Title	多価写像の連続性
Sub Title	Continuity of multi-valued mappings
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.3 (1979. 6) ,p.370(98)- 384(112)
JaLC DOI	10.14991/001.19790601-0098
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790601-0098

多価写像の連続性

丸山　徹

定義域の各点に対して値域のある集合を対応せしめる，所謂多価写像の研究は Kuratowski や Michael らの重要な先駆があるにもかかわらず，それほど数学者が力を尽くしてきた分野とは言い難い。むしろ多価写像の理論は主として数理経済学その他の応用方面に生き生きとした活躍舞台を求めてきた感がある。しかし近年，函数解析学（とりわけ非線形解析，発展方程式論）や制御工学等の分野においても，多価写像をまともに取り扱う必要性が生じ，今後もますますその内容が拡大深化してゆくものと思われる。

本稿では多価写像の連続性概念，ならびに最適化理論において重要な役割を果す Berge の最大値定理を中心に理論の大略を述べる。

Xの各点xに対して，Yのある非空部分集合$\varphi(x)$を対応させる写像を**多価写像** (multi-valued mapping) あるいは**対応** (correspondence) といい，これを$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$と書く。

われわれはまず，このような多価写像になんらかの連続性を定義することから始めねばならない。

そのためにはさまざまな代替案がありうる。たとえばまずYのすべてのコンパクト集合から成る族 $\mathfrak{Comp}\,Y$ の上に Hausdorff の距離（丸山〔17〕）を定めれば，これはひとつの距離空間となり，Yの任意のコンパクト集合は空間 $\mathfrak{Comp}\,Y$ の一点とみなすことができる。そこで多価写像$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$の値がすべて$Y$のコンパクト集合であるような場合（このようなとき，φは**コンパクト値** compact-valued な多価写像という），φを多価写像としてではなく，Xから $\mathfrak{Comp}\,Y$ への一価写像

$$\varphi: X \longrightarrow \mathfrak{Comp}\,Y$$

とみなすことが可能であろう。こうすればφの連続性は全く普通の仕方で定義することができるのである。

しかし実際問題を処理するうえで，多価写像を一価写像に還元することなく，いわばXとYの位相だけを用いて直接に取り扱う方が便利な場合も多いのである。

1. 連続性の概念*

A. 優半連続性

定義　$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$が点$x_0 \in X$において**優半連続** (upper hemi-continuous) であるとは，集合$\varphi(x_0)$の任意の近傍Uに対して，x_0の適当

*）この節については主として Berge〔1〕，Hildenbrand〔12〕を参考にし，より一般的に書いた。ほかに Hukuhara〔14〕，Kuratowski〔15〕など。

な近傍Vを選び，

$$\varphi(V)\equiv\bigcup_{x\in V}\varphi(x)\subset U$$

となしうることをいう。またφがすべての$x_0\in X$において優半連続であるとき，φは単に**優半連続**であるという。

注意：φが普通の一価写像の場合には，優半連続性の定義は連続性の定義と合致する。

次に優半連続性をいくとおりかの方法で特徴づけてみたいのであるが，その前に二つほど便利な定義を与えておこう。

定義　MをYの部分集合とするとき，

$$\varphi^{-s}(M)\equiv\{x\in X\mid\varphi(x)\subset M\}$$

$$\varphi^{-w}(M)\equiv\{x\in X\mid\varphi(x)\cap M\neq\emptyset\}$$

と書き，$\varphi^{-s}(M)$ をMの**強逆像** (strong inverse image)，$\varphi^{-w}(M)$ をMの**弱逆像** (weak inverse image) と呼ぶ。

すると定義から，Yの任意の部分集合Mについて，

$$X\setminus\varphi^{-w}(M)=\varphi^{-s}(Y\setminus M)$$

の成り立つことが容易に知られる。

定理1　多価写像$\varphi:X\twoheadrightarrow Y$に対して，次の三命題は互いに同値である。

(i)　φは優半連続である。

(ii)　Yの任意の開集合Uに対して，$\varphi^{-s}(U)$はXの開集合である。

(iii)　Yの任意の閉集合Fに対して，$\varphi^{-w}(F)$はXの閉集合である。

証明）強・弱の逆像の関係について述べた注意から(ii)$\Longleftrightarrow$(iii)はただちに明らかであるから，(i)$\Longleftrightarrow$(ii)だけを示せば足りる。

(i)$\Longrightarrow$(ii)：　まず(i)を仮定する。Yの開集合Uに対して$\varphi^{-s}(U)$ がXの開集合であることを示すためには，$\varphi^{-s}(U)$ の任意の元xが$\varphi^{-s}(U)$ の内点であることを確かめればよい。しかし，$\varphi(x)\subset U$ ゆえUは $\varphi(x)$ の近傍である。またφは優半連続であるから，xの適当な近傍Vを選んで

$$\varphi(V)\subset U$$

$$\therefore\quad V\subset\varphi^{-s}(U)$$

とすることができる。したがってxは$\varphi^{-s}(U)$ の内点である。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：　xをXの任意の元，Uを$\varphi(x)$ の開近傍とする。(ii)によれば$\varphi^{-s}(U)$ はXの開集合であるから，$V=\varphi^{-s}(U)$ とおけば，Vはxの近傍であり，しかも$\varphi(V)\subset U$。よってφはxにおいて優半連続である。　（証了）

定理2　$\varphi:X\twoheadrightarrow Y$をコンパクト値の多価写像とする。このとき，$X$の任意のコンパクト集合$K$に対して，$\varphi(K)$ はYのコンパクト集合となる。

証明）$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$を$\varphi(K)$ の開被覆とする。仮定により，各$x\in K$について$\varphi(x)$ はコンパクトであるから，Λの有限部分集合Λ_xを適当に選んで

$$\varphi(x)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda_x}U_\lambda\equiv U(x)$$

とすることができる。$U(x)$ は開集合ゆえ，定理1により，$\varphi^{-s}(U(x))$ はxの開近傍とならねばならない。したがって$\{\varphi^{-s}(U(x))\}_{x\in K}$は$K$の開被覆となるから，$K$のコンパクト性により，

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \varphi^{-s}(U(x_i))$$

なる有限個の点x_1, x_2, ……, x_nが存在する。すると

$$\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{x_i};\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

は$\varphi(K)$に対する$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$の有限部分被覆となる。（証明）

次の定理は有向点族による，優半連続性の特徴づけである。一価写像の場合と同様，Xが第一可算公理を満たす場合には，有向点族のかわりに点列を考えれば十分なことにも注意していただきたい。

定理3　YをHausdorff空間とし，また多価写像$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$がコンパクト値ならば，次の二命題は互いに同値である。

