Title	コンパクト集合族の位相に関する覚え書
Sub Title	Topology on the space of compact subsets : a note
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.3 (1979. 6) ,p.359(87)- 369(97)
JaLC DOI	10.14991/001.19790601-0087
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790601-0087

コンパクト集合族の位相に関する覚え書*

丸 山 徹

(X, ρ) を距離空間とし，Xにおけるすべての非空・閉部分集合の族を$\mathfrak{F}X$と書き，またすべての非空・コンパクト部分集合の族を$\mathfrak{Comp}\,X$と書くことにしよう。$\mathfrak{F}X$や$\mathfrak{Comp}\,X$に属する元の間に自然な方法でなんらかの距離を定めることができるならば“集合の遠近”あるいは“集合の収束”を表現するに際して甚だ好都合であろう。

実際，多価写像の理論や最近の均衡分析(Hildenbrand〔7〕)の研究途上において，しばしばそのような概念の必要に迫られるのだが，われわれにとって必要な事柄をまとめて述べた書物はほとんどないのが現状である。本稿はそのような不便を除くために用意された覚え書である。*

1. Hausdorff の距離

A, Bを距離空間(X, ρ)の非空部分集合とするとき，まず$\eta(A, B)$なる実数を

$$\eta(A, B) = \sup_{x \in A} \rho(x, B) \tag{1}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{ここでもちろん}\\ \qquad \rho(x, B) = \inf_{y \in B} \rho(x, y)\end{array}\right]$$

と定義する。次にこのηを基礎として

$$h(A, B) = \mathrm{Max}\{\eta(A, B), \eta(B, A)\} \tag{2}$$

と定義すれば，hはふたつの非空部分集合の間で定義される実数値（∞も許して）の函数である。

このhをAとBとの隔りを表わす指標とみなして，これを **Hausdorff の懸隔** (Hausdorff distance) と呼ぶ。

Xとして線形ノルム空間$\mathfrak{X}$を採用する場合には，同一のことを別の形で表現することもできる。すなわちSを$\mathfrak{X}$の（原点を中心とする）閉単位球とすれば，

$$h(A, B) \tag{2'}$$
$$= \inf\{\lambda \geqq 0 \mid A + \lambda S \supset B \text{ and } B + \lambda S \supset A\}$$

と書いても同じことである。

Hausdorff の懸隔については，距離によく似た次のような性質が容易に証明される。

1° $h(A, B) \geqq 0$

$\quad h(A, B) = 0 \iff \overline{A} = \overline{B}$

2° $h(A, B) = h(B, A)$

3° $h(A, B) + h(B, C) \geqq h(A, C)$

1°, 2° は殆ど自明であるから，3° だけを確認しておこう。

$h(A, B)$ または (B, C) が∞の場合は自明であるから，$h(A, B) < \infty$かつ$h(B, C) < \infty$と仮定して

*) 本稿の内容に関してはとりわけ，Castaing-Valadier〔2〕, Chepter Ⅱ, Debreu〔4〕, Michael〔12〕を参照した。

よい。$x \in A$，$\varepsilon>0$とすると，hの定義から次のように$y \in B$，$z \in C$を選ぶことができる。

$$\eta(x,\ B)+h(B,\ C)$$
$$\geqq \rho(x,\ y)-\varepsilon+\eta(y,\ C)$$
$$\geqq \rho(x,\ y)+\rho(y,\ z)-2\varepsilon$$
$$\geqq \rho(x,\ z)-2\varepsilon$$
$$\geqq \eta(x,\ C)-2\varepsilon。$$

ここでεは任意であったから，

$$\eta(x,\ C)\leqq \eta(x,\ B)+h(B,\ C)$$
$$\therefore\quad \eta(A,\ C)\leqq h(A,\ B)+h(B,\ C) \qquad (3)$$

上記の推論中，AとCを入れかえて

$$\eta(C,\ A)\leqq h(A,\ B)+h(B,\ C) \qquad (4)$$

(3)，(4) により

$$h(A,\ C)\leqq h(A,\ B)+h(B,\ C)。 \qquad (以上)$$

そこでHausdorffの懸隔を，Xの非空・閉部分集合の上に限定して考えることにすれば，上記の1°に見られる如き“$h(A,\ B)=0$であっても$A=B$とは限らない”という“揺れ”はなくなって，**($\mathfrak{F}X$，h) は距離空間になる**。そしてこの場合のhを**Hausdorff の距離** (Hausdorff metric) と呼ぶのである。

ただし，$A, B \in \mathfrak{F}X$に対して，$h(A, B)=\infty$となる場合も排除できないことに注意しておかねばならない。

例　$X=\mathbb{R}^2$とし，$A=\{(x, 0)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$, $B=\{(0, x)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$とすれば，明らかに$h(A,\ B)=\infty$。

