが l. s. c. ならば，$(\mathrm{dom}\, f)^i$において$\bar{f} = f$となっている。

§ 2.4　劣微分と共役写像

関数$f: X \longrightarrow \bar{R}$の点$a$における劣微分$\partial f(a)$とは，

$$\forall x;\ \langle x-a,\ x^*\rangle \leqq f(x)-f(a)$$

を満たすようなx^*の集合である。x^*はX^*の元であるが，前の記号を使えば$X^*=\mathscr{L}(X,\ R)$であり，上の式は通常の関数記号では，

$$\forall x;\ x^*(x-a) \leqq f(x)-f(a)$$

と書き表せる。そこで，写像$f: X \longrightarrow Y$に対して，

$$(2.8)\quad \forall x;\ T(x-a) \leqq f(x)-f(a)$$

となる$\mathscr{L}(X,\ Y)$元Tの集合を，写像fの点aにおける**劣微分**といい，$\partial f(a)$と書き表し，その元を**劣勾配**と呼ぶ。ただし，$f(a)=\infty$の時は$\partial f(a)=\emptyset$と規約する。

上の式（2.8）は次のようにも書ける。

$$\forall x,\ \forall p^*;\ p^*\circ T(x-a) \leqq p^*\circ f(x)-p^*\circ f(a)$$

あるいは，

$$\forall x,\ \forall p^*;\ \langle T(x)-T(a),\ p^*\rangle \leqq \langle f(x)-f(a),\ p^*\rangle$$

すなわち，

$$(2.9)\quad T\in\partial f(a) \Longleftrightarrow \forall p^*;\ p^*\circ T\in\partial(p^*\circ f)(a)$$

である。aを変数と考えてxと書き直せば，

$$\begin{aligned}\partial f:\ & X \twoheadrightarrow \mathscr{L}(X,\ Y)\\ & x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \partial f(x)\end{aligned}$$

これをfの**劣導写像**という。

$$\mathrm{dom}(\partial f)=\{x\,|\,\partial f(x)\neq\emptyset\}$$

とすれば，l. s. c. な凸写像fに対して，

$$(\mathrm{dom} f)^i\subset \mathrm{dom}(\partial f)\subset \mathrm{dom} f$$

であり，各xに対して$\partial f(x)$は$\mathscr{L}(X,\ Y)$の閉凸集合となっている。

次に，共役関数について考えよう。

下半連続な凸写像fと，連続な線形写像$T\in\mathscr{L}(X,\ Y)$に対して，

$$(2.10)\quad f^*(T)=\sup_x\{T(x)-f(x)\}$$

とおき，

$$f^*:\ \mathscr{L}(X, Y) \longrightarrow Y$$

をfの**共役写像**という。

式(2.10)は，任意の$p^*\in P^*$に対して，

$$p^* \circ f^*(T)=\sup_x \{p^* \circ T(x)-p^* \circ f(x)\}$$

が成り立っているという事を意味している。

〔例2〕

写像fを連続なアフィン写像とし，

$$f(x)=S(x)+b,\quad S\in\mathscr{L}(X,\ Y),\quad b\in Y$$

とおく。(2.8) 式は次のように書ける。

$$\forall x\ ;T(x-a)\leqq S(x-a)$$

Xの任意の元uをとり，

$$x=a\pm\lambda u,\quad \lambda>0$$

とおけば

$$\pm\lambda T(u)\leqq\pm\lambda S(u)$$

$$\therefore\quad T(u)=S(u)\quad\therefore\quad T=S$$

以上から，$\partial f(a)=\{S\}$ である。

また，$T\in\mathscr{L}(X,\ Y)$ に対して，

$$f^*(T)=\sup_x\{T(x)-S(x)-b\}=\sup_x\{(T-S)(x)-b\}$$

$$=\begin{cases}\infty & (T\neq S\text{の時})\\ -b & (T=S\text{の時})\end{cases}$$

特に，$f(x)=S(x)$ の共役関数は，1点Sのみからなる集合の指標関数$\delta_{\{S\}}(T)$ となる。

空間$X\times\mathscr{L}(X,\ Y)$ の部分集合Γが，次の条件を満たすとき，Γを$X\times\mathscr{L}(X,\ Y)$ における単調増加集合という。

$$(2.11)\quad (x_1,\ T_1),\ (x_2,\ T_2)\in\Gamma\implies(T_1-T_2)(x_1-x_2)\geqq 0$$