(i)　φは点x_0において優半連続である。

(ii)　$\{x_\alpha\}$をx_0に収束するXの任意の有向点族とし，また各$\varphi(x_\alpha)$から任意に一点y_αを抽出して得られるYの有向点族を$\{y_\alpha\}$とする。このとき，その極限が$\varphi(x_0)$に属する$\{y_\alpha\}$の収束部分有向点族が存在する。

証明）(i)$\Longrightarrow$(ii)：　まずφが点$x_0 \in X$において優半連続であるとしよう。有向点族$\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$が$x_0$に収束するものとすれば，集合$K \equiv \{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{x_0\}$は$X$のコンパクト集合である。ゆえに定理2から，$\varphi(K)$はコンパクトである。$\{y_\alpha\}$は$\varphi(K)$の有向点族ゆえ，収束部分有向点族$\{y_{\alpha_\beta}\}$を有する（c. f. Willard〔24〕Theorem 17.4）。その極限をy_0としよう。いま仮に$y_0 \notin \varphi(x_0)$と仮定すれば，YがHausdorffであることと，φがコンパクト値であることから，$y_0 \notin \overline{U}$なる$\varphi(x_0)$の閉近傍$\overline{U}$が存在する。ところがφは点x_0で優半連続で，しかも$x_\alpha \longrightarrow x_0$であるから，添数$\alpha_0$を適当に選んで

$$\varphi(x_\alpha) \subset \overline{U} \text{ for all } \alpha \succ \alpha_0$$

とすることができる。したがって

$$y_\alpha \in \overline{U} \text{ for all } \alpha \succ \alpha_0$$

$\overline{U}$は閉であるから，$y_{\alpha_\beta} \longrightarrow y_0 \in \overline{U}$となり矛盾。よって$y_0 \in \varphi(x_0)$。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：　次に(ii)を仮定し，φが点x_0において優半連続ではないとしてみよう。このとき定義により，$\varphi(x_0)$の適当なる近傍Uをとれば，x_0のいかなる近傍Vについても

$$\varphi(x_V) \not\subset U$$

なる点x_Vが存在しなければならない。x_0の完全近傍系$\mathscr{N}_{x_0}$は"$V_1 \prec V_2 \Longleftrightarrow V_1 \supset V_2$"として半順序$\prec$を与えることによって有向集合となるから，$\{x_V\}_{V \in \mathscr{N}_{x_0}}$は$X$の有向点族で，$x_V \longrightarrow x_0$である。いま任意に

$$y_V \in \varphi(x_V) \setminus U \qquad (1)$$

を選ぶと，仮定により，有向点族$\{y_V\}$は収束部分有向点族$\{y_{V'}\}$を有し，$y_{V'} \longrightarrow y_0 \in \varphi(x_0)$とすることができる。しかしこれは（1）に矛盾であろう。（証了）

多価写像$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$のグラフ$G(\varphi)$を

$$G(\varphi) = \{(x,\ y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$$

と定義すれば，定理3から次の命題がただちに得られる。

系1　YをHausdorff空間とし，多価写像$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$はコンパクト値で優半連続とすれば，$\varphi$のグラフ$G(\varphi)$は直積位相空間$X \times Y$の閉部分集合である。

注意 系1の逆は必ずしも成り立たない。

反例：一価函数$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{if } x\neq 0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

と定義すれば，この函数のグラフ$G(f)$は明らかに$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$の閉集合である。しかしこの函数は点$x=0$で不連続であるから，$x=0$において優半連続ではないのである。

ただし，Yのコンパクト性を仮定する場合には，このような反例は取り除かれて，逆命題も成り立つ。すなわち——

系2 YがコンパクトなHausdorff空間であるとき，コンパクト値多価写像$\varphi:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$について次の二命題は互いに同値である。

(i) φは優半連続である。

(ii) φのグラフ$G(\varphi)$は$X\times Y$の閉集合である。

証明は殆ど自明であるから省略しよう。

B. 劣半連続性

定義 $\varphi:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$が点$x_0\in X$において**劣半連続** (lower hemi-continuous) であるとは，$\varphi(x_0)\cap U\neq\emptyset$なる$Y$の任意の開集合$U$に対して，$x_0$の適当な近傍$V$を選び，

$\varphi(x)\cap U\neq\emptyset$ for all $x\in V$

となしうることをいう。またφがすべてのx_0において劣半連続であるとき，φは単に**劣半連続**であるという。

次の定理は劣半連続性の特徴づけであるが，証明は定理1と同様定義に戻って考えれば甚だ容易であるから読者にお任せしよう。

定理4 多価写像$\varphi:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$に対して，次の三命題は互いに同値である。

(i) φは劣半連続である。

(ii) Yの任意の閉集合Fに対して，$\varphi^{-s}(F)$はXの閉集合である。

(iii) Yの任意の開集合Uに対して，$\varphi^{-w}(U)$はXの開集合である。

定理5 多価写像$\varphi:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$に対して，次の二命題は互いに同値である。

(i) φは点$x_0\in X$において劣半連続である。

(ii) $\{x_\alpha\}$を点x_0に収束するXの任意の有向点族とし，y_0を$\varphi(x_0)$の任意の元とする。このとき各αについて$y_\alpha\in\varphi(x_\alpha)$を適当に選んで，$\{y_\alpha\}$を$y_0$に収束させることができる。

証明）(i)$\Longrightarrow$(ii)：まずφが点x_0において劣半連続であるとしよう。いま仮に(ii)が成り立たないとすると，次のような条件を満たす有向点族$x_\alpha\to x_0$，$y_0\in\varphi(x_0)$およびこのy_0の近傍Uが存在する。

“すべての添数α_0に対して，適当に$\alpha\succ\alpha_0$を選ぶと$\varphi(x_\alpha)\cap U=\emptyset$”。

しかしこれは，$x_\alpha\to x_0$と相俟って，φの劣半連続性に矛盾であろう。

(ii)$\Longrightarrow$(i)：逆にφが点x_0において劣半連続ではないとする。すると，$U\cap\varphi(x_0)\neq\emptyset$なる適当な開集合$U$を選び，$x_0$のすべての近傍$V$の中に

$$\varphi(x_V)\cap U=\emptyset \qquad (1)$$

となる点$x_V\in V$を存在せしめることができる。このようにして構成された有向点族$\{x_V\mid V\in\mathscr{N}_{x_0}\}$は$x_0$に収束するが，(1)により，$y_V\in\varphi(x_V)$をどのようにとり出しても，$\{y_V\}$を$y_0$

に収束させることができない。それは(ii)に反する。　(証了)

ここでもまた，Xが第一可算公理を満たす場合には，有向点族のかわりに点列を考えれば十分であることを確認せよ。

C. 連続性

定義　多価写像$\varphi: X \twoheadrightarrow Y$が点$x_0 \in X$において優半連続かつ劣半連続であるとき，$\varphi$は**点$x_0$において連続**であるという。$\varphi$がすべての$x_0 \in X$において連続ならば，$\varphi$は単に**連続**であるという。