さらにA，Bの動く範囲をずっと狭くして，それらがいずれもコンパクト集合の場合に限定するならば，

$$A,\ B \in \mathfrak{Comp}\ X \Longrightarrow h(A,\ B)<\infty$$

であるから，($\mathfrak{Comp}\,X$，h) は使いなれた普通の距離空間となるのである。

以下，われわれの主たる関心はこの($\mathfrak{Comp}\,X$, h) に向けられるであろう。

まずはじめに($\mathfrak{Comp}\ X, h$) の位相の準基底，ならびに各元の基本近傍系を具体的に確認しておくことにしたい。

定理1　(i) ($\mathfrak{Comp}\ X, h$) の位相は，次のような形式の集合の族によって生成される。

$\{K \in \mathfrak{Comp}\ X\,|\,K\subset U\}$：$U$は開集合

$\{K \in \mathfrak{Comp}\ X\,|\,K\cap V\neq\emptyset\}$：$V$は開集合

(ii)　$K_0 \in \mathfrak{Comp}X$の基本近傍系は，K_0を含み

$\{K \in \mathfrak{Comp}\ X\,|\,K\subset U, K\cap V_i\neq\emptyset$；$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$：$U$，$V_i$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$) は開集合 (5)

なる形式の集合族である。

証明）三段に分って証明する。

1°　開集合Uに対して，$\{K \in \mathfrak{Comp}X\,|\,K\subset U\}$は$\mathfrak{Comp}X$の開集合であることの証明。

$K_0 \in \mathfrak{Comp}X$，$K_0\subset U$とする。K_0のコンパクト性により，

$$\varepsilon=\inf\{\rho(x,\ y)\,|\,x \in K_0,\ y \in X\setminus U\}>0。$$

するとこの$\varepsilon>0$に対しては

$$h(K,\ K_0)<\varepsilon,\ K \in \mathfrak{Comp}X$$
$$\Longrightarrow \eta(K,\ K_0)<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow K\subset U。$$

したがって所望の帰結を得る。

2°　開集合Vに対して，$\{K \in \mathfrak{Comp}X\,|\,K\cap V\neq\emptyset\}$は$\mathfrak{Comp}X$の開集合であることの証明。

$K_0 \in \mathfrak{Comp}X$, $K_0\cap V\neq\emptyset$とする。すると$x_0 \in K_0\cap V$と$\varepsilon>0$を適当に選び，$B_\varepsilon(x_0)\subset V$とすることができる。するとこの$\varepsilon>0$に対しては，

$$h(K,\ K_0)<\varepsilon,\ K \in \mathfrak{Comp}X$$
$$\Longrightarrow K\cap B_\varepsilon(x_0)\neq\emptyset$$
$$\Longrightarrow K\cap V\neq\emptyset。$$

3°　定理の主張の証明。

$K_0 \in \mathfrak{Comp}X$とし，$\varepsilon>0$を任意に与える。このとき$\mathfrak{Comp}X$におけるK_0のε-近傍

$B_\varepsilon(K_0)=\{K\in \mathfrak{Comp}X \mid h(K,\ K_0)<\varepsilon\}$

が必ず（5）の形の集合を含むことを示せば(ii)の主張が得られる。そこで

$U=\{x\in X \mid \rho(x,\ K_0)<\varepsilon\}$

とし，また $V_1,\ V_2,\ \cdots\cdots,\ V_n$ は K_0 を被覆する半径 $\varepsilon/2$ の開球としよう。そうすると，

$K\subset U \Longrightarrow \eta(K,\ K_0)<\varepsilon$ （6）

は明らかであり，さらに

$K\cap V_i\neq\emptyset\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

$\Longrightarrow \eta(K_0,\ K)<\varepsilon$ （7）

も成り立つ。実際，$\eta(K_0, K)\geqq\varepsilon$ とすれば，$\rho(x,\ K)\geqq\varepsilon$ となる点 $x\in K_0$ が存在しなければならない。$\{V_i\}$ は K_0 の被覆であるから，ある $i(=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ について $x\in V_i$ であるが，V_i は半径 $\varepsilon/2$ の開球ゆえ，$\eta(x,\ K)\geqq\varepsilon$ から，$K\cap V_i=\emptyset$。矛盾。

（6），（7）により

$\{K\in \mathfrak{Comp}\,X \mid K\subset U,\ K\cap V_i\neq\emptyset\ ;\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}\subset B_\varepsilon(K_0)$

が示されたのである。

(i)は以上の結果からただちに了解される。

（証了）

2. (X,ρ) と $(\mathfrak{Comp}X,\ h)$ の関係

定理2 $\{F_n\}$ を X における非空・閉集合の列とし，X の非空・閉集合 F に対して

$h(F_n,\ F)\to 0$ as $n\to\infty$

とすれば，

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{m\geqq n}^{\infty}F_m}=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m\geqq n}B_\varepsilon(F_m)$$

