Title	予想の分散と一時的均衡
Sub Title	The dispersion of expectations and temporary equilibrium
Author	吉田, 真理子
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.2 (1979. 4) ,p.259(149)- 265(155)
JaLC DOI	10.14991/001.19790401-0149
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790401-0149

予想の分散と一時的均衡

吉田真理子

序

ジョーン・ロビンソン〔14〕は，均衡利子率に影響を及ぼす要因として，(1)人々の予想の状態，(2)貨幣の供給量のふたつを挙げている。(1)の予想の状態とは，利子率は近い過去に経験した平均水準をめぐって変動するだろうという個人の予想の状態を意味している。近い過去に経験した平均水準が現在の水準より高い場合には，人々は，利子率の騰貴を予想し，この逆の場合には，利子率の低下を予想するだろう。しかし，それでもなお将来の任意の時点における水準については不確実性が存在する。特に次のふたつの場合を考えてみる。(1)各経済主体一人一人が利子率に対して主観的確率分布を持っている場合。(2)(1)の意味での主観的確率分布が社会の成員たちの間に分布している場合である。

第1の側面に注目した研究としてはトービン等の資産選択の理論が挙げられる。そこでは債券の将来利子率に関する不確実性の下で，その債券に含まれる危険と期待収益の秤量を通じて資産選択を行う投機家の行動が分析されている。

本稿では，これとは方向を違えて第2の側面に焦点を合わせてみる。これはケインズが流動性選好函数を導出する際に言及した市場の不確実性の考え方に類似していると思われる(1)。即ち各主体は自分の予想に完全な確信を抱いているが，その予想値が主体によって異なるため，社会全体としては予想値にばらつきが生じているという想定を行うのである。

またジョーン・ロビンソン〔14〕は，人々の将来利子率に対する意見の分散が大きければ大きいほど，一定の貨幣供給量の変化による債券価格の変動も大きくなるだろうと推測しているが，これは貨幣政策の立場から見て重大な発言だと思われる。この推測の当否を厳密に検討するための準備作業として，上で述べた想定に基づいて当該の問題を分析するための基本的モデルを設定し，一時的均衡の存在証明を行うのがこの論文の目的である。

I. 想定する経済の基本的枠組と仮定

ここで想定する経済には n 種の消費財，年1ドルの収益をもたらす永久債券，そして貨幣が存在するものとする。貨幣価格は1に等しいとする。永久債券は1種類のみ存在し，その利子支払は貨幣の形態で個人とは別の主体である政府によって行われるものとする。

経済活動の計画期間は2期間とする。また人々の選好は1期と2期の消費財の消費量にのみ依存し，貨幣，債券を保有することからは独立とする。人々の選好関係はすべて共通とし，将来の予想価格のみが互いに異なるとする。これは不当にきつい仮定と思われるかもしれないが必ずしもそうではない。何故ならば，第1に我々の問題が人々の予想のばらつきの大きさが均衡利子率に与える効果を分析することにあるため，この側面を純粋に取り出すためには，むしろ人々の選好は共通と仮定するのが有益だからである。また第2には選好が人ごとに異なっている場合にも本質的には，同様の仕方で存在証明を行うことが可能であることが明らかであるため，問題の非本質的な煩雑さを避けるため人々の選好の共通性を仮定することが得策と思われ

注(1) Keynes〔11〕第13章，第15章，特に pp. 172 参照。

るからである。[2]

以下に分析のため使用する記号を列挙する。

x_t：t 期の財の需要ベクトル

m_t：t 期の貨幣の需要量

b_t：t 期の債券の需要量

p_t：t 期の財の価格ベクトル

i_t：t 期の利子率

$\bar{x}_t$：t 期の財の初期保有量を表わすベクトル

$\bar{b}_1$：1期における債券の初期保有量

$\overline{m}_1$：1期における貨幣の初期保有量[3]

各個人の消費可能集合を $H=\mathbb{R}^{2n}_+$[4] で表わし，$x=(x_1, x_2)\in H$ とする。H 上には選好を示す完全な擬順序 $\precsim$ が定まっており，それは次の仮定を満たすものとする。

仮定1　H 上の選好関係はすべての主体について共通とする。

仮定2　（選好の連続性）どんな $x'\in H$ についても集合 $\{x\in H|x'\precsim x\}$ および $\{x\in H|x\precsim x'\}$ はともに集合 H の中で閉じている。

仮定3　（選好の凸性）$x, x'\in H$ についてもし $x'\prec x$ ならば $x'\prec\alpha x+(1-\alpha)x'$。但し α は $0<\alpha<1$ の任意の定数。

仮定4　（選好の単調性）$x, x'\in H$ について，もし $x\leq x'$ ならば $x\prec x'$。

仮定5　$\bar{x}_t\geq 0$[5]

仮定6　$\overline{m}_1$, $\bar{b}_1$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ は各々すべての主体に共通な値とする。