Yを距離空間とし，$\varphi: X \twoheadrightarrow Y$をコンパクト値の多価写像とする。$Y$のコンパクト部分集合の全体に Hausdorff の距離hを定めて得られる距離空間を（$\mathfrak{Comp}\ Y$, h）とするとき，φは一価写像

$$\varphi: X \longrightarrow \mathfrak{Comp}\,Y \qquad (1)$$

とみなしうることは既に述べた。φを多価写像とみなすか，（1）のような一価写像とみなすかは，扱う問題によって使いわけねばならないけれども，ふたつの考え方は互いに整合的であるのが望ましかろう。この問題は多価写像の連続性の定義と，丸山〔17〕定理1によってただちに解決され，次の定理が得られる*。

定理6　Yを距離空間とし，$\varphi: X \twoheadrightarrow Y$をコンパクト値の多価写像とするとき，次の二命題は互いに同値である。

(i)　$\varphi: X \twoheadrightarrow Y$は連続である。

(ii)　φは一価写像$\varphi: X \to \mathfrak{Comp}\,Y$として連続である。

2. いろいろな演算の連続性

〔1〕　k個の多価写像$\varphi_i: X \twoheadrightarrow Y_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, k$) を考え，$\varphi: X \twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{k} Y_i$を

$$\varphi: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

と定義する。

すべてのφ_iが点x_0において優半連続 (resp. 劣半連続，連続) ならば，φも点x_0において優半連続 (resp. 劣半連続，連続) である。

証明）優半連続性についてだけ示すこととし，劣半連続性や連続性については読者の演習とする。

Uを$\varphi(x) \subset U$なる$\prod_{i=1}^{k} Y_i$の開集合とする。一般性を失うことなく，Uは初等集合，すなわち

$$\begin{cases} U = \prod_{i=1}^{k} U_i \\ U_i \ (i=1, 2, \cdots\cdots, k) \text{ は } Y_i \text{ の開集合} \end{cases}$$

としてよい。各φ_iはx_0点において優半連続であるから，x_0の近傍V_iを十分に小さくとり

$$x \in V_i \Longrightarrow \varphi_i(x) \subset U_i$$

とすることができる。そこで

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$$

とおくならば，Vはxの近傍で，しかも

$$x \in V \Longrightarrow \varphi_i(x) \subset U_i \quad \text{for all } i$$
$$\Longrightarrow \varphi_i(x) \subset U$$

(証了)

〔2〕　k個の多価写像$\varphi_i: X \twoheadrightarrow \mathbb{R}^l$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, k$) を考え，$\varphi: X \twoheadrightarrow \mathbb{R}^l$を

$$\varphi: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)$$

と定義する。

すべてのφ_iが点x_0において優半連続 (resp.

*）X，Yを距離空間とするときの一層直接的な証明がBerge〔1〕pp. 126-127に述べられている。

劣半連続，連続）ならば，φ も点 x_0 において優半連続（resp. 劣半連続，連続）である。

証明）再び優半連続性についてだけ示しておこう。$U\subset Y$ を $\varphi(x)\subset U$ なる開集合とする。いま $\xi\in\varphi(x)$ とすれば，φ の定義により

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\cdots\cdots+\xi_k;$$
$$\xi_i\in\varphi_i(x)\quad \text{for all } i$$

となるように ξ_i を選ぶことができる。またベクトル演算の連続性から，各 ξ_i の十分に小さな開近傍 U_i をとれば，

$$U_1+U_2+\cdots\cdots+U_k\subset U$$

とすることができる。φ_i の優半連続性により，x_0 の十分に小さな近傍 V_i をとれば，

$$\varphi_i(V_i)\subset U_i\quad \text{for all } i$$

とすることができる。そこで

$$V=\bigcap_{i=1}^{k}V_i$$

とおくならば，

$$x\in V\Longrightarrow\varphi_i(x)\subset U_i \text{ for all } i$$
$$\Longrightarrow\varphi(x)\subset U_1+U_2+\cdots\cdots+U_k\subset U$$

（証了）

ついでに，X が距離空間で，$\varphi_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ がすべてコンパクト値とした場合，定理3を用いていかに証明が進行するかを示し，参考に供したい。

$\mathbb{R}^l$ における有限個のコンパクト集合のベクトル和はコンパクトであるから，φ もコンパクト値であることはただちに知られる。

さて $\{x_n\}$ を x_0 に収束する X の点列としよう。また各 n に対して任意に

$$y_n\in\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x_n)$$

を選ぶと，

$$y_n=\sum_{i=1}^{k}y_n{}^i;\ y_n{}^i\in\varphi_i(x_n)$$

と書くことができる。定理3により，各 i について点列 $\{y_n{}^i\}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ は $\varphi_i(x_0)$ のある点に収束する部分列を有する。したがって $\{y_n\}$ の適当な部分列 $\{y_{n_m}\}$ を選び，

$$y^i_{n_m}\longrightarrow y^i\in\varphi_i(x_0)\ \ (\text{as } m\to\infty)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$$

とすることができる。ゆえに

$$y_{n_m}\longrightarrow\sum_{i=1}^{k}y^i\in\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x_0)\ \ (\text{as } m\to\infty)$$

以上

〔3〕 多価写像 $\varphi: X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{R}^l$ を考え，あらたに $\mathrm{co}\,\varphi: X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{R}^l$ を

$$\mathrm{co}\varphi: x\longmapsto\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{co}\,\varphi(x)$$

と定義する。

φ が点 $x_0\in X$ において優半連続（resp. 劣半連続，連続）ならば，$\mathrm{co}\,\varphi$ も点 x_0 において優半連続（resp. 劣半連続，連続）である。

証明）まず φ がコンパクト値とする。$U\subset\mathbb{R}^l$ を $\mathrm{co}\,\varphi(x_0)\subset U$ なる開集合とするすると，$\mathbb{R}^l$ の原点0を中心とする開球 B を適当に選び

$$\mathrm{co}\,\varphi(x_0)+B\subset U$$

とすることができる。$\mathrm{co}\,\varphi(x_0)+B$ は明らかに凸集合である（丸山〔17〕定理5）。φ は点 x_0 において優半連続であるから，x_0 の近傍 V を適用に選び

$$x\in V\Longrightarrow\varphi(x)\subset\varphi(x_0)+B$$

とすることができる。ところで

$$\varphi(x^0)+B\subset\mathrm{co}\,\varphi(x_0)+B$$

であるから

$$x\in V\Longrightarrow\varphi(x)\subset\mathrm{co}\,\varphi(x_0)+B$$

となり，さらに $\mathrm{co}\,\varphi(x_0)+B$ の凸性から

$$x\in V\Longrightarrow\mathrm{co}\varphi(x)\subset\mathrm{co}\varphi(x_0)+B\subset U.$$ 一般の場合については〔6〕を用いて各自試みよ。（証了）

