

Title	政策ラグのシステムへの影響
Sub Title	Effects of policy lags on a system
Author	蓑谷, 千凰彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.1 (1979. 2) ,p.50- 75
JaLC DOI	10.14991/001.19790201-0050
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790201-0050">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19790201-0050</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

# 政策ラグのシステムへの影響

蓑谷 千鳳彦

## 1

政策は、その必要性が認知されるまでに遅れがあり、認知されても政策当局者の意思決定がなされるまでに時間を要し、さらに実際に政策が実施されるまでには一層の時間を要する（これらは内部ラグといわれる）。そして実施された政策が集計需要に与える効果は即時的ではなく、やはり遅れを伴って徐々に侵透していく（外部ラグ）。この外部ラグは、消費や投資のラグによってもたらされるラグであり、分布ラグとして表わすことができるであろう。これに対して内部ラグといわれている政策ラグは、分布ラグではなく、離散的なラグであり、むだ時間要素として表わすことができる。

この論文の目的は、政策ラグがシステム特性（安定性、定常偏差、過渡応答）をどう変えるかを分析することである。政策がシステムのエラーを入力としてフィードバック効果を受けて変化するとき、システム特性は、構造方程式体系、構造パラメータの値、政策の種類（金融、財政）、政策方式（微分、比例、積分）、政策措置の強さ、政策ラグによって影響される。安定化政策を分析するときにはこれらいずれの要因をも同時的に考察しなければならない。しかしこの論文の目的はこれらの問題を全体として分析することではなく、きわめて限定された状況のもとで、もっぱら政策ラグの問題をあつかっている。モデルは単純な乗数・加速度モデルであり、外国貿易は捨象されている。構造パラメータの仮説値は、安定解を与える値である。政策変数は財政支出のみであり、失業者の目標値と実際値との乖離に比例して（完全雇用を目的として）支出がなされるものと想定されている。

政策方式がシステム特性に重要な影響を与えること、安定性のみの観点からいえば微分、比例、積分の順序で望ましいことはすでに〔6〕で指摘した。この論文では比例政策の場合の政策ラグを考察しているに過ぎないが、政策ラグ、特にむだ時間要素として表わされる内部ラグがシステムを不安定化させるという結論は一般化できる。

第2節でモデルを示し、モデルの特性を分析する。第3節では、このモデルに、失業者の目標値と実際値の乖離（エラー）に比例して政府支出が変更される政策方式が加えられる。このシステムの伝達関数が示され、出力可制御性が示され、システム特性が分析される。第4節では比例政策によ

る政府支出の配分が時間的な遅れをもって徐々になされるとい、単純指数ラグによって示されるラグのシステムへの影響を分析する。第5節では、離散的なむだ時間要素として表わされる内部ラグが分析される。そこでは、むだ時間が長いほど、また政策措置が強いほどシステムを不安定にすることが示される。第6節は別の単純なモデルによって政策ラグのもつ不安定化効果が強調されている。

2

モデルは単純な乗数・加速度モデルである。

$$c(t) = \frac{c\lambda_1}{D + \lambda_1} y(t), \quad 0 < c < 1, \quad 0 < \lambda_1 \leq 1 \quad (1)$$

$$i(t) = \frac{v\lambda_2}{D + \lambda_2} Dy(t), \quad v > 0, \quad 0 < \lambda_2 \leq 1 \quad (2)$$

$$g(t) = \bar{g}(t) \quad (3)$$

$$l(t) = ly(t) \quad l > 0 \quad (4)$$

$$u(t) = \bar{n}(t) - l(t) \quad (5)$$

$$y(t) = c(t) + i(t) + g(t) \quad (6)$$

ここで

$c(t)$  = 個人消費支出

$i(t)$  = 投資支出

$g(t)$  = 政府支出

$y(t)$  = GNP

$l(t)$  = 労働需要

$n(t)$  = 労働供給

$u(t)$  = 失業者数

$D$  =  $d/dt$  微分演算子

であり、変数記号上の一は外生変数を示す。政府支出がフィードバック効果を受けないこのモデルの特性をまず調べておこう。また表示法として、たとえば  $c(t)$ ,  $i(t)$  のラプラス変換をそれぞれ  $C(s)$ ,  $I(s)$  のように示すことにする。

(1)~(6)式から  $y$  と  $g$  の関係を求めると次のようになる。

$$Y(s) = H(s)G(s) \quad (7)$$

ここで

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2}} \quad (8)$$

モデルの安定性を調べるために特性方程式のルースの配列をつくると次のようになる。

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & 1 & \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2} \\ s^1 & \frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2} & \\ s^0 & \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2} & \end{array}$$

消費ラグは投資ラグより短かいと仮定すれば  $\lambda_1 > \lambda_2$  であり,  $\lambda_1(1-c) > 0$ ,  $\lambda_1\lambda_2(1-c) > 0$  であるから,  $1-v\lambda_1 > 0$  であるならば  $1-v\lambda_2 > 0$  が成立し, したがってモデルは安定である。しかし  $1-v\lambda_1 < 0 < 1-v\lambda_2$  かつ  $\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1) > 0$  ならばやはり安定である。