証明）第一の等式の証明。

$$F'=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{m\geqq n}^{\infty}F_m}$$

とおく。任意の $\varepsilon>0$ と $n\in\mathbb{N}$ に対して，十分に大きな $m\geqq n$ をとれば，仮定により

$h(F_m,\ F)<\varepsilon$。

ゆえに，すべての $x\in F$ に対して

$\rho(x,\ F_m)<\varepsilon$。

したがって適当に $x_m\in F_m$ を選べば

$\rho(x,\ x_m)<2\varepsilon$

とすることができる。ゆえに，すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$x\in\overline{\bigcup_{m\geqq n}F_m}$

したがって $F\subset F'$。

逆に $x\in F'$ を考える。そこで $h(F_n,\ F\cup\{x\})\to 0$ (as $n\to\infty$) を示せば，$F'\subset F$ が証明できたことになる。まず $h(F_n,\ F)\to 0$ (as $n\to\infty$) から

$\eta(F_n,\ F\cup\{x\})\to 0$ as $n\to\infty$。 （1）

次に，

$\eta(F\cup\{x\},\ F_n)=\mathrm{Max}\ \{\eta(F,\ F_n),\ \rho(x,\ F_n)\}\to 0$ as $n\to\infty$

を示すのであるが，そのためには

$\eta(x,\ F_n)\to 0$ as $n\to\infty$

を示せば十分である。（$\eta(F,\ F_n)\to 0$ as $n\to\infty$ だから！）さて $\{F_n\}$ は Cauchy 列であるから，$\varepsilon>0$ に対して十分に大きな n_0 をとれば，

$h(F_n,\ F_m)<\varepsilon$ for all $n,\ m\geqq n_0$

とすることができる。$x\in F'$ であるから，適当に $m\geqq n_0$ を選んで

$\eta(x,\ F_m)<\varepsilon$

とすることができる。したがって $n\geqq n_0$ に対しては

$\eta(x,\ F_n)\leqq\eta(x,\ F_m)+h(F_m,\ F_n)\leqq 2\varepsilon$。

ゆえに

$\eta(F\cup\{x\},\ F_n)\to 0$ as $n\to\infty$ （2）

(1)，(2) から $h(F_n, F\cup\{x\})\to 0$ (as $n\to\infty$)。

第二の等式の証明。

$F'' = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geqq n} B_{\varepsilon}(F_m)$

とおく。まず $x \in F$ とすると，$\rho(x,\ F_n) \to 0$ (as $n\to\infty$) であるから，$x \in F''$ は明らか。ゆえに $F \subset F''$。

逆に $x \in F''$ とすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$\rho(x,\ F_m) < \varepsilon$ for all $m \geqq n$

なる n が存在する。したがって

$\eta(F \cup \{x\}, F_n) = \mathrm{Max}\{\eta(F, F_n), \rho(x, F_n)\}$ $\to 0$ as $n\to\infty$。

また $\eta(F_n,\ F\cup\{x\}) \to 0$ (as $n\to\infty$) は自明である。ゆえに

$h(F_n,\ F\cup\{x\}) \to 0$ as $n\to\infty$。

$\therefore\ F\cup\{x\} = F$。

$\therefore\ F'' \subset F$。　　（証了）

定理3　Xが完備距離空間であれば，$(\mathfrak{F}X,\ h)$ も完備である。

証明）$\{F_n\}$ を $\mathfrak{F}X$ の Cauchy 列とする。

1°　$F \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m\geqq n} F_m} \neq \emptyset$ なることの証明。

$\varepsilon>0$ を任意に与える。$\{F_n\}$ は Cauchy 列であるから，すべての $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，

$h(F_n,\ F_m) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ for all $n,\ m \geqq n_k$

なる $n_k \in \mathbb{N}$ が存在する。ここで一般性を失うことなく，$n_k < n_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ としてよい。

そこで $x_0 \in F_{n_0}$ を任意にとり，以下 $\{x_k\}$ を帰納法によって次の如く構成する。すなわち $x_0,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_k$ が

$x_i \in F_{n_i}$；$\rho(x_{i-1},\ x_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}$ $(i=1,\ 2, \cdots\cdots,\ k)$

となるように選ばれたとき，x_{k+1} を

$x_{k+1} \in F_{n_{k+1}}$；$\rho(x_k,\ x_{k+1}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

とするのである。このようにして作られた $\{x_k\}$ は明らかに Cauchy 列であり，Xの完備性から，$\{x_k\}$ の極限 $x \in X$ が存在する。この x について，

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{m\geqq n} F_m}$。

2°　$h(F,\ F_n) \to 0$ なることの証明。

1°で得られた x については，$\rho(x_0,\ x) < 2\varepsilon$ が成り立つのであるから，すべての $n \geqq n_0$，$y \in F_n$ について