ここでもまた，X が距離空間でしかも φ がコンパクト値の場合について，定理3を用いる証明を与えておこう。

コンパクト集合の凸包はコンパクトである（丸山

〔17〕定理7）から，φがコンパクト値であることは明らか。$\{x_n\}$を点x_0に収束するXの点列とし，また各nについて任意に

$$y_n \in \mathrm{co}\ \varphi(x_n)\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

を選ぶことにすれば，Carathéodory の定理（丸山〔17〕定理8）により，y_nは$\varphi(x_n)$に属する$l+1$個の元の凸結合として表わすことができる。すなわち*

$$y_n=\sum_{i=0}^{l}\alpha_n{}^i z_n{}^i$$

ここで

$$z_n{}^i \in \varphi(x_n)$$

$$(\alpha_n{}^0,\ \alpha_n{}^1 \cdots\cdots,\ \alpha_n{}^l) \in \Delta_l$$

各iについて，$\{\alpha_n{}^i\}$，$\{z_n{}^i\}$の適当な部分列$\{\alpha_{n_m}{}^i\}$ $\{z_{n_m}{}^i\}$を選び，$m\to\infty$のとき

$$z_{n_m}{}^i \longrightarrow z_0{}^i \in \varphi(x_0)$$

$$(\alpha_{n_m}{}^0,\ \alpha_{n_m}{}^1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_{n_m}{}^l)$$

$$\longrightarrow (\alpha_0{}^0,\ \alpha_0{}^1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_0{}^l) \in \Delta_l$$

とすることができる（定理3による)。ゆえに

$$y_{n_m} \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \alpha_0{}^i z_0{}^i \in \mathrm{co}\ \varphi(x_0)\ \ (\mathrm{as}\ m\to\infty)$$

以上

〔4-1〕 Λを任意の添数集合とし，φ_λ：$X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y\ (\lambda \in \Lambda)$をコンパクト値，優半連続なる多価写像で，すべての$x \in X$について$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x) \neq \emptyset$とする。このとき

$$\varphi : x \longmapsto\!\!\!\!\rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(x)$$

を以て定義される多価写像$\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$はコンパクト値かつ優半連続である。

定義　多価写像$\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$に対して，$(x_0, y_0) \notin G(\varphi)$ のとき，x_0の近傍Vとy_0の近傍Uを適当に選び

$$x \in V \Longrightarrow \varphi(x) \cap U = \emptyset$$

とすることのできるとき，φは点x_0において閉じているという。

φが点x_0において閉じているならば，$\varphi(x_0)$は明らかに閉集合である。(逆は真ならず！)

φがすべての点において閉じていることは，$G(\varphi)$が$X \times Y$の閉集合であることに同値である。

補題1　すべての$x \in X$について$\varphi_1(x) \cap \varphi_2(x) \neq \emptyset$なるふたつの多価写像$\varphi_1$，$\varphi_2$：$X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$を考える。まず$\varphi_1$は$x_0 \in X$において閉じており，また，$\varphi_2$は$x_0$において優半連続で，しかも$\varphi_2(x_0)$はコンパクトとする。このとき

$$\varphi : x \longmapsto\!\!\!\!\rightarrow \varphi_1(x) \cap \varphi_2(x)$$

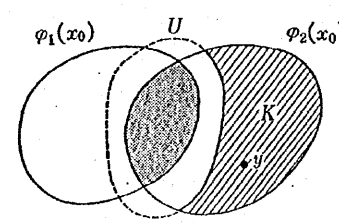
を以て定義される多価写像$\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$は$x_0$においてコンパクト値かつ優半連続である。

証明**）$\varphi_1(x_0) \cap \varphi_2(x_0) \subset U$なる開集合$U$を考え，$\varphi(V) \subset U$を満たす$x_0$の近傍$V$の存在することを示そう。

まず$\varphi_2(x_0) \subset U$である場合は，φ_2の優半連続性から，ただちに所望の帰結を得る。そこで

$$K \equiv \varphi_2(x_0) \cap U^c \neq \emptyset$$

なる場合を考えてみよう。$\varphi_2(x_0)$はコンパクトであるから，Kはコンパクトである。



<図1>

$y \in K$を任意にとる。するとφ_1がx_0において

---

*）ここで

$$\Delta_l \equiv \{(\alpha^0,\ \alpha^1,\ \cdots\cdots,\ \alpha^l) \in \mathbb{R}_+^{l+1} \mid \sum_{i=0}^{l} \alpha^i = 1\}$$

**）Berge〔3〕p. 112。

閉じていることから，x_0 の近傍 $V_y(x_0)$ と y の近傍 $W(y)$ が存在して

$$\varphi_1[V_y(x_0)]\cap W(y)=\emptyset$$

とすることができる。Kのコンパクト性により，有限個のy_1, y_2, ……, $y_n\in K$を適当に選んで

$$K\subset \bigcup_{i=1}^{n} W(y_i)$$

とすることができる。さて$U\cup(\bigcup_{i=1}^{n} W(y_i))$ は$\varphi_2(x_0)$ の近傍であるから，φ_2 の優半連続性により，

$$\varphi_2(V(x_0)\subset U\cup(\bigcup_{i=1}^{n} W(y_i))$$

なる x_0 の近傍$V(x_0)$ が存在する。そこで

$$V=V_{y_1}(x_0)\cap V_{y_2}(x_0)\cap\cdots\cap V_{y_n}(x_0)\cap V(x_0)$$

とおけば，

$$\varphi_1(V)\cap(\bigcup_{i=1}^{n} W(y_i))=\emptyset,$$

$$\varphi_2(V)\subset U\cup(\bigcup_{i=1}^{n} W(y_i))。$$

ゆえに

$$(\varphi_1\cap\varphi_2)(V)\subset U。$$

かくして，$\varphi_1\cap\varphi_2$ は x_0 において優半連続である。　(証了)

〔4-1〕の証明）この結果を用いて〔4-1〕を示そう。任意に$\lambda_0\in\Lambda$をとり出して

$$\Phi=\bigcap_{\lambda\neq\lambda_0}\varphi_\lambda$$

とおけば，Φは任意の点xにおいて閉じた多価写像である。

$$\varphi=\Phi\cap\varphi_{\lambda_0}$$

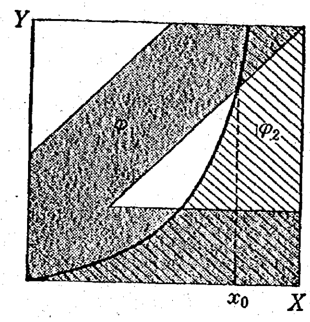
であるから，上記の補題1により，φはxにおいて優半連続となる。$\varphi(x)$ がコンパクトであることは自明。　(証了)