$G(s)=1/s$  の入力 (これは  $g(t)=1, t>0$  に等しい) に対して(7), (8)式より次式を得る。

$$Y(s) = \frac{\left(\frac{1}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s(s-s_1)(s-s_2)} \quad (9)$$

ここで  $\zeta < 1$  のときには  $s_1, s_2$  を次のように表わすことができる。

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (10)$$

$$\omega_n = \left[ \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1) \right] \left[ (1-v\lambda_2)\lambda_1\lambda_2(1-c) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$\zeta < 1$  のときは  $y(t)$  が振動解をもつときであり, 周期は  $2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  によって与えられる。ここで  $j$  は虚数単位である。

安定的なモデルにおける財政乗数は,  $G(s)=1/s$  の入力に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 1/(1-c)$$

となる。

(9)式をみればわかるように, 政府支出の変化に対するGNPの時間的反応は有理型分布ラグ関数による分布ラグとして表わされる。この外部ラグをもたらすのは, このモデルにおいては消費のラグと投資のラグである。

数値例をあげよう。構造パラメータの値を次のように仮定する。

$$\begin{array}{l} \lambda_1=0.4 \quad c=0.8 \\ \lambda_2=0.2 \quad v=2.0 \\ l=1.1 \end{array} \quad (13)$$

政策ラグのシステムへの影響

モデルの単位期間は四半期を想定している。限界消費性向は 0.8, 消費ラグは平均ラグ1.25四半期, 投資の加速度係数は 2.0, 投資ラグは 5.0四半期, 労働需要関数のパラメータ 1.1 は  $y$  の単位を10億円,  $l$  の単位を50人と考えればよい。

この構造パラメータの値のときには,  $1-v\lambda_2 = 0.6$ ,  $\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1) = 0.12$  であるから, モデルは安定的であり, さらに  $\zeta = 0.6124 < 1$  から, 減衰的振動をすることがわかる。 $\omega_n = 0.1633$ ,  $\zeta\omega_n = 0.1$  であるから, (10)式より

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j 0.129 \quad (14)$$

となる。したがって 周期は,  $2\pi/\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 48.7$  (約12年), 時定数は  $1/\zeta\omega_n = 10$  (2年半) である。

$g(t) = 1 (t > 0)$  に対する  $y(t)$  の時間的応答は, 初期値  $y(0) = Dy(0) = 0$  のもとで次式で与えられる。

$$y(t) = \frac{1}{1-c} - \frac{1}{(1-c)\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1}\zeta) \quad (15)$$

したがって(13)式で与えられる構造パラメータのもとでは次のようになる。

$$y(t) = 5 - 6.325 e^{-0.1t} \sin(0.129 t + 52.2^\circ) \quad (16)$$

最初のピークオーバーシュートは

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

で生じ, オーバーシュートの値は

$$M_p = \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-c} \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

で与えられるから, 数値例においては,

$$t_p = 24.4 \text{ (約 6 年目)}$$

$$M_p = 5.44 \text{ (財政乗数の最大値)}$$

となる。

(1) 伝達関数

2で述べたような特性をもつモデルに, 政府支出の一部がフィードバック効果を受けるシステムを考えよう。政策立案者の目標失業水準を  $u^*$  とする。現実の失業者の水準  $u$  が  $u^*$  より大きいとき, 政府支出を増加させ総有効需要を増大させる政策がとられるものとしよう。

政策立案者はまず  $u-u^*$  が一時的な攪乱にすぎないのか、それとも数四半期にわたって続くと考えられるのかを判断しなければならない。 $u-u^*$  のギャップが一時的で永続的でないと想定されるならば、政策ラグ (これは必ずしも政策立案者の対応の遅れのみを意味しない。政策立案者がコントロールしえない外部ラグも含まれる) の存在によって即時的に  $u-u^*$  を除去できない以上、最善の政策は何もしないことであろう。しかし  $u-u^*$  が一時的なものではないと認識され、対策の必要性が決意され、実際の行動がとられるものとしよう。内部ラグがないならば

$$g_1(t) = \beta [u(t) - u^*] \quad \beta > 0 \quad (17)$$

という調整方式になり、 $u(t) - u^*$  のギャップに対して政府支出が単純指数ラグによって示される時間的な遅れをもって配分されるときには、

$$g_1(t) = \frac{\beta\mu}{D+\mu} [u(t) - u^*] \quad \beta > 0, 0 < \mu \leq 1 \quad (18)$$

となるであろう。しかしもっと重要なラグは、むだ時間 (dead time) 要素として表わされる次のような内部ラグである。

$$g_1(t) = \beta [u(t-\tau) - u^*] \quad \beta > 0 \quad (19)$$

認知ラグ、決定ラグ、行動ラグという内部ラグによって  $u-u^*$  の永続的な存在に対して  $\tau$  期後に始めて政府支出がなされるという場合である。