財の価格はすべて正とする。t 期の利子率を i_t で表わし，債券収益を年1ドルとしたことから t 期における債券価格は $1/i_t$ となる。$1/i_t=p^{n+1}$ とすると，貨幣価格が1であることから，価格の集合は $\mathbb{P}=\mathbb{R}^{n+1}_{++}\times\{1\}$ で表わされる。また主体の空間 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ は確率空間とし，この主体と2期に成立すると予想される価格との関係を次の函数 φ で表わす。[6]

$$\varphi:(\Omega, \mathscr{A}, \mu)\longrightarrow(\mathbb{R}^{n+1}_{++}, \mathscr{B})\text{[7]}$$

仮定7・函数 φ は可測函数である。[8]

仮定4から次の境界条件が導かれる。但し $\partial\mathbb{R}^{n+2}_+$ は $(n+2)$ 次元ユークリッド空間における非負象限 $\mathbb{R}^{n+2}_+$ の境界を表わすものとする。[9]

境界条件　$\mathbb{P}$ の点列 $\{p^\nu\}$ について，もしも $p^\nu\longrightarrow p^0\in\partial\mathbb{R}^n_+$ か，または $\|p^\nu\|\to+\infty$ ならば，任意の $z^\nu\in\zeta(p^\nu)$ について $\|z^\nu\|\to+\infty$ となる。

II．均衡点の存在証明

ここではI章で述べた仮定の下で，想定する経済の現物市場に需要と供給が等しくなる状態，つまり「一時的均衡」が必らず存在することを証明する。[10]

仮定2から主体の選好は連続実数値函数，

$$U:\mathbb{R}^{2n}_+\longrightarrow\mathbb{R}\text{[11]}$$

で表わされる。主体の選好を共通としたことから効用函数もすべての主体について共通となる。また仮定4から函数 U は $x=(x_1, x_2)$ について擬凹となる。[12] 一方1期と2期の予算制約式は以下の2式で表わされる。

$$p_1x_1+m_1+\frac{b_1}{i_1}\leqq p_1\bar{x}_1+\overline{m}_1+\frac{\bar{b}_1}{i_1}+\bar{b}_1 \tag{1}$$

$$p_2x_2\leqq p_2\bar{x}_2+\overline{m}_1+\frac{b_1}{i_1}+b_1 \tag{2}$$

(2)式の左辺に m_2, b_2 が含まれないのは，経済活動の計画期間が2期間であり，しかも効用函数が貨幣，債

注(2)　選好が主体によって異なる場合については附録で証明する。

(3)　各主体について考える時には，各々の記号に ω なる添字が必要だが，ここでは常に個別主体のみを考えるため省略する。

(4)　$\mathbb{R}^m_+=\{x\in\mathbb{R}^m|x=(x^1, x^2, \cdots, x^m)\geqq 0;$ *i.e.* $x^i\geqq 0$ for all $i\}$

$\mathbb{R}_m^{++}=\{x\in\mathbb{R}^m|x=(x^1, x^2, \cdots, x^m)>0;$ *i.e.* $x^i>0$ for all $i\}$

(5)　$\bar{x}_t=(\bar{x}^i_t)\geq 0$（半正）は，$\bar{x}_t^i\geqq 0$ (for all i) でしかも少なくともひとつの i については，$\bar{x}^i_t>0$ なることを意味する。

(6)　空間 Ω と，その部分集合のある σ-集合体 $\mathscr{A}$ と，その上に与えられた測度 μ とを組にして $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ と書き，これを測度空間と言う。特に $\mu(\Omega)=1$ の時，$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ は確率空間であると言う。

(7)　$\mathscr{B}$ はボレル σ-集合体を表わす。

(8)　φ が可測函数とは，任意の $B\in\mathscr{B}$ について $\varphi^{-1}(B)\in\mathscr{A}$ となることを言う。

(9)　この証明はGrandmont〔5〕Proposition 4.2の証明を参照。

(10)　詳しくは本稿 pp. 110 [illegible] 式，[illegible] 式参照。

(11)　(12) Debreu〔2〕第4章参照。

券には依存しないためである。各式の右辺はその期に使える購買力を表わしているが，特に(1)式の$\bar{b}_1/i_1$は1期の初期保有債券を販売することから得られる収入を表わし，$\bar{b}_1$は初期保有債券の貨幣形態での利子収入を表わしている。2期の予算制約式についても同様である。

ここで次の行動仮説を想定する。即ち，主体は1期，2期の予算制約式の下で，自らの効用を最大にするよう各期の財，貨幣，債券の需要を決定するとする。また分析順序としては，第1に1期の行動を暫定的に固定し，その下で2期の最適な財の需要量を求める。次に2期の需要函数によって得られる間接的効用函数を最大にする1期の最適な需要行動を決定するという方法をとる。