重要な注意　多価写像φ_1, φ_2 : $X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$が点$x_0\in X$において劣半連続（resp. 連続）であったとしても

$$\varphi : x\longmapsto\!\!\!\!\rightarrow\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)$$

は劣半連続（resp. 連続）とは限らない。

反例



<図 2>

上の図において，φ_1 と φ_2 はともに連続であるけれども，$\varphi_1\cap\varphi_2$ は点 x_0 において劣半連続ではない。

しかしたとえば次の命題が成り立つ。

〔4-2〕すべての$x\in X$について$\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)\neq\emptyset$なるふたつの多価写像$\varphi_1$, φ_2 : $X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$はともに劣半連続で，しかも$\varphi_2(x)$ はすべての$x\in X$について開集合のとき，

$$\varphi : x\longmapsto\!\!\!\!\rightarrow\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)$$

を以て定義される多価写像φ : $X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$は劣半連続である。*

証明）Yの任意の開集合Uの弱逆像$\varphi^{-w}(U)$がXの開集合であることを示そう。その前に新しい多価写像ϕ : $X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y\times Y$を

$$\phi : x\longmapsto\!\!\!\!\rightarrow\varphi_1(x)\times\varphi_2(x)$$

と定義すれば，〔1〕により，ϕが劣半連続で

*）これは Michael〔19〕Proposition 2.5 (p. 366) の簡略化である。

あることに注意する。

$$\varphi^{-w}(U)=\{x\in X\,|\,\varphi_1(x)\cap\varphi_2(x)\cap U\neq\emptyset\}$$
$$=\{x\in X\,|\,\varphi_1(x)\times\varphi_2(x)\cap$$
$$[(\varphi_2(x)\times\varphi_2(x))\cap(U\times Y)]\neq\emptyset\}$$

は容易に確認される。またここで

$$(\varphi_2(x)\times\varphi_2(x))\cap(U\times Y)$$

は$Y\times Y$の開集合であり，前述の如く$\psi=\varphi_1\times\varphi_2$は劣半連続であるのだから，$\varphi^{-w}(U)$ はXの開集合である。よって所望の帰結を得る。

（証了）

〔5〕 Λを添数の集合とし，多価写像の族$\varphi_\lambda: X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y\,(\lambda\in\Lambda)$ を考え，$\varphi: X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$を

$$\varphi: x\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x)$$

と定義する。

(i) Λが有限集合で，すべてのφ_λが点$x_0\in X$において優半連続ならば，φも点x_0において優半連続である。

(ii) すべてのφ_λが点$x_0\in X$において劣半連続ならば，φも点x_0において劣半連続である（Λは任意)。

(iii) Λが有限集合で，すべてのφ_λが点$x_0\in X$において連続ならば，φも点x_0において連続である。

証明） いずれも容易であるが，たとえば(ii)は次のようにして示される。(i)は各自試みよ。(iii)は(i)，(ii)から自明。

Uを $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x_0))\cap U\neq\emptyset$なる$Y$の任意の開集合とする。$\bar\lambda\in\Lambda$を任意に固定すると，$x_0$の適当な近傍$V$を選んで

$$x\in V\Longrightarrow\varphi_{\bar\lambda}(x)\cap U\neq\emptyset$$

とすることができる。ゆえに

$$x\in V\Longrightarrow\varphi(x)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x)\cap U\neq\emptyset。$$

（証了）

〔6〕 ふたつの多価写像$\varphi_1: X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$，$\varphi_2: Y\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Z$を考え，これらの合成多価写像

$$\varphi: x\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow\varphi_2[\varphi_1(x)]$$

を考える。

φ_1が点$x_0\in X$において優半連続 (resp. 劣半連続，連続)，φ_2がY上で優半連続 (resp. 劣半連続，連続) とすれば，φは点x_0において優半連続 (resp. 劣半連続，連続) である。

証明） 優半連続性についてのみ示す。$U\subset Z$を$\varphi_2[\varphi_1(x_0)]$ を含む開集合とすれば，φ_2の優半連続性により，$\varphi_2^{-s}(U)$ はYの開集合で，明らかに$\varphi_1(x_0)\subset\varphi_2^{-s}(U)$。$\varphi_1$は点$x_0$で優半連続ゆえ，$x_0$の近傍$V$を適当に選べば

$$\varphi_1(V)\subset\varphi_2^{-s}(U)$$
$$\therefore\quad\varphi_2[\varphi_1(V)]\subset U$$

とすることができる。（証了）

3. Berge の最大値定理*

経済学の問題から話をときおこすことにしよう。あるひとりの消費者の消費集合（すなわち彼にとって可能なすべての消費計画の集合）を$X\subset\mathbb{R}^l$，その上で定義された連続な効用函数を$u: X\longrightarrow\mathbb{R}$，この消費者の富の大きさを$w\in\mathbb{R}_+$，財の価格ベクトルを$p\in\mathbb{R}^l_+$としよう**。このと

*) Berge〔1〕pp. 115-117, Hildenbrand〔12〕pp. 28-30などを参照。経済学への応用としてはDebreu〔8〕を何よりも熟読すべきである。定理の一般化とその応用については，丸山〔16〕を見ていただきたい。

**) ここで$\mathbb{R}^l_+\equiv\{x\in\mathbb{R}^l\,|\,x\geqq 0\}$

き，彼が与えられた (p, w) の下で予算の制約を満たしつつ購買することが可能な消費計画の集合は，

$$\gamma(p, w)=\{x \in X \mid \sum_{i=1}^{l} p_i x_i \leqq w\}$$

である。これを (p, w) の下における**予算集合**(budget set)と呼ぶ。消費者は $\gamma(p, w)$ の中から，$u(x)$を最大とするような消費$x \in \gamma(p, w)$を選択すると考える。すなわち消費者の行動原理として，次のような問題を考えるのである。

Maximize $u(x)$

subject to $x \in \gamma(p, w)$

もしこの問題に解があるとすれば，それは一般に (p, w) に依存する多価写像であろう。これを

$$\xi : \mathbb{R}_+^{l+1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow X$$

と書き，しばしば**需要写像** (demand mapping) などと呼ばれる。経済分析を円滑に進行させるためには，多価写像ξがなんらかの連続性をもつことが望ましい。同時に，各 (p, w) をそれに対応する効用の最大値$u^*(p, w)=u[\xi(p, w)]$に写す（一価）函数

$$u^* : \mathbb{R}_+^{l+1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$$

は**間接的効用函数** (indirect utility function) と呼ばれ，この連続性も興味の対象となるであろう。

こうした問題は経済均衡分析の骨格のうちでも重要な構成部分を成し，経済理論家は実に頻繁にこの種の問に遭遇しなければならない。それを解決するためのひとつの強力な武器が，次に述べるBergeの最大値定理にほかならないのである。