以下の分析は(17), (18), (19) 式で示される3つの場合をみつかる。特にこれまで数学的に明確に分析されていないのは(19)式の場合である。

政府支出が外生的にあつかわれていた2のモデルにかわって、(17), (18)あるいは(19)式を用いることにより、(3)式は次のように変更される。

$$g(t) = \overline{g_0(t)} + g_1(t) \quad (20)$$

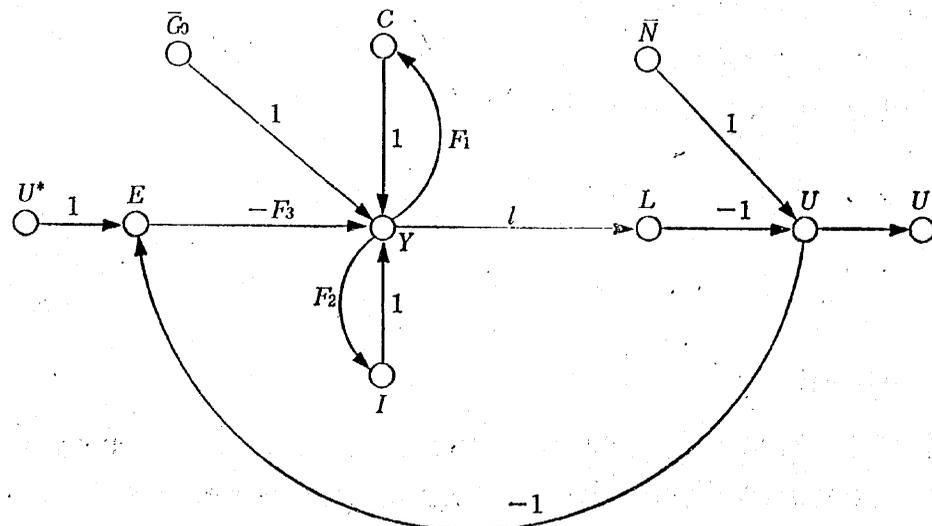


図1 方程式(1), (2), (20), (17), (18), (19), (4), (5), (6)の信号の流れ

したがって(1), (2), (20), (17) (あるいは(18), (19)) (4), (5), (6)式によって表わされるシステムを信号の流れとして図示すると図1のようになる。図において

$$F_1 = \frac{c\lambda_1}{s + \lambda_1} \quad (21)$$

$$F_2 = \frac{v\lambda_2 s}{s + \lambda_2} \quad (22)$$

$$F_3 = \begin{cases} \beta & (17) \text{式の時} \\ \frac{\beta\mu}{s + \mu} & (18) \text{式の時} \\ \beta e^{-\tau s} & (19) \text{式の時} \end{cases} \quad (23)$$

である。むだ時間のある(19)式の時 $F_3$ が $\beta e^{-\tau s}$ となるのはラプラス変換における変時定理を用いることによってえられる。

メーソンの規則を用いて、図1より次の閉ループ伝達関数  $M(s)$  がえられる。

$$M(s) = \frac{U(s)}{U^*(s)} = \frac{lF_3}{1 - F_1 - F_2 + lF_3} \quad (24)$$

開ループ伝達関数を  $A(s)$  とすれば

$$A(s) = \frac{lF_3}{1 - F_1 - F_2} \quad (25)$$

であり

$$M(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} \quad (26)$$

と表わされる。

## (2) 出力可制御性

安定性、過渡応答を検討する前に出力可制御性、すなわち出力  $u(t)$  をある有限の時間  $t_f - t_0 \geq 0$  において、 $t = t_0$  から任意の最終出力  $u(t_f)$  へ導く制約のない区分的に連続な入力  $g_1(t)$  が存在することを示しておくことにしよう。 $g(t) = \bar{g}_0 + g_1(t)$  とすると、 $g_1(t)$  と  $u(t)$  の関係は(1), (2), (4), (5), (6)および  $g(t) = \bar{g}_0 + g_1(t)$  より次のようになる。

$$\frac{U(s)}{G_1(s)} = \frac{-l}{1 - F_1 - F_2} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (27)$$

ここで

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2} \\ a_0 &= \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2} \\ b_2 &= \frac{-l}{1-v\lambda_2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$b_1 = \frac{-l(\lambda_1 + \lambda_2)}{1 - v\lambda_2}$$

$$b_0 = \frac{-l\lambda_1\lambda_2}{1 - v\lambda_2}$$

状態変数を

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{29}$$

$$\dot{x}_2(t) = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) + g_1(t) \tag{30}$$

と定義すれば、次の出力方程式をうる。

$$u(t) = (b_0 - a_0b_2)x_1(t) + (b_1 - a_1b_2)x_2(t) + b_2g_1(t) \tag{31}$$

(29), (30), (31)式を行列表示すれば次式となる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}g_1(t) \tag{32}$$

$$u(t) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(t) + dg_1(t) \tag{33}$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\mathbf{c}' = (b_0 - a_0b_2 \quad b_1 - a_1b_2), \quad d = b_2$$

である。出力可制御性の必要・十分条件は

$$\mathbf{Q}_{cc} = [\mathbf{c}'\mathbf{b} \quad \mathbf{c}'\mathbf{A}\mathbf{b}] \tag{35}$$

のランクが1になることである。

$$\mathbf{c}'\mathbf{b} = b_1 - a_1b_2 = l(v\lambda_2^2 - \lambda_1c) / (1 - v\lambda_2)^2 \tag{36}$$

$$\mathbf{c}'\mathbf{A}\mathbf{b} = b_0 - a_0b_2 = l\lambda_1\lambda_2(v\lambda_2 - c) / (1 - v\lambda_2)^2$$