特に，Γが他の単調増加集合の真部分集合とならない時，Γを**極大単調増加集合**という。

また，多意写像

$$f:\quad X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\mathscr{L}(X,\ Y)$$

のグラフが，（極大）単調増加集合の時，fは（極大）**単調増加写像**であるという。

上の (2.11) 式の意味は，任意の $p^*\in P^*$ に対して，

$$(p^*\circ T_1-p^*\circ T_2)(x_1-x_2)\geqq 0$$

となる事である。P^* は再生的であるから，

$$\Gamma\in X\times\mathscr{L}(X,\ Y)$$

が極大単調増加集合になる事と，

$$\{(x,\ p^*\circ T)\mid x\in X,\ T\in\mathscr{L}(X,\ Y)\}$$

が，$X\times X^*$ の極大単調増加集合となる事とは同値になる。(2.9) より，l. s. c. な f に対して，

$$(x,\ T)\in G[\partial f]\Longleftrightarrow \forall p^*\in P^*;\ (x,\ p^*\circ T)\in G[\partial(p^*\circ f)]$$

であり，$G[\partial(p^*\circ f)]$ は極大単調増加集合でであるから，次がいえる。

〔CF—4″〕

凸写像 f が l.s.c. ならば，∂f は極大単調増加写像である。

また，

$$f^*(T)=\sup_x\{T(x)-f(x)\}$$

これより，$\forall p^*\in P^*$ に対して，

$$p^*\circ f^*(T)=\sup_x\{p^*\circ T(x)-p^*\circ f(x)\}=\sup_x\{\langle x,\ p^*\circ T\rangle-(p^*\circ f)(x)\}$$
$$=(p^*\circ f)^*(p^*\circ T)=((p^*\circ f)^*\circ p^*)(T)$$

p^* は連続，$(p^*\circ f)^*$ は l.s.c. だから，$p^*\circ f^*$ は l.s.c. になる。したがって，f^* も l.s.c. となる。f^* が凸である事は明らか。また，劣微分と共役関数の定義より次が成り立つ。

〔CF—5″〕

写像 $f:X\longrightarrow Y$ が l.s.c. な凸関数ならば，その共役関数 f^* も l.s.c. な凸関数であって，次が成り立つ。

(1) $\forall x,\ \forall T;\quad T(x)\leqq f(x)+f^*(T)$

(2) $T(x)=f(x)+f^*(T)\Longleftrightarrow T\in\partial f(x)$

3章　凸多意関数の構成

多意関数

$$f:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\bar{R}$$

の凸性をどのように定義すべきかを考察する。

まず，一般の多意写像に凸性を定義する方法をいくつか紹介し，その長所短所を論ずる事から始める。

〔例1〕(Rockafellar の凸過程；〔6〕)

多意写像 $T:\ R^m\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow R^n$ のグラフ

$$G[T]=\{(y,\ z)\mid z\in T(y)\}$$

が凸錐の時，T を**凸過程** (convex process) と呼ぶ。

ノイマンモデルを凸過程として表す事が出来る。すなわち，R^n の非負象限を R^n_+ で表し，A，B を $s\times n$ 行列とする時，

$$T(y)=\{z \mid \exists x\in R^s_+,\ \ y=xA\in R^n_+,\ \ z=xB\in R^n_+\}$$

とすれば，

$$G[T]=(R^n_+\times R^n_+)\cap\{\sum_{k=1}^{s}x_k(a_k,\ b_k) \mid x_k\geqq 0\}$$

となる。ここで，a_k，b_k はそれぞれA，B の第k行である。なお，$a_k'\geqq 0$，$b_k'\geqq 0$ を適当に選べば，

$$G(T)=\{\sum_{k=1}^{r}x_k'(a_k',\ b_k') \mid x_k'\geqq 0\}$$

と書き表せるから，$G(T)$ は凸錐であって，Tは凸過程になる。$T(y)$ は財yから生産される財zの集合を表している。

凸過程は，次の３つの条件を満たすような多意写像として定義する事も出来る。

$$\begin{cases} T(x+x')\supset T(x)+T(x') \\ T(\lambda x)=\lambda T(x),\ (\lambda>0) \\ 0\in T(0) \end{cases}$$