まず暫定的に1期の財，貨幣，債券の需要量x_1, m_1, b_1を所与とし，しかもi_2, p_2が与えられているとする。主体は2期の予算制約式の下で彼の効用を最大にするx_2の最適値x_2^*を求める。x_2の購入可能集合は次式で表わされる。

$$\beta_2(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)=\{x_2\in\mathbb{R}^n_+ \mid p_2x_2\leqq p_2\bar{x}_2+m_1+\frac{b_1}{i_2}+b_1\} \tag{3}$$

レンマ1　$\beta_2(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$ はコンパクト値かつ連続な集合値函数である。

証明　すべてのνについて$x_2^\nu\in\beta_2$なる点列$\{x_2^\nu\}$を考え$x_2^\nu\to x_2'$とすると，$x_2'\in\mathbb{R}^n_+$かつ$p_2x_2'\leqq p_2\bar{x}_2+m_1+\frac{b_1}{i_2}+b_1$が成立することから$\beta_2$は閉集合となる。$\beta_2$の有界性については$x_2\in\mathbb{R}^n_+$より下への有界性は明らか。また$p_2>0$から$x_2$の上への有界性も明らかであるため$\beta_2$はコンパクト集合となる。一方，仮定5から$p_2\bar{x}_2\neq\min p_2H=0$となり，アローの反例が除かれて，$\beta_2(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$は連続な集合値函数となる。(13)　(証了)

レンマ1と仮定2の効用函数の連続性により最大値の定理が適用可能となる。(14) つまり2期における最適な財の需要量

$$x_2^*:\mathbb{R}^{n+2}_+\times\mathbb{P}\longrightarrow\mathbb{R}^n_+$$

が存在し，しかも$x_2^*(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$は非空，コンパクト値かつ優半連続となる。同時に2期の予算制約式の下で最大化された間接的効用函数

$$U[x_1, x_2^*(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)]$$
$$\equiv U^*(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$$

は連続函数となる。

レンマ2　$U^*(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$ は，(x_1, m_1, b_1) について擬凹である。

証明　i_2, p_2は，任意に固定して考えるため，$U^*(\cdot)$や$x_2^*(\cdot)$の独立変数のうちi_2, p_2は省略して書くことにする。$x_2^*(x_1^{(1)}, m_1^{(1)}, b_1^{(1)})\ni x_2^{(1)}$, $x_2^*(x_1^{(2)}, m_1^{(2)}, b_1^{(2)})\ni x_2^{(2)}$について各々の凸結合を$x_1$, x_2, m_1, b_1とする。(15)

$$\alpha x_1^{(1)}+(1-\alpha)x_1^{(2)}=x_1 \tag{i}$$
$$\alpha x_2^{(1)}+(1-\alpha)x_2^{(2)}=x_2 \tag{ii}$$
$$\alpha m_1^{(1)}+(1-\alpha)m_1^{(2)}=m_1 \tag{iii}$$
$$\alpha b_1^{(1)}+(1-\alpha)b_1^{(2)}=b_1 \tag{iv}$$

仮定3より効用函数$U(x_1, x_2)$は擬凹であるから，もし$U(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})>U(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ならば，$U(x_1, x_2)>U(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$となる。$x_2^{(1)}$, $x_2^{(2)}$は2期の予算制約式を満たすから次の2式が成立する。

$$p_2x_2^{(1)}\leqq p_2\bar{x}_2+m_1^{(1)}+\frac{b_1^{(1)}}{i_2}+b_1^{(1)} \tag{v}$$

$$p_2x_2^{(2)}\leqq p_2\bar{x}_2+m_1^{(2)}+\frac{b_1^{(2)}}{i_2}+b_1^{(2)} \tag{vi}$$

(v)$\times\alpha+$(vi)$\times(1-\alpha)$ を求めると，

$$p_2x_2\leqq p_2\bar{x}_2+m_1+\frac{b_1}{i_2}+b_1$$

となり，x_2はm_1, b_1に応ずる2期の予算制約式を満たすことになる。一方$x_2^*(x_1, m_1, b_1)$は2期の予算制約式の下で効用を最大にする値であるから，$U(x_1, x_2^*(x_1, m_1, b_1))\geqq U(x_1, x_2)$が成立する。この不等式と先の$U(x_1, x_2)>U(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$の関係式により，$U(x_1, x_2^*(x_1, m_1, b_1))>U(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$が得られる。つまりもし$U^*(x_1^{(1)}, m_1^{(1)}, b_1^{(1)})>U^*(x_1^{(2)}, m_1^{(2)}, b_1^{(2)})$ならば，$U^*(x_1, m_1, b_1)>U^*(x_1^{(2)}, m_1^{(2)}, b_1^{(2)})$となり，間接的効用函数$U^*(x_1, m_1, b_1)$は明らかに擬凹となる。　(証了)