$\rho(y,\ x) < 2\varepsilon$

を満たす $x \in F$ が存在する。ゆえに

$\eta(F_n,\ F) < 2\varepsilon$ for $n \geqq n_0$　　（1）

次に $\varepsilon>0$ に対して

$h(F_n,\ F_m) < \varepsilon$ for all $n,\ m \geqq N$

となるようにNを選ぶ。$x \in F$ とすれば，

$x \in \overline{\bigcup_{m\geqq N} F_m}$。

すると

$\rho(x,\ y) < \varepsilon$

を満足する $y \in F_{n_0}$，$n_0 \geqq N$ が存在する。各 $m \geqq N$ に対して

$\eta(x,\ F_m) \leqq \rho(x,\ F_{n_0}) + h(F_{n_0},\ F_m) < 2\varepsilon$。

ゆえに

$\eta(F,\ F_m) < 2\varepsilon$ for $m \geqq N$　　（2）

（1），（2）から

$h(F,\ F_n) \to 0$ as $n\to\infty$。

（証了）

定理4　ふたつの距離空間 $(X,\ \rho)$ と $(\mathfrak{Comp}\ X,\ h)$ の間には次の関係が成り立つ。

(i)　$(X,\ \rho)$ が完備ならば $(\mathfrak{Comp}X,\ h)$ も完備である。

(ii)　$(X,\ \rho)$ がコンパクトならば $(\mathfrak{Comp}X,$

h) もコンパクトである。

(iii) (X, ρ) が可分ならば $(\mathfrak{Comp}X, h)$ も可分である。

証明) (i) $\{K_n\}$を$(\mathfrak{Comp}X, h)$のCauchy列とする。定理 3 により，$h(K, K_n)\to 0$ (as $n\to\infty$) なるXの閉部分集合Kが存在することは既にわかっているから，このKがコンパクトであることを示せばよい。さらにXは仮定によって完備であるから，Kが全有界であることを示せば十分である。

そこで$\varepsilon>0$を任意に与えると，$h(K, K_n)\to 0$ (as $n\to\infty$) により，

$$h(K, K_p)<\frac{\varepsilon}{2}$$

なるpが存在する。このK_pはコンパクトであるから，それは半径$\varepsilon/2$の有限個の開球$B_{\varepsilon/2}(x_1)$, $B_{\varepsilon/2}(x_2)$, ……, $B_{\varepsilon/2}(x_n)$によって被覆される。すると，これらの球と中心は同じで半径を2倍とした開球族$\{B_\varepsilon(x_i)\,|\,i=1, 2, \cdots, n\}$は$K$の被覆となる。よって$K$は全有界であることが判明した。

(ii) (X, ρ) がコンパクトであれば，(i)により，$(\mathfrak{Comp}X, \rho)$ は完備である。したがって，$\mathfrak{Comp}X$ の全有界性を示せばよろしかろう。Xは全有界であるから，$\varepsilon>0$に対してx_1, x_2, ……, x_nを適当に選び，

$$X\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$$

とすることができる。

そこで$K\in\mathfrak{Comp}X$に対して

$$I=\{\,i\,|\,B_\varepsilon(x_i)\cap K\neq\emptyset\}$$

$$K'=\{\,x_i\,|\,i\in I\}$$

とおけば，もちろん$K'\in\mathfrak{Comp}X$でしかも

$$h(K, K')<\varepsilon.$$

$\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$ のすべての部分集合の族は有限であるから，$\mathfrak{Comp}X$は全有界である。

(iii) $D=\{x_n\}$ をXにおける可算稠密部分集合とする。そしてDの非空有限部分集合の族を$\mathscr{J}$としよう。$\mathscr{J}$は明らかに可算集合である。以下$\mathscr{J}$が$\mathfrak{Comp}X$において稠密なることを示そう。

Dの各点を中心として，$K\in\mathfrak{Comp}X$と共通部分を有する半径$\varepsilon>0$の開球の全体はKの開被覆を成す。Kはコンパクトであるから，それは有限部分被覆を有する。そこで有限部分被覆を形成する開球の中心の集合をJとしよう。するともちろん$J\in\mathscr{J}$。

任意の$y\in J$に対して，$B_\varepsilon(y)\cap K\neq\emptyset$であるから，まず

$$\eta(y, K)<\varepsilon \quad \therefore \quad \eta(J, K)<\varepsilon. \qquad (1)$$

次に$x\in K$に対して，$x\in B_\varepsilon(y)$ なる$y\in J$が存在するから

$$\eta(x, J)<\varepsilon \quad \therefore \quad \eta(K, J)<\varepsilon. \qquad (2)$$

(1), (2)を併せて，$h(J, K)<\varepsilon$。

(証了)

