Title	Aumann-Perlesの変分問題およびその拡張について
Sub Title	An extension of the Aumann-Perles' variational problem
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.4 (1979. 8) ,p.422(18)- 429(25)
JaLC DOI	10.14991/001.19790801-0018
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790801-0018

Aumann-Perles の変分問題およびその拡張について

丸　山　　　徹*

序

本稿は，この主題に関する筆者のより詳細な研究〔10〕の要点を簡略に伝えようとするものである。命題の厳密な証明はすべて〔10〕を参照していただくこととし，ここでは議論の筋道だけを示す。

まず $u:[0,1]\times\mathbb{R}^k_+\longrightarrow\mathbb{R}$, $x:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^k_+$ とし，次のような問題を考える。

$$Maximize\int_0^1 u(t,x(t))dt \tag{1}$$

subject to

$$\int_0^1 x_i(t)dt=1 \tag{2}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,k。$$

すなわち(2)を満たす範囲で可測函数 x を動かし，汎函数(1)を最大化する問題を考えるのである。この型の変分問題は多くの経済学的解釈を許し，Aumann-Shapley〔3〕, Kawamata〔6〕, Yaari〔11〕らによって応用されている。

しかし上記の最適化問題に解が存在するや否やという問に答えるのは決して容易ではない。実際，次のような場合においては，最適解の存在しないことが容易に知られる。

Aumann-Perles〔2〕の反例

いずれの場合も簡単化のために $k=1$ とする。

例1　$u(t,x)=tx$。

例2　$0\leqq t\leqq 1/2$ については，

注　*) この研究に直接かかわりを有する諸結果について，筆者は既に，理論・計量経済学会・昭和53年度大会，東京工業大学，京都大学数理解析研究所等において講演する機会を得た。これらの機会に貴重なご意見を恵与された方々に謝意を表したい。またこの一連の研究は慶應義塾学事振興資金の援助を受けている。

$$u(t,x)=\begin{cases} x & \text{for} \quad x \leqq 2 \\ 2 & \text{for} \quad x > 2 \text{。} \end{cases}$$

$1/2 < t \leqq 1$ については，

$$u(t,x)=\begin{cases} 0 & \text{for} \quad x = 0 \\ 2 & \text{for} \quad x > 0 \text{。} \end{cases}$$ ……$u(t,x)$ が x について上半連続でない事例。

例3　$u(t,x)=e^{-x}$。……減少函数の事例。

Aumann-Perles〔2〕はこうした不都合を排除し，上記の問題が最適解を有するための十分条件を確立した。この問題の一般化はArtstein〔1〕, Berliocchi-Lasry〔4〕によって行なわれたが，ここではさらに問題自体を拡張する。解決のアイデアとして，測度の積分分解に関する結果をフルに活用する方向については，とくに Berliocchi-Lasry に負うところが大きい。

I　問 題 の 拡 張

Tをコンパクト距離空間，$\bar{\mu}$はT上の non-atomic な正の Radon 測度とし，$\bar{\mu}(T)=C<+\infty$ とする。そのとき

(i)　$\mu \ll \bar{\mu}$　かつ　(ii)　$\mu(T) \leqq C$

を満たす T 上の正の Radon 測度の全体を $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}$ と書く。明らかに $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}$ のすべての元は non-atomic で，しかも $\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}$ は＊弱位相 (c. f. 丸山〔8〕) についてコンパクトである。

さらにXを局所コンパクト Polish 空間とし，

$u: T \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$g_i: T \times X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$；$i=1,2,\cdots,k$

とする。($\overline{\mathbb{R}}$は拡大された実数系。)

そこで問題は——

$$Maximize \int_T u(t,x(t))d\mu \tag{3}$$

subject to

$$\begin{cases} \int_T g_i(t,x(t))d\mu \leqq \omega_i \quad (4) \\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots\cdots,k \\ \mu \in \mathfrak{M}_{\bar{\mu}} \quad (5) \\ x: T \longrightarrow X \quad \text{は可測} \quad (6) \end{cases}$$

ここで　$\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots\cdots,\omega_k)$ は所与のベクトルであり，最適化の対象となる変数はμとxとで