であるから、 $\lambda_1 = \lambda_2 = c/v$  のときのみ  $\mathbf{Q}_{cc} = (0 \ 0)$  となり  $\text{rank}(\mathbf{Q}_{cc}) = 0$  となるが、それ以外のときは  $\text{rank}(\mathbf{Q}_{cc}) = 1$  であるからシステムは出力可制御性を有している。

### (3) 安定性

次にシステムの安定性を検討することにして。まず政府支出の一部が完全雇用を目標として  $u - u^*$  からのフィードバックを受けるが、内部ラグはない(1)式のケース、すなわち  $F_3 = \beta$  のケースを考えよう。このとき開ループ伝達関数は(2)、(2)式および  $F_3 = \beta$  を(2)式へ代入することによって次のようになる。

$$A_1(s) = \frac{\left(\frac{l\beta}{1 - v\lambda_2}\right)(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)}{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1 - c) + \lambda_2(1 - v\lambda_1)}{1 - v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1 - c)}{1 - v\lambda_2}} \tag{37}$$

したがって閉ループ伝達関数は次の通りである。

政策ラグのシステムへの影響

$$M(s) = \frac{\left(\frac{l\beta}{1-v\lambda_2+l\beta}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c+l\beta)+\lambda_2(1-v\lambda_1+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta}} \quad (38)$$

まずこの比例政策の安定性への影響をみることにしよう。システムの特性方程式は  $1+A_1(s)=M(s)$  の分母 = 0 によって与えられるから、特性方程式のルース配列は次のようになる。

$s^2$	1	$\frac{\lambda_1\lambda_2(1-c+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta}$
$s^1$	$\frac{\lambda_1(1-c+l\beta)+\lambda_2(1-v\lambda_1+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta}$	
$s^0$	$\frac{\lambda_1\lambda_2(1-c+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta}$	

構造パラメータに関する仮定によって  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ,  $1-c+l\beta > 0$  であるから、 $1-v\lambda_1+l\beta > 0$  ならば安定である。政府支出が完全に外生的な 2 で述べたモデルは、 $1-v\lambda_1 > 0$  ならば安定であった。 $1-v\lambda_1 > 0$  ならば明らかに  $1-v\lambda_1+l\beta > 0$  は成立するから、それゆえ比例政策  $g_1 = \beta(u-u^*)$  の導入によって安定なシステムが不安定になることはない。さらに

$$\lambda_1(1-c)+\lambda_2(1-v\lambda_1) < 0 < 1-v\lambda_1+l\beta$$

のとき (たとえば  $\lambda_1=0.4$ ,  $\lambda_2=0.2$ ,  $c=0.8$ ,  $v=3.6$ ,  $l=1.1$ ,  $\beta > 0.4$ ) には、 $u-u^*$  に対する強い比例政策の導入によって不安定なシステムを安定にすることができる。

(38式で与えられている数値例においては

$$A_1(s) = \frac{\left(\frac{1.1\beta}{0.6}\right)(s+0.4)(s+0.2)}{(s+0.1-j0.129)(s+0.1+j0.129)} \quad (39)$$

となるから、比例政策の措置の強さ  $\beta$  に対するシステムの根軌跡は図 2 のようになり、 $\beta$  の大きさいかにかかわらずシステムは安定であることがわかる。

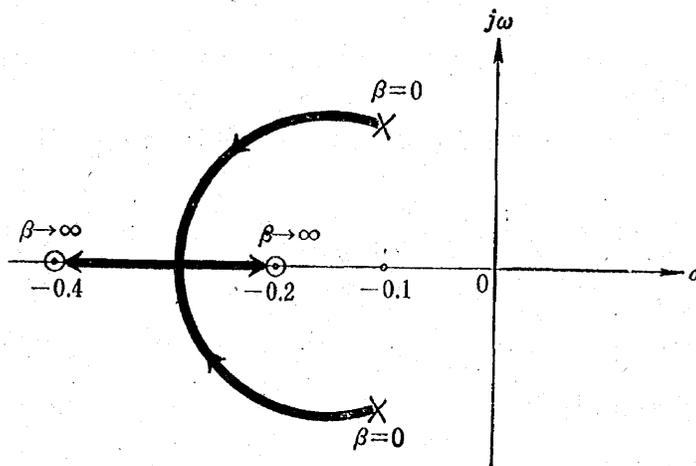


図 2 (39式)の根軌跡

もうひとつの構造パラメータの組  $\lambda_1=0.4$ ,  $c=0.8$ ,  $\lambda_2=0.2$ ,  $v=3.6$ ,  $l=1.1$  においては,  $1-v\lambda_2=0.28$ ,  $\lambda_1(1-c)+\lambda_2(1-v\lambda_1)=-0.008$  であるから, 比例政策がない2で述べたモデルは不安定であるが, 比例政策  $g_1=\beta(u-u^*)$  が導入されると, ルース配列から  $\beta>0.012$  のときにはシステムを安定化することが可能であり, さらに  $\beta>3.81$  のときには,  $g_1$  が導入されないときにモデルが有していた固有の振動を消すことができる。しかし  $\beta=3.81$  とは 50 万人の  $u-u^*$  に対して 10000 (50人)  $\times 3.81=38100$  (10億円), 約38兆円という不可能な政府支出額を意味している。