補題2 函数 $u : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$は下半連続とし，多価写像 $\gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$は劣半連続とする。このとき，

$$u^*(x)=\sup\{u(x, y) \mid y \in \gamma(x)\}$$

を以て定義される $u^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$は$X$上で下半連続である。

証明） $x_0 \in X$ かつ $u^*(x_0)<\infty$とすれば，任意の$\varepsilon>0$に対し，u^*の定義から

$$u(x_0, y_0) \geqq u^*(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

となるように $y_0 \in \gamma(x_0)$ を選ぶことができる。uの下半連続性により，x_0, y_0の適当な近傍U_1, Vを選び

$$(x, y) \in U_1 \times V \Longrightarrow u(x, y) \geqq u(x_0, y_0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore\ u(x, y) \geqq u^*(x_0)-\varepsilon$$

とすることができる。さらにγの劣半連続性から

$$x \in U_2 \Longrightarrow \gamma(x) \cap V \neq \emptyset$$

なるxの近傍U_2が存在する。したがって

$$x \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow u^*(x) \geqq u^*(x_0)-\varepsilon$$

$u^*(x_0)=\infty$になるような点x_0における下半連続性についても容易であるから，読者に任せよう。 （証了）

補題3 函数 $u : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$は上半連続とし，多価写像 $\gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$はコンパクト値かつ優半連続とする。このとき

$$u^*(x)=\mathrm{Max}\{u(x, y) \mid y \in \gamma(x)\}$$

はX上で上半連続である。

証明） $x_0 \in X$, $\varepsilon>0$ とすると，uの上半連続性から，各$y \in \gamma(x_0)$ に対して

$$(x, z) \in U_y(x) \times V(y)$$
$$\Longrightarrow u(x, z) \leqq u(x_0, y)+\varepsilon$$

なるx_0の近傍$U_y(x_0)$と，yの近傍 $V(y)$ が

存在する。$\gamma(x_0)$ はコンパクトであるから，このような有限個の $V(y_1)$, $V(y_2)$, ……, $V(y_n)$; $y_i \in \gamma(x_0)$ によって，$\gamma(x_0)$ を被覆することができる。それに対応する $U_{y_i}(x)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を考え

$$U_1=\bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}(x_0)$$

$$V=\bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$$

とおく。すると

$$x \in U_1,\ y \in V \Longrightarrow u(x,\ y) \leqq \operatorname*{Max}_{i} u(x_0,\ y_i) + \varepsilon \leqq u^*(x_0)+\varepsilon。$$

さらに γ の優半連続性から

$$x \in U_2 \Longrightarrow \gamma(x) \subset V$$

となるような x_0 の近傍 U_2 が存在する。そこで

$$x \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow u^*(x)=\operatorname*{Max}_{y \in \gamma(x)} u(x,\ y) \leqq u^*(x_0)+\varepsilon$$

（証了）

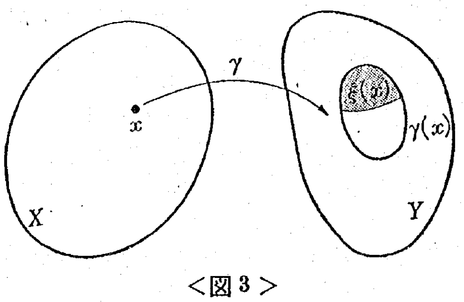
定理7　（Bergeの最大値定理）函数 $u : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続とし，多価写像 $\gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ はコンパクト値かつ連続とする。このとき

(i)　函数 $u^*(x)$ は連続。

(ii)　多価写像

$$\xi(x)=\{y \in \gamma(x) \mid u(x,\ y)=u^*(x)\}$$

はコンパクト値かつ優半連続。



<図3>

証明）(i)は補題2，3から明らか。次に多価写像 $\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ を

$$\varphi : x \longmapsto\!\!\!\!\rightarrow \{y \in Y \mid u^*(x)-u(x,\ y) \leqq 0\}$$

と定義すれば，φ のグラフは閉じている。しかるに

$$\xi(x)=\gamma(x) \cap \varphi(x) \qquad \text{for all } x \in X$$

であるから補題1により $\xi(x)$ は優半連続である。また $\varphi(x)$ は Y の閉集合（u の連続性による）であるから，$\xi(x)$ がコンパクト集合であることも，ただちに知られる。　　（証了）

4．連続選択子の理論

X, Y を位相空間とし，$\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ をそれらの間で定義された多価写像とする。いま

$$f(x) \in \varphi(x) \qquad \text{for all } x \in X$$

を満たす一価の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ が存在するとき，このような f を φ の**連続選択子**（continuous selection）という。

連続選択子の存在条件を究明する方向での研究は，Michaelの諸業績に触発されて近年活発な成果があがっている。しかもまた不動点定理や最適制御の理論等へも幅広い応用が開発されつつある。ここでは二，三の基本的な定理を簡単に紹介しておきたい。*

いま $(X,\ d)$ を距離空間とし，X から，$\mathbb{R}^l$ への多価写像 $\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$ を考える　φ のグラフ $G(\varphi)$ は

$$G(\varphi)=\{(x,\ y) \in X \times \mathbb{R}^l \mid y \in \varphi(x)\}$$

で定義される。$(X \times \mathbb{R}^l) \times (X \times \mathbb{R}^l)$ 上で実数値函数 ρ を

---

*) Cellina〔4〕,〔5〕,〔6〕,〔7〕; Michael〔19〕,〔20〕,〔21〕などを参照。Cellina〔7〕は応用面の展望として重宝である。渡部〔23〕も見よ。

$\rho[(x, y), (x', y')] = \mathrm{Max}[d(x, x'), \| y - y' \|]$; $(x, y), (x', y') \in X \times \mathbb{R}^l$

と定義すれば，ρ は $X \times \mathbb{R}^l$ 上に直積位相を定める距離函数となる。さらに，$(x, y) \in X \times \mathbb{R}^l$ と，$A \subset X \times \mathbb{R}^l$ との距離はもちろん

$\rho[(x, y), A] = \inf_{(u, v) \in A} \rho[(x, y), (u, v)]$

で定義する。このとき，$G(\varphi)$ の周囲の ε－開球 $B_\varepsilon[G(\varphi)]$; $\varepsilon > 0$ は，

$B_\varepsilon[G(\rho)] = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^l \mid \rho[(x, y), G(\varphi)] < \varepsilon\}$

である。

定理8 (Michael*) (X, d) をコンパクト距離空間とし，$\varphi : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$ は劣半連続で閉・凸値の多価写像とする。このとき φ の連続選択子が存在する。