3. 線形ノルム空間のコンパクト凸集合族

以下の議論において，$(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ を線形ノルム空間とする。

$\mathfrak{X}$上には所謂ベクトル演算が定義されているのであるから，一般の距離空間では定義のできないさまざまな概念を導入することが可能である。ここではその中でまず，集合の凸性という概念を定義しておこう。

定義 $\mathfrak{X}$の任意の二点x, yに対して

$$tx+(1-t)y\,;\;t\in[0, 1]$$

を x と y との**凸結合** (convex combination) という。

$\mathfrak{X}$ の非空部分集合 C の任意の二点の凸結合が C に含まれるとき，C は**凸** (convex) であるという。また $\mathfrak{X}$ における凸部分集合の全体を $\mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$ と書く。

すなわち C が凸集合であるとは，その任意の二点を結ぶ線分が，すっかり C の中に含まれることを意味する。

以下，$\mathfrak{X}$ の部分集合 A, B について

$A+B=\{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$

$\alpha A=\{\alpha x \mid x \in A\}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

などと書くことにする。

定理 5 (i) $A, B \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X} \Longrightarrow A+B \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$

(ii) $A \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X},\ \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha A \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$

(iii) $A \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$

証明) (i), (ii)はきわめて容易であるから各自試みよ。ここでは(iii)のみを示しておく。

写像 $\phi : \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times[0,\ 1] \longrightarrow \mathfrak{X}$ を

$\phi ; (x,\ y,\ t) \longmapsto tx+(1-t)y$

と定義すれば，一般に $M \subset \mathfrak{X}$ が凸であるためには，

$\phi(M\times M\times[0,\ 1]) \subset M$

の成り立つことが必要十分である。A は凸であるから，

$\phi(A\times A\times[0,\ 1]) \subset A$。

また ϕ は連続であり，$\overline{A\times A\times[0,\ 1]}=\overline{A}\times\overline{A}\times[0,\ 1]$ であるから，

$\phi(\overline{A}\times\overline{A}\times[0,\ 1])=\phi(\overline{A\times A\times[0,\ 1]})$

$\subset \overline{\phi(A\times A\times[0,\ 1])} \subset \overline{A}$。

したがって $\overline{A}$ は凸である。 (証了)

定義 $\mathfrak{X}$ の非空部分集合 A に対して，A を含む最小の凸集合を A の**凸包** (convex hull) と呼んで $\mathrm{co}A$ と書く。

また A を含む最小の閉凸集合を A の**閉凸包** (closed convex hull) と呼んで $\overline{\mathrm{co}}A$ と書く。

$\mathrm{co}A$ は A を含むすべての凸集合の共通部分に等しく，また $\overline{\mathrm{co}}A$ は A を含むすべての閉凸集合の共通部分に等しい。

定理 6 $(G,\ +)$ を位相加群とし，F は G の閉集合，K はコンパクトとすれば，$F+K$ は閉集合である。

証明*) $x \in \overline{F+K}$ とし，x の各近傍 U に対して，

$K_U=K\cap(U-F)$

とする。$x \in \overline{F+K}$ であるから，$K_U \neq \emptyset$。また x の近傍 U_1, U_2 について

$U_1 \subset U_2 \Longrightarrow K_{U_1} \subset K_{U_2}$

も自明である。したがって $\{K_U \mid U$ は x の近傍$\}$ は有限交叉性をもつ。K がコンパクトであるから，

$\cap\overline{K_U} \neq \emptyset$。

ただし共通部分は x のすべての近傍についてとるのである。そこで $k_0 \in \cap\overline{K_U}$ としよう。V を単位元 e の任意の近傍とすれば

$(V+k_0)\cap(V+x-F) \neq \emptyset$

$$\therefore\quad V-V+k_0\cap(x-F) \neq \emptyset \tag{1}$$

ところで単位元の任意の近傍 U に対して，$V-V \subset U$ なる単位元の近傍 V が存在するから，(1)により，k_0 の任意の近傍が $x-F$ と交わることになる。F は閉であるから $x-F$ も閉であり，したがって $k_0 \in x-F$。ゆえに

*) Dunford-Schwartz〔3〕pp. 414-415。

$x \in F+k_0 \subset F+K$。

（証了）

定理7 A, $B \subset \mathfrak{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$とする。

(i) $\mathrm{co}A=\{tx+(1-t)y \mid x,\ y \in A;\ t \in [0, 1]\}$

(ii) $\mathrm{co}(\alpha A)=\alpha\,\mathrm{co}A$

$\mathrm{co}(A+B)=\mathrm{co}A+\mathrm{co}B$

(iii) $K \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X} \Longrightarrow \mathrm{co}K \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$

(iv) $\overline{\mathrm{co}}A=\overline{\mathrm{co}A}$

(v) $\overline{\mathrm{co}}(\alpha A)=\alpha\overline{\mathrm{co}}A$

(vi) $\overline{\mathrm{co}}A \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X} \Longrightarrow \overline{\mathrm{co}}(A+B)=\overline{\mathrm{co}}\,A+\overline{\mathrm{co}}\,B$