#### (4) 定常偏差

次にこの比例政策は, 定常偏差をゼロにしないということを示しておこう。⑨式の開ループ伝達関数をもつシステムのタイプはゼロであるから,  $u^*(t)=u_0^*$  (時間に関して一定の水準が目標として与えられる) に対しても定常偏差は残る。 $A(s)=K_0B(s)/N(s)$  とすると,  $u^*(t)=u_0^*$  に対して定常偏差  $\lim_{t \rightarrow \infty} (u(t)-u_0^*) = e(t)_{ss}$  は

$$e(t)_{ss} = \frac{u_0^*}{1 + K_0 \frac{B(0)}{N(0)}} \quad (40)$$

によって与えられ ([6] Appendix C 参照), ⑨式の  $A(s)$  の場合には  $N(0)=\lambda_1\lambda_2(1-c)/(1-v\lambda_2)$ ,  $B(0)=\lambda_1\lambda_2$ ,  $K_0=l\beta/(1-v\lambda_2)$  であるから

$$e(t)_{ss} = \left( \frac{1-c}{1-c+l\beta} \right) u_0^* \quad (41)$$

となる。いいかえれば, 目標失業者数  $u_0^*$  と実際の失業者数との乖離  $u-u_0^*$  に対して,  $u$  を  $u_0^*$  へ近づけることを政策目標として政府支出がなされても,  $u_0^*-e(t)_{ss} = l\beta u_0^*/(1-c+l\beta)$  の水準までしか到達することができない。(13式で与えられる数値例および  $\beta=0.2$  (50万人の  $u-u_0^*$  に対して 2兆円の政府支出) のときには約48%の定常偏差が残る。

#### (5) $u(t)$ の時間経路

$g(t)=\beta [u(t)-u^*]$  が導入されたときの  $u(t)$  の時間経路を与える式を求めておこう。⑨式を次のように書く。

$$M(s) = \frac{U(s)}{U^*(s)} = \frac{\left( \frac{l\beta}{1-v\lambda_2+l\beta} \right) (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad (42)$$

ここで

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (43)$$

$$\omega_n = \left[ \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c+l\beta)}{1-v\lambda_2+l\beta} \right]^{1/2} \quad (44)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left[ \lambda_1(1-c+l\beta) + \lambda_2(1-v\lambda_1+l\beta) \right] \left[ \lambda_1\lambda_2(1-c+l\beta)(1-v\lambda_2+l\beta) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (45)$$

したがって  $U^*(s) = 1/s$  に対して

$$U(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2}$$

$\zeta < 1$  のときには

$$u(t) = \frac{l\beta}{1-c+l\beta} + Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

と表わすことができる。

$$u'(t) = -\zeta\omega_n Ae^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + Ae^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

であるから、初期条件

$$u(0) = 0 = \frac{l\beta}{1-c+l\beta} + A \sin \phi$$

$$u'(0) = 0 = -\zeta\omega_n A \sin \phi + A\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cos \phi,$$

より

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \cos^{-1} \zeta$$

$$A = -\frac{l\beta}{1-c+l\beta} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

がえられる。ゆえに次式をうる。

$$u(t) = \frac{l\beta}{1-c+l\beta} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \right\} \quad (46)$$

(3)式で与えられる数値例および  $\beta = 0.2$  のときには次の通りである。

$$u(t) = 0.524 - 0.805 e^{-0.154t} \sin(0.132t + 40.6^\circ) \quad (47)$$

周期は47.6期(約12年)、時定数は6.5期(約1.6年)である。政策の外部ラグのひとつの指標である時定数(平均ラグ)は、いまの例においては

$$\frac{2(1-v\lambda_2+l\beta)}{\lambda_1(1-c+l\beta) + \lambda_2(1-v\lambda_1+l\beta)}$$

によって与えられるから、2のモデルとくらべたとき労働需要関数のパラメータと政策遂行者自らの政策措置の強さ  $\beta$  が外部ラグに新たに影響を及ぼすことがわかる。

構造パラメータが変化すればもちろん外部ラグの長さも変化する。この変化の大きさも安定化政策には重要な意味をもっている(〔5〕第6章)。

$g_1(t) = \beta [u(t) - u^*]$  の導入、すなわち政府支出の一部  $g_1$  が内生化する、システムからのフィードバック効果をもつことによってどのような影響をシステムに付加するかをまとめておこう。

- (i) 安定なシステムが不安定になることはない。
- (ii) 強い措置によってシステムに固有の振動が消える。
- (iii) しかし  $u^*(t) = u_0^*$  (一定) の目標に対して  $(1-c) u_0^*/(1-c+l\beta)$  だけの定常偏差が残る。いいかえれば  $l\beta u_0^*/(1-c+l\beta)$  の水準までしか到達できない。定常偏差を小さくするためには  $\beta$  を大きくしなければならない。(3式で与えられる数値例においては、定常偏差を10%にするためには  $\beta=1.64$  が必要である。この  $\beta$  の値は50万人の  $u-u^*$  に対して約16兆4千億円もの政府支出を意味する。