ある。

以下，この問題の解の存在条件を見出す準備を積み重ねる。

Aumann-Perles の変分問題の経済学的解釈としてはいろいろなものが考えられるが，単純な例を二，三あげておこう。

(1)経済に存在する一定量の資源（$\mathbb{R}_+^l$の元）を，主体の空間［0，1］に配分する方法は函数x：［0，1］$\longrightarrow\mathbb{R}_+^l$として表わすことができよう。配分$x(t)$に対応して各主体$t$の得る効用$u(t, x(t))$の和（積分）を最大にするような配分を求めよ。

(2)次に［0，1］をある産業に属する企業の集合とする。資源配分x：［0，1］$\longrightarrow\mathbb{R}_+^l$に応じて各企業の得る何らかの gain（たとえば利潤）$u(t, x(t))$の和（積分）を最大にするような配分を求めよ。

(3)における産業の規模，分布，荷重を，配分の仕方とともに最適化の変数とすれば，拡張された Aumann-Perles 問題のひとつの経済学的解釈が得られる。(c. f. Kawamata［6］)

Ⅱ 測度の積分分解

$T\times X$上の Radon 測度γが

$$\gamma=\int_T \delta_t\otimes\nu[t]d\mu \tag{7}$$

と表現されるものとしよう。ここでδ_tは$t\in T$に質量1を置く Dirac 測度，μはT上の Radon 測度，そしてνはTから，X上のすべての確率 Radon測度の作る空間への＊弱-可測写像である。(7)のような表現が可能なとき，γはμ-**積分分解**（μ-disintegration）を有するという。

μ-積分分解を有する Radon測度の全体を$\Delta(\mu)$，さらに

$$\Delta(\mathcal{M}_{\bar{\mu}})=\bigcup_{\mu\in\mathcal{M}_{\bar{\mu}}}\Delta(\mu)$$

とおく。

積分分解に関する二，三の結果を，本稿の目的に必要な限りで述べておこう。**以下本節ではT，Xはともにコンパクトであることを仮定する。**

［A］ Γ：$T\twoheadrightarrow X$をコンパクト値・可測多価写像とする。$T\times X$ 上の Radon 測度γが

$$\begin{cases}\gamma=\int_T \delta_t\otimes\nu[t]d\mu \\ \operatorname{supp}\nu[t]\subset\Gamma(t) \text{ a. e.}\end{cases}$$

の形式に積分分解されるためには，$T\times X$ 上のすべての実数値連続函数 f について

$$\int_{T\times X} f(t,x)d\gamma \leqq \int_T \sup_{x\in\Gamma(t)} f(t,x)d\mu$$

の成り立つことが必要十分である。 (Castaing〔5〕)

〔**B**〕 積分分解を有する Radon 測度の列

$$\gamma_n=\int_T \delta_t\otimes\nu_n[t]d\mu_n\ ;\ n=1,2,\cdots\cdots$$

および

$$\gamma=\int_T \delta_t\otimes\nu[t]d\mu$$

を考える。

(i) $w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu_n=\mu$ (8)

各点収束：$w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \nu_n[t]=\nu[t]$ for each $t\in T$ (9)

連続性：$w^*\text{-}\lim_{k\to\infty} \nu_n[t_k]=\nu_n[t]$ if $t_k\longrightarrow t$ (10)

for all n

ならば

$w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} \gamma_n=\gamma$。 (11)

(ii) (11)が成り立てば(8)が成り立つ。しかし(9)，(10)は必ずしも成り立たない。 (Maruyama〔9〕)

〔C〕 $\Delta(\mathcal{M}_{\bar{\mu}})$ は＊弱－コンパクトでしかも凸である。

この結果は多価写像 $\mu\longmapsto\!\!\!\to\Delta(\mu)$ が $\mathcal{M}_{\bar{\mu}}$ 上でコンパクト値・優半連続であることと，$\mathcal{M}_{\bar{\mu}}$ のコンパクト性からただちに得られる。