2期の場合と同様に，p_1, i_1, p_2, i_2を一定として1期の予算制約式の下で間接的効用函数U^*を最大にするx_1, m_1, b_1の最適値を求める。1期の財，貨幣，債券の購入可能集合を次式で表わす。

$$\beta_1(p_1, i_1)=\{(x_1, m_1, b_1)\in\mathbb{R}^{n+2}_+ \mid p_1x_1+m_1+$$

注(13)　Debreu〔2〕第4章参照。

(14)　最大値の定理については，Hildenbrand〔9〕pp. 29~pp. 30 Theorem 3及びCorollary 参照。

(15)　αは，$0\leqq\alpha\leqq1$の任意の定数とする。

$$\frac{b_1}{i_1} \leqq p_1\overline{m}_1+\overline{m}_1+\frac{\overline{b}_1}{i_1}+\overline{b}_1\} \tag{4}$$

レンマ3　$\beta_1(p_1, i_1)$ はコンパクト値かつ連続な集合値函数である。

証明　レンマ1と同様である。　（証了）

レンマ3と間接的効用函数 $U^*(x_1, m_1, b_1, i_2, p_2)$ の連続性によって最大値の定理から財，貨幣，債券の需要函数

$\zeta : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+2}$

が求められ，これは非空コンパクト値かつ優半連続となる。

個々の主体の需要函数を仮定7に基づいて集計し，社会全体の需要函数を求める。

まず一般論として $F : (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}^n$ を可測集合値函数とするとき，その積分を以下のように定義する。

定義　$\int_\Omega F d\mu = \{ \int_\Omega f d\mu \mid f$ は F の可測選択$\}$[16]

主体とその予想価格との関係を函数 φ で表わすことはすでに述べたが，この関係を各個人 $\omega \in \Omega$ について表わすと，

$\varphi : \omega \longrightarrow (p_2(\omega), i_2(\omega))$

なり，この式から主体の需要函数は $\zeta(p_1, i_1, \varphi(\omega))$ と書き表わすことができる。先に証明したように $\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2)$ は優半連続であるから可測集合値函数となる[17]。また仮定7より $\varphi(\omega)$ も可測函数であるから，$\zeta(p_1, i_1, \varphi(\omega))$ も当然 ω についての可測集合値函数となり，先の積分の定義に従って函数 $\zeta(p_1, i_1, \varphi(\omega))$ も積分が定義可能となる。即ち，社会全体の需要函数は以下の式で求められる[18]。

$$\Gamma(p_1, i_1) = \int_\Omega \zeta(p_1, i_1, \varphi(\omega)) d\mu(\omega) \tag{5}$$

Aumannの定理　多価函数 $F : X \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が優半連続ならば，$\int_X F(x, \alpha) d\mu(x) = \Phi(\alpha)$ は優半連続である。

証明　Aumann〔1〕参照。　（証了）

レンマ4　$\Gamma(p_1, i_1)$ は優半連続かつ凸コンパクト値の集合値函数である。

証明　$\Gamma(p_1, i_1)$ が優半連続であることは，$\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2)$ が優半連続であることから Aumannの定理により明らかである。$\Gamma(p_1, i_1)$ の凸性については，まず $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)} \in \Gamma(p_1, i_1)$ について，$\gamma^{(1)} = \int_\Omega f^{(1)} d\mu$，$\gamma^{(2)} = \int_\Omega f^{(2)} d\mu$ を満たす可測選択 $f^{(1)}$，$f^{(2)}$ が存在し，しかも $G(f^i) \subset G(\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2))$ なる関係が成立する。またレンマ2より間接的効用函数 U^* は擬凹であるから $\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2)$ は凸値の集合値函数である。よって $f = \alpha f^{(1)} + (1-\alpha) f^{(2)}$ なる f も ζ の可測選択となり，$\int_\Omega f d\mu \in \Gamma(p_1, i_1)$ が成立する。故に $\Gamma(p_1, i_1)$ は凸値の集合値函数である。

最後に $\Gamma(p_1, i_1)$ がコンパクト値になることについては次のように示せばよい。主体の需要函数 $\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2)$ の任意の可測選択 f について $-g(p_1, i_1, p_2, i_2) \leqq f(p_1, i_1, p_2, i_2) \leqq g(p_1, i_1, p_2, i_2)$ なる可積分函数 $g(p_1, i_1, p_2, i_2)$ が必らず存在する[19]。したがって $\zeta(p_1, i_1, p_2, i_2)$ は閉値かつ積分有界となり[20] $\Gamma(p_1, i_1)$ はコンパクト値となる。（証了）

価格の集合 $\mathbb{P}$ から非空コンパクトかつ凸の部分集合列 $\{\mathbb{P}^\nu\}$ をとり，$\mathbb{P}^\nu \subset \mathbb{P}^{\nu+1}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$ かつ $\mathbb{P} \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{P}^\nu$ とする。

レンマ5　$\mathbb{P}^\nu$ において超過需要函数 ξ は凸コンパクト値かつ優半連続の集合値函数である。

証明　明らか。　（証了）

レンマ5と $\mathbb{P}^\nu$ がコンパクト集合であることから ξ

注(16)　可測選択とは f が $f : (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to \mathbb{R}^n$ の一価可測函数で，しかも，$G(f) \subset G(F)$ のこと。但し $G(\cdot)$ は函数のグラフを表わす。