すなわち、このシステムにおいて  $u^*(t) = u_0^*$  という時間に関して一定の失業水準という目標を、比例政策で達成することは不可能である。定常偏差をゼロにするためにはシステムタイプを0から1にする積分政策が追加され、次のような政策方式がとられねばならない。

$$g_1(t) = \beta_1 [u(t) - u^*] + \beta_2 \int_0^t [u(\tau) - u^*] d\tau$$

このような比例+積分政策をとることによってシステムタイプは0から1へ増大するが、他方不安定化要因をシステムへ持ちこむことになる。しかし最適政策方式を求めることはこの論文の意図するところではない。

4

次に失業者数の実際値と目標値との乖離に比例して政府支出が行なわれるが、支出自体が時間的な遅れをもって配分される場合を考えよう。単純指数ラグを仮定すれば次の通りである。

$$g_1(t) = \frac{\beta\mu}{D+\mu} [u(t) - u^*], \beta > 0, 0 < \mu < 1 \quad (48)$$

システム全体を再度書いておく。

$$c(t) = \frac{c\lambda_1}{D+\lambda_1} y(t), 0 < c < 1, 0 < \lambda_1 < 1 \quad (1)$$

$$i(t) = \frac{v\lambda_2}{D+\lambda_2} Dy(t), v > 0, 0 < \lambda_2 < 1 \quad (2)$$

$$g(t) = \bar{g}_0(t) + g_1(t) \quad (20)$$

$$g_1(t) = \frac{\beta\mu}{D+\mu} [u(t) - u^*], \beta > 0, 0 < \mu < 1 \quad (48)$$

$$l(t) = ly(t) \quad l > 0 \quad (4)$$

$$u(t) = \bar{n}(t) - l(t) \quad (5)$$

$$y(t) = c(t) + i(t) + g(t) \quad (6)$$

このシステムの開ループ伝達関数を  $A_2(s)$  とすると、 $F_3 = \beta\mu/(s+\mu)$  を (4) 式へ代入して次式がえられる。

$$A_2(s) = \frac{\left(\frac{l\beta\mu}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{(s+\mu)\left\{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2}\right\}}$$

$$= A_1(s)\left(\frac{\mu}{s+\mu}\right)$$
(49)

したがって閉ループ伝達関数は次の通りとなる。

$$M(s) = \frac{U(s)}{U^*(s)} = \frac{A_2(s)}{1+A_2(s)}$$

$$= \frac{\left(\frac{l\beta}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$
(50)

ここで

$$a_2 = \frac{1}{1-v\lambda_2} \left[ \lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1) + \mu(1-v\lambda_2 + l\beta) \right]$$

$$a_1 = \frac{1}{1-v\lambda_2} \left\{ \lambda_1\lambda_2(1-c) + \mu \left[ \lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1) + l\beta(\lambda_1 + \lambda_2) \right] \right\}$$

$$a_0 = \frac{\mu\lambda_1\lambda_2}{1-v\lambda_2} (1-c + l\beta)$$

(49)式と(50)式をくらべてみればわかるように、 $A_2(s)$  は  $A_1(s)$  に  $\mu/(s+\mu)$  を追加した形になっている。すなわち図3のように表わすことができる。

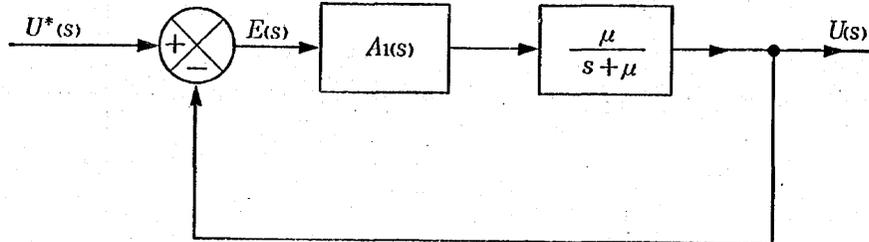


図3 政府支出が単純指数ラグにしたがうときのブロックダイアグラム

$A_1(s)$  に対して極 $-\mu$ が追加されたこのシステムは、一般的にはより不安定となる。実際〔6〕においてはそのような例を分析した。しかし、(49)式で与えられる数値例においては、単純指数ラグで示されるこの比例政策の遅れは、安定なシステムを強い政策措置で不安定にすることはない。このことは図4、図5、図6の根軌跡図に示されている。開ループ伝達関数は次式である。

$$A_2(s) = \frac{\left(\frac{1.1\beta\mu}{0.6}\right)(s+0.4)(s+0.2)}{(s+\mu)(s+0.1-j0.129)(s+0.1+j0.129)}$$
(51)