Ⅲ　正規被積分函数

函数 $g:T\times X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ に対して，次の三条件を満足する函数 $h:T\times X\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}_+$ が存在するとき，g は**正の正規被積分函数** (positive normal integrand，以下PNIと略す）と呼ばれる。

(i) h は Borel－可測。

(ii) 殆どすべての $t\in T$ について，$h(t,x)$ は x の下半連続函数。

(iii) $g(t,x)=h(t,x)$ a. e. $(\bar{\mu})$

このとき次の命題が成り立つ。

［D］ T，Xをコンパクト，gを PNI とすれば，写像

$$\gamma \longmapsto \int_{T\times X} g\, d\gamma$$

は $\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}})$ 上で下半連続である。

次に $\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}})$ に属する元のうち

$$\int_{T\times X} g_i(t, x)d\gamma \leqq \omega_i\text{；}\quad i=1, 2, \cdots\cdots, k$$

を満たすものの全体を $\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}};\ g_1,\ g_2, \cdots\cdots, g_k)$ と書けば，［D］により，TとXがコンパクトならば$\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}};\ g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k)$ も＊弱－コンパクトである。

この結果をXが局所コンパクトの場合に拡張しよう。$\tilde{X}=X\cup\{\infty\}$を$X$のone-point compactification とする。

［E］ Tをコンパクト，Xを局所コンパクトとし，$x \longrightarrow \infty$のとき

$$g(t, x)=\sum_{i=1}^{k} g_i(t, x) \longrightarrow +\infty \quad (\text{a. e. } \bar{\mu})$$

とすれば，$\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}};\ g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k)$ は＊弱-コンパクトかつ凸である。

Ⅳ 最 適 解 の 存 在

［F］ $u: T\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ について次のような仮定をおく。

(i) uは Borel -可測。

(ii) $\bar{\mu}$ に関し，殆んどすべての $t\in T$について，$u(t, x)$ は xの上半連続函数。

(iii) $u^+(t, x)=\mathrm{Max}\{u(t, x), 0\}$ とおく。任意の $\epsilon>0$ に対して，適当に$b_\epsilon \in L^\infty(\bar{\mu})$ を選び，

$$u^+(t, x)\geqq b_\epsilon(t) \Longrightarrow u^+(t, x)\leqq \epsilon g(t, x)$$

とすることができる。

このとき，写像

$$\gamma \longmapsto \int_{T\times X} u\, d\gamma$$

は$\Delta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}};\ g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k)$ 上で上半連続である。

［E］および［F］により，問題

$$\left.\begin{array}{ll} Maximize & \int_{T\times X} u\,d\gamma \\ on & \varDelta(\mathfrak{M}_{\bar{\mu}}\,;g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k) \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

は最適解 γ^* を有する。それを

$$\gamma^* = \int_T \delta_t \otimes \nu^*[\,t\,]d\mu^*$$

としよう。すると γ^* は次の問題 (II) の解にもなっていることは自明。

$$\left.\begin{array}{ll} Maximize & \int_{T\times X} u\,d\gamma \\ on & \varDelta(\mu^*\,;g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k) \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

ここで少々凸解析からの準備を行なう。

［G］ $\mathfrak{X}$を Hausdorff，局所凸線形位相空間，Kをそのコンパクト・凸部分集合，$\varphi_i:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ $(i=1,\ 2,\cdots\cdots,k)$ を affine 函数とする。このとき，集合

$$H\equiv\bigcap_{i=1}^{k}\{x\in K\,|\,\varphi_i(x)\leqq 0\}$$

の端点は，Kの端点のうち高々$k+1$個の凸結合として表わされる。

この定理は Carathéodory の定理から導かれるが，証明にはひと工夫を要する。

また次の定理は Ljapunov の凸性定理（Lindenstrauss［7］）から容易に得られる系である。

［H］ μを可測空間 $(T,\ \mathscr{E})$ 上の non-atomic な有限測度とする。

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\int_T f_{ij}(t)d\mu\,;\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

$$0\leqq\lambda_j\leqq 1,\qquad \sum_{j=1}^{p}\lambda_j=1$$

に対してTの分割$T_1,\ T_2,\ \cdots\cdots,\ T_p$を適当に選び，

$$\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\int_T f_{ij}(t)d\mu=\sum_{j=1}^{p}\int_{T_j}f_{ij}(t)d\mu\,;\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