証明）二段に分って証明を行なう。

1° 任意の $\varepsilon > 0$ 対して，$G(f) \subset B_\varepsilon[G(\varphi)]$ を満たす一価連続写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が存在することの証明。

各 $y \in \mathbb{R}^l$ について，集合

$U_y = \{x \in X \mid \inf_{z \in \varphi(x)} \| y - z \| < \varepsilon\}$

を考える。これは

$U_y = \{x \in X \mid \varphi(x) \cap \{z \in \mathbb{R}^l \mid \| y - z \| < \varepsilon\} \neq \emptyset\}$

と書け，しかも φ は劣半連続であるから U_y は開集合である (c. f. 定理4)。開集合族 $\{(U_y)\}_{y \in \mathbb{R}^l}$ はコンパクト集合 X の被覆であるから，それは有限部分被覆

$U_1 = U_{y_1}, U_2 = U_{y_2}, \cdots\cdots, U_q = U_{y_q}$

をもつ。

次に函数 α_i, β_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$ を次のように定義しよう。

$\alpha_i(x) = d(x, X \setminus U_i)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$

$\beta_i(x) = \dfrac{\alpha_i(x)}{\sum_{k=1}^{q} \alpha_k(x)}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$

このとき，

$\beta_i(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in X \setminus U_i$

$0 \leqq \beta_i(x) \leqq 1$; $\sum_{i=1}^{q} \beta_i(x) = 1$。

写像 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ で

$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i(x) y_i$

で定義すれば，β_i が連続であることから f も連続。さらに $f(x)$ は x を含む U_i に対応する y_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$ の凸結合である。よって U_i の定義から $y_i \in B_\varepsilon[\varphi(x)]$ となり，したがって

$G(f) \subset B_\varepsilon[G(\varphi)]$

2° φ の連続選択子が存在することの証明。

1° の結果から，

$(\forall x \in X) f_1(x) \in B_{1/2}[\varphi(x)]$

を満たす一価連続写像 $f_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が存在する。

写像 $\varphi_2 : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$ を

$\varphi_2(x) = \varphi(x) \cap \left\{ y \in \mathbb{R}^l \mid \| y - f_1(x) \| < \dfrac{1}{2} \right\}$

と定めれば，これは明らかに凸値で，しかも p. 105の〔4-2〕により劣半連続である。よって再び 1° により，

$(\forall x \in X) f_2(x) \in B_{1/2^2}[\varphi_2(x)]$

なる一価連続写像 $f_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}^l$ が存在する。

このようにして順次，一価連続写像の列 f_1, f_2, $\cdots\cdots$, f_{n-1} を定めたとき，

$(\forall x \in X) f_n(x) \in B_{1/2^n}[\varphi_n(x)]$

where

*) Michael〔19〕Theorem 3.2″, pp. 367-369 の簡略化である。Hildenbrand-Kirman〔13〕pp. 203-204 も参照。

$$\varphi_n(x)=\varphi(x)\cap\left\{y\in Y\,\middle|\,\|y-f_{n-1}(x)\|<\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

となる一価連続写像 f_n を定めることができる。

このようにして得られた $\{f_n\}$ は一様ノルムについて Cauchy 列である。実際この点は

$$(\forall x\in X)\ \|f_n(x)-f_{n+1}(x)\|<\frac{3}{2^{n+1}}$$

となることから容易に知られる。ゆえに $\mathscr{C}(X,\mathbb{R}^l)$ の完備性から，$\{f_n\}$ はある一価の写像 f に一様収束し，したがって f も連続である。しかも φ が閉値であることと，

$$(\forall x\in X)f_n(x)\in B_{1/2^n}[\varphi(x)]$$

であることから

$$(\forall x\in X)f(x)\in\varphi(x)。$$

ゆえに

$$G(f)\subset G(\varphi)。$$　　　　（証了）

定理 9　(Cellina*) $(X,\ d)$ はコンパクト距離空間，$\varphi: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$ は優半連続で凸値の多価写像とする。このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$G(f)\subset B_\varepsilon[G(\varphi)]$$

を満たす一価連続写像 $f: X\longrightarrow Y$ が存在する。

証明）まず任意に $\varepsilon>0$ を固定し，各 $x\in X$ に対して実数 $\theta(x,\ \varepsilon)$ を

$$\theta(x,\ \varepsilon)=\sup\left\{\delta<\frac{\varepsilon}{2}\,\middle|\,\exists x'\in B_\delta(x)\text{such that }\ \varphi(B_\delta(x))\subset B_\delta[\varphi(x')]\right.$$

と定義する。このとき

$$\inf_{x\in X}\theta(x,\ \varepsilon)>0 \qquad (2)$$

となることが以下のようにして知られる。

$x\in X$ を任意に固定すると，φ の優半連続性により，所与の $\varepsilon>0$ に対して適当に $\eta=\eta(x)>0$ を選び

$$\varphi(B_\eta(x))\subset B_{\varepsilon/2}[\varphi(x)] \qquad (3)$$

とすることができる。(1) と (3) とから

$$\eta_1(x)=\mathrm{Min}\{\eta(x),\ \frac{\varepsilon}{2}\}>0;$$

$$0\leqq\eta_1(x)\leqq\theta(x,\ \varepsilon)。$$

そこでいま $\inf_{x\in X}\theta(x,\ \varepsilon)=0$ としてみると，0 に収束する任意の実数列 $\{\zeta_n\}$ に対して

$$\theta(x_n,\ \varepsilon)<\zeta_n$$

を満たす X の点列 $\{x_n\}$ が存在する。X はコンパクトであるから，一般性を失うことなく，$x_n\to x_0\in X$ (os $n\to\infty$) と仮定してよい。すると φ の優半連続性により，$0<\eta(x_0)\leqq\varepsilon/2$ を適当に選んで

$$\varphi(B_{\eta(x_0)}(x_0))\subset B_{\varepsilon/2}[\varphi(x_0)]$$

とすることができる。ゆえに $d(x_n,\ x_0)<\eta(x_0)/3$ ならば，

$$\varphi(B_{\eta(x_0)/3}(x_n))\subset\varphi(B_{\eta(x_0)}(x_0))\subset B_{\varepsilon/2}[\varphi(x_0)]$$

かつ

$$x_0\in B_{\eta(x_0)/3}(x_n)。$$

ゆえに十分大なる n について

$$\theta(x_n,\ \varepsilon)\geqq\frac{\eta(x_0)}{3}$$

となり，矛盾。これで (2) が示された。

そこで

$$\zeta_0=\inf_{x\in X}\ \theta(x,\ \varepsilon)$$

とおき，ζ_1 を $0<\zeta_1<\zeta_0$ を満たす実数とする。あらたに多価写像 $\psi: X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{R}^l$ を

$$\psi: x\longmapsto\!\!\!\!\rightarrow\varphi(B_{\zeta_1}(x))$$

と定義すれば，すべての $y\in\mathbb{R}^l$ について一点 y の弱逆像 $\psi^{-w}(\{y\})$ は X の開集合である。実際 φ の優半連続性から $A\equiv\varphi^{-w}(\{y\})$ は X の閉集合であり，$B_{\zeta_1}(A)$ が $\psi^{-w}(\{y\})$ に等しいことはただちに知られる。

したがって $\{\psi^{-w}(\{y\})\}_{y\in\varphi(x)}$ は X の開被覆となるが，X はコンパクトであるから，それは有限部分被覆 $\{\psi^{-w}(\{y_i\})\}_{i=1}^{q}$ をもつ。

*) Cellina〔4〕Theorem 1. pp. 19-21.