しかしシステムタイプは依然として0のままであるから定常偏差は残る。実際、 $u^*(t) = u_0^*$  (一定) の目標水準に対して

$$e(t)_{ss} = (1-c)u_0^* / (1-c + l\beta)$$

となり、これは(4)式と同じである。したがって比例政策によって政府支出が直ちになされようと分

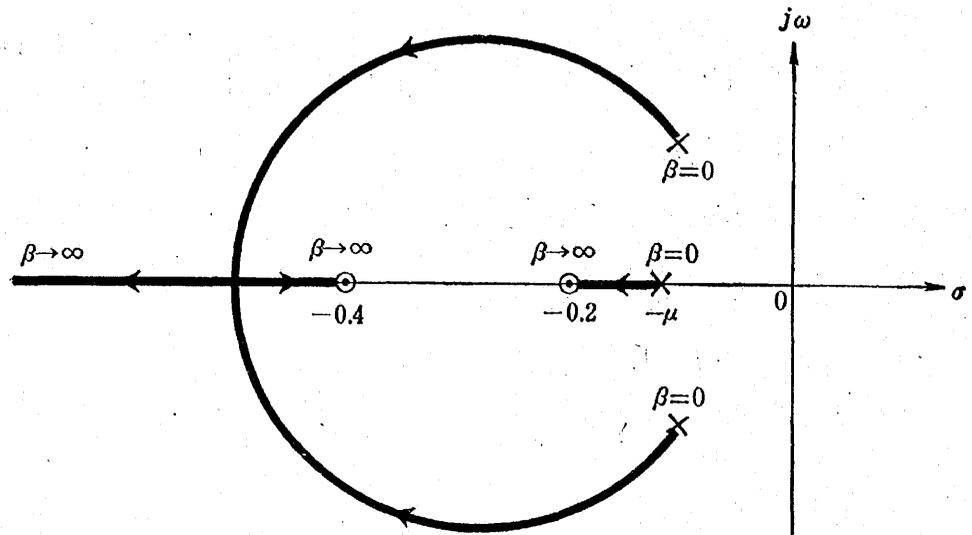


図4 5)式の根軌跡  $0 < \mu < 0.2$

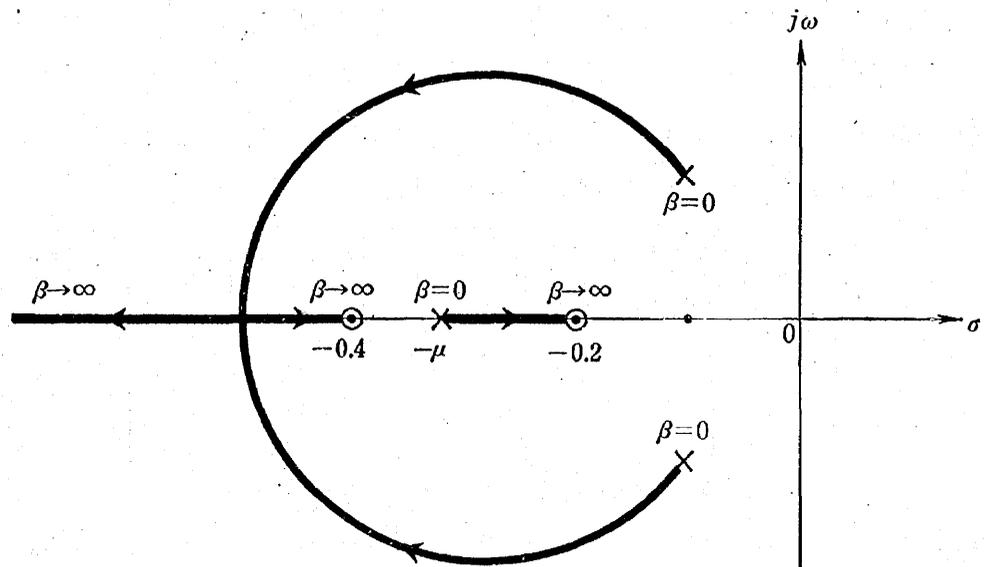


図5 5)式の根軌跡  $0.2 < \mu < 0.4$

布ラグで配分されようと、定常偏差は残り、定常偏差を小さくするのは高い限界消費性向( $c$ )、強い労働需要( $l$ )、強い政策措置( $\beta$ )である。

次に  $u(t)$  の時間経路を求めることにしよう。

(13) 式の構造パラメータおよび  $\beta = 0.2$ ,  $\mu = 0.25$  (時定数1年) を仮定する。このとき

$$M(s) = \frac{U(s)}{U^*(s)}$$

$$= \frac{\left(\frac{0.055}{0.6}\right)(s+0.4)(s+0.2)}{s^3 + \left(\frac{0.325}{0.6}\right)s^2 + \left(\frac{0.079}{0.6}\right)s + \frac{0.0084}{0.6}}$$