証明） (i), (ii)は各自試みよ。

(iii) 定理5の場合と同様，写像$\varphi: \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times[0, 1]\to\mathfrak{X}$を

$\varphi:(x,\ y,\ t)\longmapsto tx+(1-t)y$

と定義する。(i)により，

$\mathrm{co}K=\varphi(K)$

である。したがって$\mathrm{co}K$はコンパクト集合Kの連続写像φによる像であることが判明した。ゆえに$\mathrm{co}K$はコンパクトである。

(iv) $\overline{\mathrm{co}}A$は閉集合で，しかも$\mathrm{co}A$を含むから，$\overline{\mathrm{co}}A\supset\overline{\mathrm{co}A}$。定理5から$\overline{\mathrm{co}A}$は凸で，しかも$A$を含む。したがって$\overline{\mathrm{co}A}\supset\overline{\mathrm{co}}A$。ゆえに$\overline{\mathrm{co}}A=\overline{\mathrm{co}A}$。

(v) (i), (iv)による。

(vi) (i)および定理6から，$\overline{\mathrm{co}}A+\overline{\mathrm{co}}B$は凸かつ閉である。したがって

$\overline{\mathrm{co}}(A+B)\subset\overline{\mathrm{co}}A+\overline{\mathrm{co}}B$。

さて$x+y$は連続であるから，任意のM_1, $M_2\subset\mathfrak{X}$について

$\overline{M}_1+\overline{M}_2\subset\overline{M_1+M_2}$。

ゆえに(i)と(iv)により

$\overline{\mathrm{co}}\,(A+B)=\overline{\mathrm{co}A+\mathrm{co}B}\supset\overline{\mathrm{co}}A+\overline{\mathrm{co}}B$

（証了）

$\mathfrak{X}=\mathbb{R}^l$とする場合には次のような興味深く，しかも応用の広い定理が得られる。

定理8 (Carathéodory) Aを$\mathbb{R}^l$の任意の部分集合とする。このとき，任意の$x\in\mathrm{co}A$はAの$l+1$個の点の凸結合として表わすことができる。

証明*) $x\in\mathrm{co}A$とすれば，

$x_0,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_k\in A;\ \theta_0,\ \theta_1,\ \cdots\cdots,\ \theta_k\in[0,\ 1]$

を適当に選び，

$x=\sum_{j=0}^{k}\theta_j x_j,\ \sum_{i=0}^{k}\theta_j=1$

とすることができる。ここで一般性を失うことなく，次のように仮定してよいであろう。

(1) $\theta_j>0$ for all j。

(2) kはそのような表現が可能な最小の自然数である。

いま仮に$k>n$と仮定してみる。するとk個のベクトル

$x_0-x_k,\ x_1-x_k,\ \cdots\cdots,\ x_{k-1}-x_k$

は一次従属とならねばならず，したがって

$\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j x_j=\left(\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j\right)x_j$

を満たす$0\neq(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_{k-1})\in\mathbb{R}^k$が存在する。そこで

*) Warga [16] pp. 139–140に従う。本質的にKrein-Milmanの定理による別証については丸山 [11] p. 115を見よ。

$$\alpha_k=-\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_j$$

とおくならば

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_j=0$$

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j=0$$

$$\alpha\equiv(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots\cdots,\ \alpha_k)\neq 0$$

したがって，すべての $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$x=\sum_{j=0}^{k}\theta_j x_j=\sum_{j=0}^{k}(\theta_j+t\alpha_j)x_j$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\theta_j+t\alpha_j)=1$$

すべての $j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ について $\theta_j>0$ であり，またある $i\in\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k\}$ について $\alpha_i<0$ でなければならないから，

$$\beta\equiv\sup\{t\geqq 0\,|\,\theta_j+t\alpha_j\geqq 0\ \text{ for all } j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k\}<\infty$$

$$\theta_j+\beta\alpha_j\geqq 0\quad\text{for all } j\in\{0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k\}$$

$$\theta_i+\beta\alpha_i=0\quad\text{for some } i\in\{0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ k\}。$$

かくして

$$x=\sum_{j=0}^{k}(\theta_j+\beta\alpha_j)x_j$$

は A の k 個の点から成る凸結合で，しかもその係数の中に0が混入する。これは当初の k に関する仮定に矛盾であろう。　（証了）

ここで $\mathfrak{X}$ のすべての非空・コンパクト・凸集合の族 $\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$ に Hausdorff の距離 h を定めて得られる距離空間（$\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$）の簡単な性質をいくつか述べておくことにしたい。*