(17)　丸山徹〔13〕参照。

(18)　主体の空間 Ω の上での積分は予想価格の空間 $\mathbb{R}_{++}^{n+1}$ の上での積分に変換することができる。φ が仮定7より可測函数であることから，任意の $B \in \mathscr{B}$，について，$\varphi^{-1}(B) \in \mathscr{A}$ となり，次式が定義可能となる。

$\mu(\varphi^{-1}(B)) = \nu(B)$

つまり，この定義によって $(\mathbb{R}_{++}^{n+1}, \mathscr{B})$ にも新しい測度 ν が決定され，（5）式は以下のように書き換えられる。

$$\zeta(p_1, i_1) = \int_{\mathbb{R}_{++}^{n+1}} \zeta(p_1, i_1, p_2, i_2) d\nu(p_2, i_2)$$

(19)　集合値函数 $\varphi : (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ について，

$-g(\omega) \leqq \varphi(\omega) \leqq g(\omega)$ for every $\omega \in \Omega$

なる可積分函数 $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が存在する時，φ は積分有界であると言う。詳しくは Hildenbrandd〔9〕pp. 62 参照。

(20)　Hildenbrand〔9〕pp. 73, Proposition 7 参照。

$(\mathbb{P}^{\nu})$ もコンパクト集合となり，この集合 $\xi(\mathbb{P}^{\nu})$ の凸包を$\mathbb{Z}^{\nu}$とすると$\mathbb{Z}^{\nu}$は凸コンパクト集合となる。ある与えられた$\mathbb{Z}^{\nu}$ の元z^{ν}について $\mathbb{P}^{\nu}$ の元の集合を次式で定義する。

定義 $M(z^{\nu})=\{q\in\mathbb{P}^{\nu}|q\cdot z^{\nu}=\underset{p\in\mathbb{P}^{\nu}}{\mathrm{Max}}\,p\cdot z^{\nu}\}$

レンマ6 $M(z^{\nu})$ は凸コンパクト値かつ優半連続である。

証明 集合$\mathbb{P}^{\nu}$はコンパクト集合であるからz^{ν}から$\mathbb{P}^{\nu}$への集合値函数を考えるとこれはコンパクト値となり，しかも$\mathbb{P}^{\nu}$がz^{ν}から独立であることよりこの集合値函数は z^{ν} について連続となる。また pz^{ν} が連続な実数値函数であることから最大値の定理に従って $M(z^{\nu})$ は非空コンパクト値かつ優半連続となる。次に$M(z^{\nu})$ が凸値になることを示すと，$\alpha\in(0,1)$ において $\mathbb{P}^{\nu}$の凸性から $q_1\in M(z^{\nu})$，$q_2\in M(z^{\nu})$ なるq_1，q_2について次式が成立する。

$$\alpha q_1+(1-\alpha)q_2\in\mathbb{P}^{\nu} \qquad \text{(i)}$$

また

$$\alpha q_1\cdot z^{\nu}=\alpha\mathrm{Max}\ p\cdot z^{\nu} \qquad \text{(ii)}$$

$$(1-\alpha)q_2\cdot z^{\nu}=(1-\alpha)\mathrm{Max}\ p\cdot z^{\nu} \qquad \text{(iii)}$$

(ii)式と(iii)式を辺々加えると，

$$\alpha q_1\cdot z^{\nu}+(1-\alpha)q_2\cdot z^{\nu}=\mathrm{Max}\ p\cdot z^{\nu}\in M(z^{\nu}) \qquad \text{(iv)}$$

となり$M(z^{\nu})$ は凸値となる。（証了）

定理 仮定1～7の下で均衡点が存在する。

証明 レンマ5，6より $\xi(p^{\nu})$，$M(z^{\nu})$ は共に凸コンパクト値かつ優半連続だから$M(z^{\nu})\times\xi(p^{\nu})$ も同様の性質を持つ。ここで次の集合値函数Qを考える。

$$Q:(p^{\nu},\ z^{\nu})\longrightarrow M(z^{\nu})\times\xi(p^{\nu})$$

Qの定義域は $p^{\nu}\in\mathbb{P}^{\nu}$，$z^{\nu}\in\mathbb{Z}^{\nu}$から$\mathbb{P}^{\nu}\times\mathbb{Z}^{\nu}$ となり，値域も$M(z^{\nu})\subset\mathbb{P}^{\nu}$，$\zeta(p^{\nu})\subset\mathbb{Z}^{\nu}$から同様に$\mathbb{P}^{\nu}\times\mathbb{Z}^{\nu}$となる。$\mathbb{P}^{\nu}$，$\mathbb{Z}^{\nu}$は共に非空凸コンパクトの集合だから $\mathbb{P}^{\nu}\times\mathbb{Z}^{\nu}$ も当然同様の性質を持つ。よって角谷の不動点定理が適用され集合 $Q(p^{\nu},\ z^{\nu})$ は不動点 $(p^{\nu\prime},\ z^{\nu\prime})\in Q(p^{\nu\prime},\ z^{\nu\prime})$ を有することになる。この関係式から$p^{\nu\prime}\in M(z^{\nu\prime})$，$z^{\nu\prime}\in\xi(p^{\nu\prime})$ なる関係が得られる。