Robinson は〔4〕において，凸過程がバナッハ空間上の線形作用素と極めて類似した性質を持っている事を導いている。

何はともあれ，凸過程を凸多意写像の１例とする事には異論はないであろう。

〔例２〕（グラフの形状による定義）

Robinson は〔5〕において，多意写像

$$f:\ \ X\twoheadrightarrow Y$$

のグラフ$G[f]$が，$X\times Y$の凸集合となる時，fを凸多意写像と定義した。

多意写像を$X\times Y$の部分集合として定義する方法もあるから，上の定義は自然のように見えるが，次の図２，図３がともに凸写像になってしまう。すなわち，fが凸多意写像ならば$-f$も凸多意写

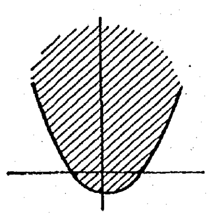

図２

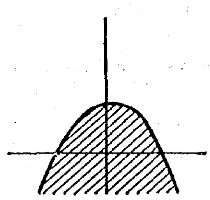

図３

像になるわけで，これは凸性の定義としてはやや広すぎる。

なお，$G[f]$が凸集合になるという事を式で書き表せば次のようになる。

$$\forall a,\ b\in X,\ \forall\lambda\geqq 0,\ \forall\mu\geqq 0,\ \lambda+\mu=1;\ \lambda f(a)+\mu f(b)\subset f(\lambda a+\mu b)$$

Pshenichnyi は〔3〕において，このように定義されたfについて，共役写像を求めている。

〔例3〕（凸錐を用いた定義）

Borweim は〔2〕において，多意写像

$$f:\quad X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$$

の凸性を次のように定義している。

PをYの凸錐とする時，

$$\forall a,\ \forall b\in X,\ \forall\lambda\geqq 0,\ \forall\mu\geqq 0,\ \lambda+\mu=1;\ \lambda f(a)+\mu f(b)\subset f(\lambda a+\mu b)+P$$

が成り立つならば，fは**P-convex** であるという。特に$P=\{0\}$の時は **θ-convex** であるという。

前の〔例2〕は，θ-convex というわけである。

空間Yが$\bar{R}$の時，

$$P=R^{\oplus}=\{x\mid 0\leqq x\}$$

とすれば，通常の一意関数fが凸関数という事は$R^{\oplus}$-convex という事であって，この定義は一意関数の場合を含むという点では大変具合がよいように見えるが，グラフが図3のような関数や，さらに次の図4のようになる多意関数も$R^{\oplus}$-convex となってしまう。

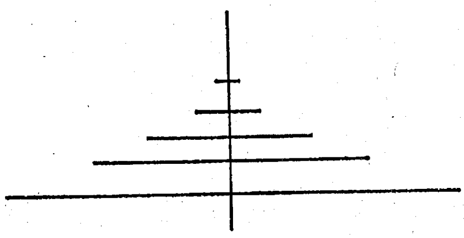

図4

さらに，$f:\quad X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\bar{R}$が，条件

$$\forall x\in X;\ \inf_{x} f(x)=-\infty$$

を満たすならば，fは$R^{\oplus}$-convex となってしまうから，奇妙な例はいくらでも作れる。

このような関数も一緒にして論ずるのでは，好ましい結果が得られそうもない。

この〔例2〕,〔例3〕の凸性の定義が一般的過ぎる原因は，各xに対応する集合$f(x)$に何らの制限を課していない所にあると思われる。凸多意写像と呼ぶからには，$f(x)$に次のような制

限を課しても不自然ではないであろう。

〔1〕　任意の x に対して $f(x)$ は凸集合である。

〔2〕　$f(x)$ は下に有界である。

以上のような考えのもとに，凸多意関数の定義と，その性質を調べる事にする。

§3.1　凸多意関数の定義

まず集合 $\bar{R}$ の部分集合の中で，

$$[a,\ b] \text{ または } [a,\ b),\ -\infty < a \leqq b \leqq +\infty$$

という形の区間全体のなす集合族を $\mathscr{A}$ と書き表す。

集合族 $\mathscr{A}$ については，次が成り立つ。

$$(3.1)\ \begin{cases} 0 \leqq \alpha < +\infty,\ A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \alpha A \in \mathscr{A} \\ A,\ B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A + B \in \mathscr{A} \end{cases}$$