定理8の場合と同様に

$$\alpha_i(x)=\alpha(x,\ X\setminus\phi^{-w}(\{y_i\}))\quad (i=1,2,\ \ldots\ldots,\ q)$$

$$\beta_i(x)=\frac{\alpha_i(x)}{\sum_{k=1}^{q}\alpha_k(x)}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ q)$$

と定めれば

$$f(x)=\sum_{i=1}^{q}\beta_i(x)y_i$$

で定義される写像 $f: X\longrightarrow Y$は連続。またϕの定義から

$$\alpha(x,\ x')<\delta\ ;\ \zeta_1<\delta\leqq\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\phi(x)=\varphi(B_{\zeta_1}(x))\subset\varphi(B_\delta(x))\subset B_{\varepsilon/2}[\varphi(x')]$$

$$\cap\varphi(x)\subset B_{\varepsilon/2}[\varphi(x')]\cap\mathrm{co}\,\varphi(X)$$

を満たす $x'\in X$と$\delta>0$とが存在する。$\varphi(x')$は凸であるから，$B_{\varepsilon/2}[\varphi(x')]\cap\mathrm{co}\ \varphi(X)$ も凸。したがってfの定義から，すべての$x\in X$について

$$f(x)\in B_{\varepsilon/2}[\varphi(x')]\cap\mathrm{co}\,\varphi(x)。$$

また

$$\rho((x,\ f(x)),\ G(\varphi))$$

$$\leqq\rho((x,\ f(x)),\ (x',\ f(x)))+\rho((x',\ f(x)),\ G(\varphi))$$

$$\leqq\rho((x,\ f(x)),\ (x',\ f(x)))+\rho((x',\ f(x)),\ (x',\ \varphi(x')))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

ゆえに

$$G(f)\subset B_\varepsilon[G(\varphi)]。$$ (証了)

重要な注意 $\varphi: X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathbb{R}^l$ が優半連続の場合は，φが閉・凸値であっても，必ずしも連続選択子は存在しない。

例 $X=[0,\ 1]$ とし，

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{if}\quad 0\leqq x<\frac{1}{2}\\ [0,\ 1] & \text{if}\quad x=\frac{1}{2}\\ 1 & \text{if}\quad \frac{1}{2}<x\leqq 1\end{cases}$$

とすれば，φ は優半連続で閉・凸値の多価写像であるが，明らかにφの連続選択子は存在しない*。

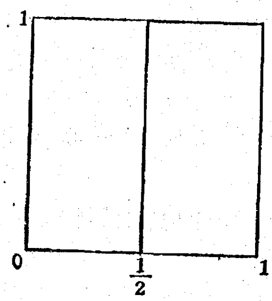


図4

＜参考文献＞

〔1〕 Berge, C. *Topological Spaces* (Macmillan, N. Y.) 1963.

〔2〕 Bourbaki, N. *General Topology*, Part 1, 2 (Addison-Wesley, Reading) 1966.

〔3〕 Castaing, C. and M. Valadier *Convex Analysis and Measurable Mnltifunctions* (Springer Verlag, Berlin) 1977.

〔4〕 Cellina, A. "Approximation of Set Valued Functions and Fixed Point Theorems" *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (IV) 82, 1969, 17-24.

〔5〕 ―――― "A theorem on the Approximation of Compact Multi-valued Mappings" *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconti* 47, 1969, fasc. 6.

〔6〕 ―――― "A Further Result of the Approximation of Set-valued Mappings" *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei Rendiconti* 48, 1970, 412-416.

＊渡部[23]による。

〔7〕 ______ "The Role of Approximation in the Theory of Multivalued Mappings" H. W. Kuhn and G. P. Szegö eds. : *Differential Games and Related Topics* (North Holland, Amsterdam) 1971, 209-220.

〔8〕 Debreu, G. *Theory of Value* (Wiley, N. Y.) 1959.

〔9〕 Fleischman, W. M. ed. *Set-valued Mappings, Selections and Topological Properties of* 2^X (Springer Verlag, Berlin) 1970.

〔10〕 福岡正夫『一般均衡理論』(創文社，東京) 1979.

〔11〕 Hausdorff, F. *Set Theory* 3rd ed. (Chelsea, N. Y.) 1957.

〔12〕 Hildenbrand, W. *Core and Equilibria of a Large Economy* (Rrinceton Univ. Press, Princeton) 1974.

〔13〕 Hildenbrand, W. and A. P. Kirman *Introduction to Equilibrium Analysis* (North-Holland, Amsterdam) 1976.

〔14〕 Hukuhara, M. "Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe" *Funkcialaj Ekvacioj* **10**, 1967, 43-66.

〔15〕 Kuratowski, C. *Topology*, Vol. I (Academic Press, N. Y.) 1966.

〔16〕 丸山徹「一時的均衡分析」『三田学会雑誌』69巻7号 (1976) 55-73および69巻8号 (1976) 33-51.

〔17〕 ―― 「コンパクト集合族の位相に関する覚え書」『三田学会雑誌』72巻3号 (1979)

〔18〕 Michael, E. "Topologies on Spaces of Subsets" *Trans. Amer. Math. Soc.* **71**, 1951, 152-182.

〔19〕 ______ "Continuous Selections I" *Annals of Mathematics* **63**, No. 2, 1956, 361-382.

〔20〕 ______ "A Selection Theorem" *Proc. Amer. Math. Soc.* **17**, 1966, 1404-1406.

〔21〕 ______ "A Theorem on Semi-continuous Set-valued Functions" *Duke Math.* J. **26**, 1969, 647-651

〔22〕 Warga, J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations* (Academic Press, N. Y.) 1972.

〔23〕 渡部隆一「多意写像の不動点定理について」『日吉論文集』(自然科学編) **14**, 1977, 1-22.

〔24〕 Willard, S. *General Topology* (Addison-Wesley, Reading) 1970.

(経済学部助手)