一方仮定4，レンマ2そして間接的効用函数 $U^*(x_1,\ m_1,\ b_1,\ i_2,\ p_2,\ \bar{x}_2)$ が連続であることから1期の予算制約式は等号で成立する。つまりこれを社会全体で集計することによって$\xi(p)$ のすべての元 z について $p\cdot z=0$を得ることができる。この式は $z^{\nu\prime}\in\xi(p^{\nu\prime})$ についても成立することから次式が導かれる。

$$p^{\nu\prime}\cdot z^{\nu\prime}=0 \qquad \text{(i)}$$

また$\{z^{\nu\prime}\}$の上への有界性については任意に $p\in\mathbb{P}$ をひとつ固定した時，$\{\mathbb{P}^{\nu}\}$ の定め方から充分大きなすべての ν について $p\in\mathbb{P}^{\nu}$ が成立するためこれらの充分大きな ν については$M(z^{\nu})$ の定義より，

$$p\cdot z^{\nu\prime}\leqq p^{\nu\prime}\cdot z^{\nu\prime} \qquad \text{(ii)}$$

なる不等式が成立する。故に(i)，(ii)式から以下の式が得られる。

$$p\cdot z^{\nu\prime}\leqq 0 \qquad \text{(iii)}$$

(iii)式においてもし$\overline{\lim\limits_{\nu'\to\infty}}\ z_i{}^{\nu\prime}=+\infty$ならば必らず$\underline{\lim\limits_{\nu'\to\infty}}\ z_j{}^{\nu\prime}=-\infty$なる j が存在しなければならない。しかしこれは先の $\{z^{\nu\prime}\}$ の下への有界性に反するため結局 $\{z^{\nu\prime}\}$ は上にも有界となる。

次に $\{p^{\nu\prime}\}$ についてであるが，この下への有界性は自明である。上への有界性については境界条件より上に有界でない時には $\{z^{\nu\prime}\}$ の有界性に反することから明らかである。以上で$\{z^{\nu\prime}\}$，$\{p^{\nu\prime}\}$は共に有界点列となり，必らず収束部分列を持つことになる。そこで一般性を失うことなく

$$\lim_{\nu'\to\infty}z^{\nu\prime}=z^*,\qquad \lim_{\nu'\to\infty}p^{\nu\prime}=p^* \qquad \text{(iv)}$$

なる極限値の存在が仮定可能となる。

最後に (p^*,z^*) が均衡点になることを示す。まず(iii)，(iv)式からどんな $p\in\mathbb{P}$ についても次式が成立する。

$$p\cdot z^*\leqq 0 \qquad \text{(v)}$$

ここで点 $(1,0,\cdots 0)=e_1$ を考え ${}^{\exists}p\in\mathbb{P}$ について $p\to e_1$とすると，(v)式より$e\cdot z^*\leqq 0$なる関係が得られ，第1財については$z_1{}^*\leqq 0$が成り立つことになる。同様のことが第 i 財 $(i=1,2,\cdots,n+2)$ についても言えるため，結局次式が導かれる。

$$z^*\leqq 0 \qquad \text{(vi)}$$

一方 $\{z^{\nu\prime}\}$ の有界性と境界条件から $p^*\in\mathbb{P}$となり，しかも超過需要函数 $\xi(p)$ はコンパクト値かつ優半連続であるから，そのグラフは $\mathbb{P}\times\mathbb{R}^{n+2}$ の中で閉じているため以下の式が得られる。

$$z^*\in\xi(p^*) \qquad \text{(vii)}$$

$p>0$ から $p^{i*}>0$が成り立ち，かつワルラス法則から $\sum_{i=1}^{n+2}p^{i*}\cdot z^{i*}\equiv 0$となる。したがって(vi)式より $z^*\leqq 0$であるから$z^{i*}=0$ $(i=1,2,\cdots,n+2)$ となり，

$$z^*=0 \qquad \text{(viii)}$$

が成立することになる。(viii)式によって p^* で市場の均衡が達成されることが証明されたことになる。

（証了）

附 録

ここでは，選好が主体によって異なるというより一般的な場合を考え，そこにおいても本質的には本文と同様の均衡の存在証明が可能であることを明らかにしたい。つまり選好擬順序の集合に位相を導入することによって経済の構造をより一般的に描写し，その経済モデルにおいても一時的均衡が存在することを証明する。

$\precsim$は$\mathbb{R}^{2n}_{+}$における完全かつ連続な選好の擬順序を表わし，この擬順序$\precsim$が作る集合を$\mathscr{P}$とする。まずこの集合$\mathscr{P}$の位相を以下で示すような自然な仕方で導入する。