とすることができる。

一般性を失うことなく，γ^*は$\varDelta(\mu^*\,;g_1,\ g_2,\ \cdots\cdots,\ g_k)$ の端点としてよい。しかるに$\varDelta(\mu^*)$ の端点は

$$\int_T\delta_t\otimes\delta_{x(t)}\,d\mu^*$$

$$x : T \longrightarrow X \text{は可測}$$

の形式を有するから，［G］により

$$\gamma^* = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \int_T \delta_t \otimes \delta_{x_j(t)} \, d\mu^*$$

と表わすことができる。ここで$x_j : T \longrightarrow X$ （$j = 1, 2, \cdots\cdots, k+1$）はもちろん可測写像である。最後に［H］を適用して

$$\int_{T \times X} u(t, x) d\gamma^* = \sum_{j=1}^{k+1} \int_{T_j} u(t, x_j(t)) d\mu^*,$$

$$\int_{T \times X} g_i(t, x) d\gamma^* = \sum_{j=1}^{k+1} \int_{T_j} g_i(t, x_j(t)) \, d\mu^* ;$$

$$i = 1, \ 2, \ \cdots\cdots, \ k$$

$$T = \bigcup_{j=1}^{k+1} T_j, \qquad T_j \cap T_{j'} = \emptyset \text{ if } j \neq j'。$$

とすることができる。そこで

$$x^*(t) = \sum_{j=1}^{k+1} x_j(t) \chi_{T_j}(t) \qquad (\chi_{T_j} \text{は} T_j \text{の特性函数})$$

とおけば，(μ^*, x^*) が問題(3)〜(6)の解である。［G］,［H］による最適解の構成についてはBerliocchi-Lasry〔4〕に負う。

結論を定理としてまとめておこう。

定理 (a) Tはコンパクト距離空間，Xは局所コンパクト Polish 空間とする。

(b) $u : T \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ は［F］の仮定(i)，(ii)，(iii)を満たすものとする。

(c) $g_i : T \times X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ （$i = 1, \ 2, \ \cdots\cdots, \ k$）は PNI で，しかも$x \to \infty$（無限遠点）のとき

$$g(t, \ x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(t, x) \to +\infty \quad (\text{a. e. } \bar{\mu})$$

とする。

このとき問題(3)〜(6)は解を有する。

参考文献

〔1〕 Artstein, Z. "On a Variational Problem" *J. Math. Anal. Appl.* **45** (1974) 404-415.

〔2〕 Aumann, R. J. and M. Perles "A Variational Problem Arising in Economics" *J. Math. Anal. Appl.* **11** (1965) 488-503.

〔3〕 Aumann, R. J. and L. S. Shapley: *Values of Non-atomic Games* (Princeton University Press, N. J.) 1974.

〔4〕 Berliocchi, H. and J-M. Lasry "Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations" *Bull. soc. math. France* **101** (1973) 129-184.

〔5〕 Castaing, C. "Application d'un théorème de compacité à un résultat de désintégration des mesures" *C. R. Acad. Sc. Paris* **273** (1971) 1056-1059.

〔6〕 Kawamata, K. "Marginal Contribution of a Firm and Optimal Entry" mimeographed 1978.

〔7〕 Lindenstrauss, J. A. "A Short Proof of Liapunoff's Convexity Theorem" *J. Math.* Mech. **15** (1966) 971-972.

〔8〕 丸山徹「確率測度の＊弱収束」『三田学会雑誌』**70** (1977) 633-646; **71** (1978) 45-56.

〔9〕 Maruyama, T. "A Note on the Disintegration of Measures: A Convergence Theorem" to appear.

〔10〕 ———————"An Extension of the Aumann-Perles' Variational Problem" mimeographed 1979.

〔11〕 Yaari, M. E. "On the Existence of on Optimal Plan in Continuous-time Allocation Process" *Econometrica* **32** (1964) 576-590.

(経済学部助手)