補題1** $A,\ B,\ C$ を $\mathfrak{X}$ の部分集合とし，とくに B は閉かつ凸で，C は有界とする。このとき，

$$A+C\subset B+C\Longrightarrow A\subset B$$

証明）まず $a\in A$ を任意に選ぶ。任意の $c_1\in C$ について，

$$a+c_1\in A+C\subset B+C$$

であるから，

$$\exists b_1\in B,\ \exists c_2\in C\ \text{ such that }\ a+c_1=b_1+c_2$$

同様にして，

$$\exists b_2\in B,\ \in c_3\in C\ \text{ such that }\ a+c_2=b_2+c_3。$$

一般に，

$$a+c_k=b_k+c_{k+1}$$

が成り立つように $\{b_k\}$，$\{c_{k+1}\}$ をそれぞれ B および C の中から選ぶことができる。すると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a+c_k)=\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_{k+1})$$

$$i.e.\ na+\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=2}^{n+1}c_k$$

であるから，

$$a=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k+\frac{1}{n}c_{n+1}-\frac{1}{n}c_1。$$

B は凸集合であるから，

$$z_n\equiv\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\in B。$$

仮定により C は有界であるから，

$$s-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}c_{n+1}=0,\quad s-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}c_1=0。$$

ゆえに，

$$s-\lim_{n\to\infty}z_n=a。$$

B は閉集合であるから，

$a\in B$。　（証了）

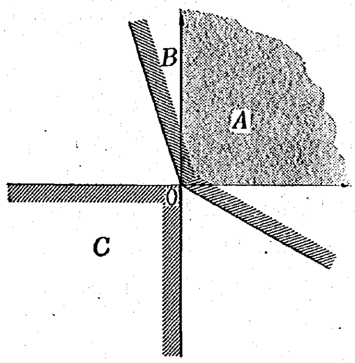
次の命題は補題1よりただちに知られるが，コンパクト凸集合族の“ベクトル化”を行なう際に重要な意味をもつので定理として述べておく。（丸山〔11〕を参照。）からただちに，

定理9　$A,\ B$ を $\mathfrak{X}$ の閉凸部分集合，C を有界部分集合とすれば，

*）以下の議論は丸山〔11〕と重複するが，この研究ノートを使いやすくするために，あえて再録しておく。
**）Rådström〔14〕

$A+C=B+C \Longrightarrow A=B$

重要な注意　定理9に述べた簡約法則は$\mathfrak{Conv}\,\mathfrak{X}$上では成り立たない。たとえば，図1



<図1>

を見よ。$\mathfrak{X}=\mathbb{R}^2$とし，$A$をその第1象限，$B$をそれよりもやや広い凸錐，$C$を第3象限とすれば，

$A,\ B,\ C \in \mathfrak{Conv}\,\mathfrak{X}$。

また明らかに

$A+C=B+C=\mathfrak{X}$

であるが，$A \neq B$。つまり簡約法則が成り立たないのである。

定理10　$\mathfrak{X}$のすべての非空・コンパクト部分集合から成る族$\mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$上に，$\|\cdot\|$にもとづくHausdorffの距離$h$が与えられている。

i)　任意の$A,\ B \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$，任意の$\alpha \geqq 0$について，

$h(\alpha A,\ \alpha B)=\alpha h(A,\ B)$。

ii)　任意の$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$について，

$h(A_1+A_2,\ B_1+B_2) \leqq h(A_1,\ B_1)+h(A_2,\ B_2)$。

iii)　ηおよびhは$\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\,\mathfrak{X} \times \mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\,\mathfrak{X}$上で凸である。

iv)　任意の$A,\ B \in \mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\,\mathfrak{X}$および任意の$C \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$について，

$h(A,\ B)=h(A+C,\ B+C)$。

v)　任意の$A,\ B \in \mathfrak{Comp}\,\mathfrak{X}$について，

$h(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B) \leqq h(A,\ B)$

証明*)　i)　ηの定義によって，

$$\eta(A,\ B)=\sup_{x \in A}\inf_{y \in B}\|x-y\|$$

$$\eta(\alpha A,\ \alpha B)=\sup_{x \in A}\inf_{y \in B}\|\alpha x-\alpha y\|$$

$$=\alpha\sup_{x \in A}\inf_{y \in B}\|x-y\|$$

$\therefore\ \eta(\alpha A,\ \alpha B)=\alpha\eta(A,\ B)$

ii)　$x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ y_1 \in B_1,\ y_2 \in B_2$，を任意にとると，

$$\|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\|$$
$$\leqq \|x_1-y_1\|+\|x_2-y_2\|$$