いま$\mathbb{R}^{4n}_{+}$の部分集合$G_{\precsim}$を次のように定義し，これを$\precsim$のグラフと呼ぶ。

定義 $(x, y\in G_{\precsim})\Longleftrightarrow x\precsim y$

また仮定2の選好の連続性から$G_{\precsim}$は$\mathbb{R}^{4n}_{+}$の閉部分集合となる。$\mathbb{R}^{4n}_{+}$におけるふたつの選好の擬順序が異なればそのグラフも当然異なり，その逆も成立することから$\precsim$と$G_{\precsim}$とは同一視して考えることができる。したがって以下では$G_{\precsim}$について考察する。

ここで準備として次のふたつの事柄を明示しておく。

(1) 距離空間 (X, η) のコンパクト集合K_1, K_2について$B_\epsilon(\cdot)$ を次のように定義すると，

定義 $B_\epsilon(K_1)=\{x\in X\mid \eta(x, K_1)<\epsilon\}$

一般に集合K_1, K_2の間にはHausdorffの距離

$\delta(K_1, K_2)=\inf\{\epsilon>0\mid K_1\subset B_\epsilon(K_2).\ K_2\subset B_\epsilon(K_1)\}$

を定めることができる。

(2) Alexandrov の "one-point compactificaton" の定理

定理 $(X, \mathscr{T})$ を局所コンパクト，Hausdorff 空間とする。Xに一点（理想点）x_∞を付加して得られる空間を

$$X^*=X\cup\{x_\infty\}$$

とすれば，これに次のような条件を満たす位相を定めることができる。

(i) X^*はコンパクト，Hausdorff 空間である。

(ii) X^*から導入されるXの相対位相は$\mathscr{T}$と一致する。

実際X^*の位相$\mathscr{T}^*$を

$\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{(X\setminus K)\cup\{x_\infty\}\mid K$は$X$のコンパクト集合$\}$と定義すれば$\mathscr{T}^*$が所望の条件を満足することを確認するのは難しくない。

以上(1)，(2)の準備の下で集合$\mathscr{P}$に位相を定義することができる。まず$\mathbb{R}^{4n}_{+}$は局所コンパクト，Hausdorff 空間であるから，上記の定理に従い，その"one-point compactification"

$$\tilde{X}=\mathbb{R}^{4n}_{+}\cup\{x_\infty\}$$

が存在する。また先に述べたように$G_{\precsim}$は$\mathbb{R}^{4n}_{+}$の閉部分集合であるから，やはり上記の定理を用いて$G_{\precsim}\cup\{x_\infty\}$も$\tilde{X}=\mathbb{R}^{4n}_{+}\cup\{x_\infty\}$の新しい位相$\tilde{\mathscr{T}}$に関する閉部分集合となる。コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト集合であることから，$G_{\precsim}\cup\{x_\infty\}$は$(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$のコンパクト部分集合となる。

ここでふたつの集合$G_{\precsim}\cup\{x_\infty\}$と$G_{\precsim'}\cup\{x_\infty\}$との間に距離$\delta$を定義する。$(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$は距離付け可能であるから，そのコンパクトな部分集合$G_{\precsim}\cup\{x_\infty\}$と$G_{\precsim'}\cup\{x_\infty\}$については先のHausdorff の距離$\delta$が定義可能となる。つまり擬順序$\precsim$, $\precsim'$に間の距離ρは以下の定義式で表わされることになる。

$\rho(\precsim, \precsim')\equiv\delta\{G_{\precsim}\cup\{x_\infty\}, G_{\precsim'}\cup\{x_\infty\}\}$

δは Hausdorff の距離であり，これによって集合$\mathscr{P}$に位相が定義されたわけである。

以上から経済の構造は，各主体$\omega\in\Omega$について，次の3つの事柄を対応させることにより完全に決定される。

1. 選好 $\precsim(\omega)\in\mathscr{P}$
2. 財の初期保有量 $\bar{x}_t(\omega)\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$

 貨幣，債券の初期保有量 $(\overline{m}_t(\omega), \bar{b}_t(\omega))\in\mathbb{R}^2_+$
3. 予想価格 $p(\omega)\in\mathbb{R}^{n+1}_{++}\times\{1\}\equiv\mathbb{P}$

そこで

$\mathscr{P}\times(\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\})\times\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{P}\equiv E$

なるEにボレルδ－集合体$\mathscr{B}$を与え，経済の構造を表わす写像

$\mathscr{E}:(\Omega, \mathscr{A})\longrightarrow(E, \mathscr{B})$

を次式で定義し，

定義 $\mathscr{E}(\omega)=(\overline{m}_t(\omega), \bar{b}_t(\omega), \bar{x}_t(\omega), p(\omega), \precsim(\omega))$