$\mathscr{A}$ に属する集合の中で，$R^{\oplus} = [0,\ +\infty]$ には次のような性質がある。

$$\alpha R^{\oplus} = R^{\oplus}\ (\alpha > 0),\ R^{\oplus} + R^{\oplus} = R^{\oplus}$$

また，0のみからなる集合 $\{0\}$ を区間 $[0,\ 0]$ とみなして θ で表せば，任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して次が成り立つ。

$$A + \theta = A, \quad 0A = \theta$$

集合族 $\mathscr{A}$ の順序を以下のように定める。

$$A \leqq B \Longleftrightarrow A + R^{\oplus} \supset B \Longleftrightarrow \min A \leqq \min B$$

この順序は次を満足する。

$$(3.2)\ \begin{cases} A \leqq A \\ A \leqq B,\ B \leqq C \Longrightarrow A \leqq C \\ A \leqq B \Longrightarrow A + C \leqq B + C \\ \alpha \geqq 0,\ A \leqq B \Longrightarrow \alpha A \leqq \alpha B \end{cases}$$

さて，バナッハ空間 X から $\bar{R}$ への多意関数

$$f : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \bar{R}$$

が次の条件を満たす時，f は凸多意関数であるという。

$$(3.3)\ \begin{cases} \forall x \in X;\quad f(x) \in \mathscr{A} \\ \forall a,\ b \in X,\ \forall \lambda,\ \mu \in R^{\oplus},\ \lambda + \mu = 1;\ f(\lambda a + \mu b) \leqq \lambda f(a) + \mu f(b) \end{cases}$$

$\mathscr{A}$ に属する集合の中で，1点のみからなる区間 $[a,\ a]$ は単に a で表す事にする。多意関数 f に関連する基本的な概念は次のように定められる。

本質的定義域； $\mathrm{dom}\, f=\{x \mid f(x) \neq +\infty\}$

fのグラフ； $G[f]=\{(x, y) \mid y \in f(x)\}$

fのエピグラフ；$E[f]=\{(x, y) \mid y \in f(x)+R^{\oplus}\}$

以上のような凸多意関数には，1章の凸（一意）関数も含まれている。

凸多意関数fに対して，

$f^{\min}(x)=\min\{u \mid u \in f(x)\}$

として凸一意関数$f^{\min}$が定まる。fの性質はこの$f^{\min}$を用いて表現する事が出来る。

(3.4) fが凸多意関数 $\Longleftrightarrow f^{\min}$ が凸関数

以下，第1章で述べた〔CF—1〕～〔CF—5〕がどのような意味で成立するかを調べよう。

まず，$E[f]=E[f^{\min}]$ であるから，〔CF—1〕はそのまま成り立つ。

次に，集合族$\mathscr{A}$に属する集合Aが上に有界であるとは，1つの実数Kのみからなる集合$\{K\}$を適当にとると，$\mathscr{A}$の順序の意味で，

$A \leqq \{K\}$

となること，すなわち，

$A+R^{\oplus} \supset \{K\} \Longleftrightarrow \min A \leqq K$

と考える。このようにすれば，多意関数fが1点aの近傍Uにおいて上に有界とは，

$\forall x \in U, \exists K;\quad f(x) \leqq \{K\}$

であって，これは次のように表せる。

$\forall x \in U, \exists K;\quad f^{\min}(x) \leqq K$

集合Sの各点の近傍で上に有界の時，局所的に上に有界であるという。

同様に，$f^{\min}$ が Sで（局所的に）リプシッツ条件を満たす時，fは Sで（局所的に）リプシッツ条件を満たすという。また，$f^{\min}$ が下半連続の時，fは下半連続であるという。このようにすれば，〔CF—2″〕はそのまま成り立つ。

次に，Xの連続な線形関数x^*と，集合族$\mathscr{A}$に属する集合Aにより，

$x^*+A : X \twoheadrightarrow \bar{R}$

$\qquad x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \{\langle x, x^*\rangle\}+A$