$\therefore\ \eta(x_1+x_2, B_1+B_2) \leqq \eta(x_1, B_1)+\eta(x_2, B_2)$。

これから容易に所望の帰結を得る。

iii)　i)，ii)より明らか。

iv)　Sを$\mathfrak{X}$の閉単位球とし，次の四つの関係を考える。ここで$\lambda \geqq 0$；

(1)　$A+\lambda S \supset B$　　(2)　$B+\lambda S \supset A$

(3)　$A+C+\lambda S \supset B+C$

(4)　$B+C+\lambda S \supset A+C$。

hの定義から，

$h(A,\ B)=\inf\{\lambda \geqq 0 \mid$(1)および(2)が成り立つ$\}$

$h(A+C,\ B+C)=\inf\{\lambda \geqq 0 \mid$(3)および(4)が成り立つ$\}$。

ところで，(1)(2) $\Longrightarrow$ (3)(4)であるから，

$h(A,\ B) \geqq h(A+C,\ B+C)$。

逆に，補題1により，(3)(4) $\Longrightarrow$ (1)(2)ゆえ，

$h(A,\ B) \leqq h(A+C,\ B+C)$。

*）ii) およびv) の証明はPrice〔13〕に負う。

v）任意の$x \in A$について，

$\eta(x,\ \mathrm{co}B) \leqq \eta(A, \mathrm{co}B)$。

iii）によって，$\eta(x, \mathrm{co}B)$ は$\mathfrak{X}$上でxの凸函数であるから，任意の$x \in \mathrm{co}A$についても，

$\eta(x,\ \mathrm{co}B) \leqq \eta(A,\ \mathrm{co}B)$。

$\therefore\ \eta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B) \leqq \eta(A,\ \mathrm{co}B)$。

また，$B \subset \mathrm{co}B$ゆえ，

$\eta(A,\ \mathrm{co}B) \leqq \eta(A,\ B)$

$\therefore\ \eta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B) \leqq \eta(A,\ B)$

同様にして

$\eta(\mathrm{co}B,\ \mathrm{co}A) \leqq \eta(B,\ A)$，

$\therefore\ h(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B) \leqq h(A,\ B)$ （証了）

定理11 $\mathfrak{X}$が完備（すなわち Banach 空間）であれば，($\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$, h) は完備である。

証明）$\{A_n\}$を$\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{Conv}\mathfrak{X}$ の Cauchy 列とする。定理4により，$\mathfrak{X}$が完備ならば $\mathfrak{Comp}\ \mathfrak{X}$も完備となるから，

$\exists A \in \mathfrak{Comp}\mathfrak{X}$ such that $h(A_n,\ A) \to 0$ as $n \to \infty$。

そこでAが凸であることを示せばよろしい。まずすべてのnについて，

$h(\mathrm{co}\,A,\ A) \leqq h(\mathrm{co}\,A,\ A_n) + h(A_n,\ A)$。

A_nは凸集合であるから，定理10のv）より，

$h(\mathrm{co}\,A,\ A_n) \leqq h(A,\ A_n)$。

ゆえに，すべてのnについて

$h(\mathrm{co}\,A,\ A) \leqq 2h(A,\ A_n)$

よって，

$h(\mathrm{co}\,A,\ A) = 0$

すなわち，

$\mathrm{co}\ A = A$。 （証了）

〔参考文献〕

〔1〕 Berge, C. : *Topological Spaces* (*Macmillan*, N. Y.) 1963.

〔2〕 Castaing, C. and M. Valadier: *Convex Analysis and Multi-functions* (Springer Verlag, Berlin) 1977.

〔3〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz: *Linear Operators*, Part 1 (Interscience, N. Y.) 1958.

〔4〕 Debreu, G. "Integration of Correspondences" *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. II (University of California Press, Berkeley and Los Angeles) 1967.

〔5〕 Ekeland, I. and R. Teman: *Convex Analysis and Variational Problems* (North Holland, Amsterdam) 1976.

〔6〕 Hausdorff, F.: *Set Theory* 3rd ed. (Chelsea, N. Y.) 1957.

〔7〕 Hildenbrnad, W. : *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton University Press, Princeton) 1974.

〔8〕 Hukuhara, M. "Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe" *Funkcialaj Ekvacioj*, 10, 1967, 43-66.

〔9〕 Kuratowski, C. : *Topology*, Vol. 1 (Academic Press, N. Y.) 1966.

〔10〕 Marti, J. T. : *Konvexe Analysis* (Birkhäuser, Basel) 1977.

〔11〕 丸山徹「Convex Analysis の二，三の進展について」『三田学会雑誌』70 巻1号，1977, 97-119.

〔12〕 Michael, E. "Topologies on Spaces of Subsets" *Trans. Amer. Math. Soc.* 71, 1951, 152-182.

〔13〕 Price, G. B. "The Theory of Integration" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 47, 1910, 1-50.

〔14〕 Rådstöm, H. "An Embedding Theorem for Spaces of Convex Sets" *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, 1952, 165–169.

〔15〕 Rockafellar, R. T. : *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton) 1969.

〔16〕 Warga, J. : *Optimal Control of Differential and Functional Equations* (Academic Press, N. Y.) 1972.

(経済学部助手)