これを可測写像と仮定する。

以下では，上記の経済モデルにおける均衡の存在証明が本文と同様の分析手順によって可能となることを示す。まず主体の効用は各々選好の擬順序によって異なるから，各主体の効用函数U_ωは，

$U_\omega\equiv f(\precsim(\omega), x_1, x_2)$

なる函数fで表わされる。この函数fの連続性は各$\epsilon>0$に対して適当な$\delta>0$を取った時，$\rho_0(\precsim, \precsim')<\delta_0$, $\rho_1(x_1, x_1')<\delta_1$, $\rho_2(x_2, x_2')<\delta_2$なるすべての$(\precsim, x_1, x_2)$について不等式$\rho_3(f(\precsim, x_1, x_2), f(\precsim',$

$x_1', x_2'))<\varepsilon$が成立することから明らかである。また1期と2期の購入可能集合は，

$$\beta_1 : \mathbb{R}_+^2 \times (\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{P} \times \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+2}$$

$$\beta_2 : \mathbb{R}_+^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{P} \times \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$$

なる集合値函数で表わされる。

ここでx_1, m_1, b_1を暫定的に固定して，2期の購入可能集合 $\beta_2(m_1, b_1, \bar{x}_2, p_2, \precsim)$ の下で効用を最大にする2期の最適な財の需要量 x_2^* を求める。最大値の定理から，

$$x_2^* : \mathbb{R}_+^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{P} \times \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+^n$$

が決定され，同時に $x_2^*(m_1, b_1, \bar{x}_2, i_2, p_2, \precsim)$ から得られる間接的効用函数

$$f(x_1, x_2^*(m_1, b_1, \bar{x}_2, i_2, p_2, \precsim)) \equiv f^*(x_1, m_1, b_1, \bar{x}_2, i_2, p_2, \precsim)$$

は連続な集合値函数となる。

次に$\beta_1(\overline{m}_1, \overline{b}_1, \bar{x}_1, i_1, p_1, \precsim)$ の下で $f^*(x_1, m_1, b_1, \bar{x}_2, i_2, p_2, \precsim)$ を最大にする1期の需要函数 ζを求める。2期の場合と同様に $f^*(x_1, m_1, b_1, \bar{x}_2, i_2, p_2, \precsim)$ が連続であることから最大値の定理に従って

$$\zeta : \mathbb{R}_+^2 \times (\mathbb{R}_+^n / \{0\}) \times \mathbb{P}_2 \times \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+2}$$

が決定される。しかもこれらは皆優半連続となるため本文と同様$\zeta(\overline{m}_1, \overline{b}_1, \bar{x}_1, i_1, p_1, i_2, p_2, \precsim)$は，すべて可測函数となる。即ち，積分が定義可能となり社会全体の需要函数が求められる。

$$\Gamma(p_1, i_1) = \int_\Omega \zeta(p_1, i_1, \mathscr{E}(\omega))\, d\mu$$

Aumannの定理から $\Gamma(p_1, i_1)$ は優半連続かつ凸コンパクト値の集合値函数となる。故に以下の分析は本文と全く同様の手順で行うことが可能となり，主体によって選好と財，貨幣，債券の初期保有量が異なる場合にも本稿の経済モデルに均衡が存在することが確認されたわけである。

<参考文献>

〔1〕 Aumann, R. J. "Integrals of Set-Valued Functions" *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 12. August 1965.

〔2〕 Debreu, G., *Theory of Value* (Wiley, N. Y.) 1959.

〔3〕 福岡正夫「存在問題の再考察」『三田学会雑誌』70巻, 1977.

〔4〕 Grandmont, J. M., "Temporary General Equilibrium Theory" *Econometrica* Vol. 45, 1977.

〔5〕———, "On the Short-Run Equilibrium in a Monetary Economy" *Allocation under Uncertainty* (Macmillan) 1974.

〔6〕——— and Laroque, G., "The Liquidity Trap" *Econometrica* Vol. 44. 1976.

〔7〕 Green, J. R., "Temporary General Equilibrium in a Sequential Trading Model with Spot and Future Transactions" *Econometrica* Vol. 41. 1973.

〔8〕 Hicks, J. R., *Value and Capital* (Clarendon Press, Oxford) 1946.

〔9〕 Hildenbrand, W., *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton University Press, Princeton) 1974.

〔10〕 Kakutani, S., "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" *Duke Mathematical Journal* Vol. 8. 1941.

〔11〕 Keynes, J. M., *The General Theory of Employment, Interest and Money* (Macmillan, London) 1936.

〔12〕 河田龍夫『フーリエ解析と確率論入門』(日本評論社) 1971.

〔13〕 丸山徹「可測多価写像の性質―C」『三田学会雑誌』69巻, 1976.

〔14〕 Robinson, J., "The Rate of Interest" *Econometrica* Vol. 19. 1951.

〔15〕 Simmons, G.F., *Introduction to Topology and Modern Analysis* (Mcgraw-Hill) 1963.

(慶應義塾大学大学院経済学研究科研究生)