と表される多意関数を**アフィン多意関数**と呼ぶ。特に$A=0$の場合が線形関数であって，線形関数はいずれも一意関数と考える。

凸多意関数fが与えられた時，次の（3.5）を満たすようなアフィン多意関数gを，fの**下界多意関数**という。

(3.5) $\forall x;\quad g(x) \leqq f(x)$

この意味は，

$$g(x)=\langle x,\ x^*\rangle+A$$

とする時，アフィン関数

$$g^{\min}(x)=\langle x,\ x^*\rangle+\min A$$

が，凸関数 $f^{\min}$ の下界関数になっているという事である。特に，

(3.6)　$\exists a;\quad g(a)=f(a)$

が成り立つ時，g を点 a における f の**支持多意関数**という。この (3.6) は，

$$\langle a,\ x^*\rangle+A=f(a)$$

という意味である。

また，凸多意関数 f の**レベル集合**とは，

$$L_\alpha=\{x\mid f(x)\leqq\alpha\}\quad(-\infty<\alpha\leqq+\infty)$$
$$=\{x\mid \alpha\in f(x)+R^{\oplus}\}$$

の事であって，これは $f^{\min}$ のレベル集合にもなっている。

命題 1

凸多意関数 f に関して，次の３つの条件は同値である。

(1)　エピグラフ $E[f]$ が閉集合である。

(2)　f が l. s. c. である。

(3)　任意の $\alpha\in\bar{R}$ に対して，レベル集合 L_α が閉集合である。

このように，多意関数 f の性質を関数 $f^{\min}$ の性質によっていい表してしまえば，次が成り立つのは明らかである。

〔CF—3‴〕

下半連続な多意関数 f が凸多意関数である為の必要十分条件は，$\mathrm{dom}\,f$ の任意の内点において，f の支持多意関数が存在する事である。($(\mathrm{dom}\,f)^i\neq\emptyset$ とする)

§3.2　劣微分と共役関数

一意関数の場合の劣微分の定義式を書き直してみると，

(3.7)　$\forall x\in X;\ \langle x-a,\ x^*\rangle+f(a)\leqq f(x)$

であるが，この左辺を，$g(x)$ とおけば，$g(x)$ はアフィン関数で $g(a)=f(a)$ となる。したがって，劣微分というのは $g(x)$ が支持関数となるような x^* の集合である。この事はそのまま多意関数の場合にも意味を持つ。そして，式 (3.7) は，次の式と同値である。

$$\forall x\in X;\ \langle x-a,\ x^*\rangle+f^{\min}(a)\leqq f^{\min}(x)$$

したがって，(3.7) 式を満たす x^* の集合を劣微分 $\partial f(a)$ とすれば，

(3.8) $\partial f(a)=\partial f^{\min}(a)$

が成り立つ。

$\partial f: \quad X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X^*$

である。(3.8) より，各 x に対して $\partial f(x)$ は L^* の閉凸集合となっており，〔CF—4″〕はそのまま成立する。

次に，**共役関数**について考えよう。

凸多意関数 f の共役関数は $f^{\min}$ の共役関数として定義する。すなわち，

(3.9) $f^*(x^*)=\sup_x\{\langle x, x^*\rangle-f^{\min}(x)\}$

である。

このようにすれば，〔CF—5″〕はそのまま成り立つ。

References

〔1〕 *V. Barbe, Th. Precupanu:* Convexity and optimization in Banach spaces, *Sijthoff and Noordhoff, 1978.*

〔2〕 *J. Borwein: Multivalued convexity and optimization, Math. Prog. 13 (1977) 183～199.*

〔3〕 *B. N. Pshenichnyi: Convex multi-valued mappings and their conjugates, in "Mathematical models in economics" (J. Loś and M. W. Loś eds).*

〔4〕 *S. M. Robinson: Normed convex processes, Trans. Am. Math. Soc. 174. (1972), 127～140.*

〔5〕 *S. M. Robinson: Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Op. Res. 1. (1976). 130～143.*

〔6〕 *R. T. Rockafellar: Convex algebra and dvality in dynamic models of production, in "Mathematical models in economics"*

〔7〕 渡部隆一：多意写像の凸性について（その1）「三田学会雑誌」72巻3号 (1979)

〔8〕 *M. A. Krasnoselskii* ; Positive Solutions of Operator Equations, *P. Noodhofb Ltd., 1964.*

（法学部助教授）