政策ラグのシステムへの影響

$$= \frac{0.0917(s+0.4)(s+0.2)}{(s+0.235)(s+0.153-j0.19)(s+0.153+j0.19)}$$

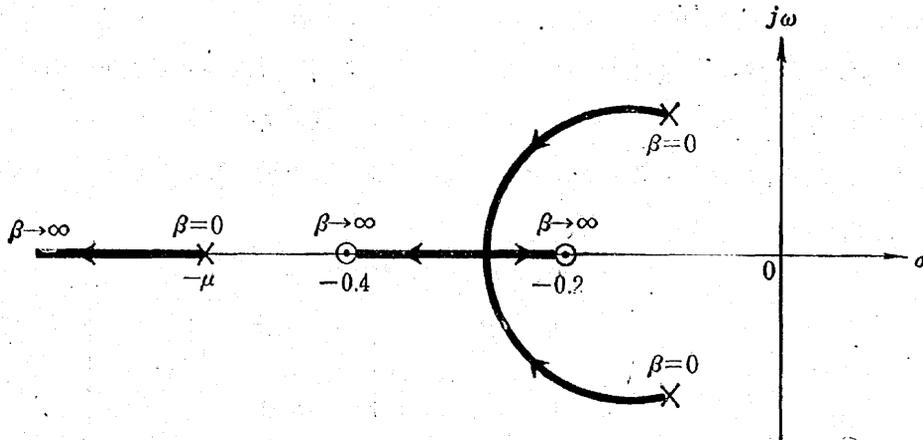


図6 6)式の根軌跡  $0.4 < \mu \leq 1$

したがって  $U^*(s) = 1/s$  の入力に対して

$$U(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+0.235} + \frac{A_2}{s+0.153-j0.19} + \frac{A_3}{s+0.153+j0.19}$$

$$A_0 = sU(s)|_{s=0} = 0.524 (= l\beta/(1-c+l\beta))$$

$$A_1 = (s+0.235)U(s)|_{s=-0.235} = 0.0526$$

$$A_2 = (s+0.153-j0.19)U(s)|_{s=-0.153+j0.19}$$

$$= \frac{0.0917(0.247+j0.19)(0.047+j0.19)}{(-0.153+j0.19)(0.082+j0.19)(j0.38)}$$

$$= \frac{0.0917 \sqrt{(0.247)^2 + (0.19)^2} e^{j\phi_1} \sqrt{(0.047)^2 + (0.19)^2} e^{j\phi_2}}{\sqrt{(-0.153)^2 + (0.19)^2} e^{j\theta_1} \sqrt{(0.082)^2 + (0.19)^2} e^{j\theta_2} 0.38 e^{j\pi/2}}$$

$$= 0.29156 e^{j(\phi_1 + \phi_2 - \theta_1 - \theta_2 - \pi/2)}$$

そして

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 - \theta_1 - \theta_2$$

とおくと

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0.19}{0.247} + \tan^{-1} \frac{0.19}{0.047} - \tan^{-1} \frac{0.19}{-0.153} - \tan^{-1} \frac{0.19}{0.082}$$

$$= -81.8^\circ$$

これらの結果を用いて結局次式がえられる。

$$u(t) = 0.524 + 0.053e^{-0.235t}$$

$$+ 0.583e^{-0.153t} \sin(0.19t - 81.8^\circ)$$

(52)

$u-u^*$  の乖離に比例して政府支出がなされる場合 (6)式) と, 支出が時間的な遅れを伴って配分される場合 (6)式) を比較して  $u(t)$  を  $t=0$  から12まで計算したのが表1である。 $u_0^*=1$ を仮定

しているから、表の数字は目標値1への接近の仕方を示している。しかし前述したように、 $u(t)$  は  $u_0^*$  の 52.4% の水準までしか接近することができない。 $t=4$  において(4)式、(5)式ともに  $u_0^*$  の約23%、 $t=8$ において約36%、 $t=12$ において約44%の水準に達することがわかる。表1は  $u(0)=0$  から出発しているから、話をわかりやすくするために100万人の失業者から出発して  $u_0^*=50$  万人とすれば、表1を用いて  $u(t)$  の経路を表1の( )内のように示すことができる。12期後には約78万人の失業水準になる。究極的に  $u(t)$  は73.8万人の水準にしかならず、この政策方式では50万人の目標は達成できない。

表1  $u(t)$ の時間経路

$t$	(4) 式		(5) 式	
0	0	(100)	0	(100)
1	0.0737	(96.3)	0.0711	(96.4)
2	0.137	(93.2)	0.132	(93.4)
3	0.191	(90.5)	0.186	(90.7)
4	0.238	(88.1)	0.232	(88.4)
5	0.278	(86.1)	0.273	(86.4)
6	0.312	(84.4)	0.307	(84.7)
7	0.342	(82.9)	0.337	(83.2)
8	0.368	(81.6)	0.363	(81.9)
9	0.390	(80.5)	0.385	(80.8)
10	0.409	(79.6)	0.405	(79.8)
11	0.425	(78.8)	0.421	(79.0)
12	0.439	(78.1)	0.436	(78.2)

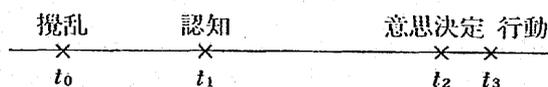
(4)式と(5)式をくらべたとき、両者の相違はきわめて小さい。政府支出の配分が時定数1年の単純指数ラグにしたがうことによってわずかながら  $u^*$  への反応は緩慢になるが、無視しうる程の反応の遅れにすぎない。このシステムの仮説的な構造パラメータの例においては、政府支出が分布ラグをすることの影響は安定性の点からも、過渡応答の点からも重大なものではない。この応答の速応性の類似に関しては(5)式をみればわかるように、代表特性根(特性根のうち実数部の絶対値が最小の根)の実数部-0.153が(4)式に示されている代表特性根の実数部とほとんど同じであることから明らかであろう。

政策ラグのなかで内部ラグと言われているラグが最も重要である。消費や投資のラグのために政府支出、租税、金融政策などの効果は即時的ではなく、徐々に経済に侵透していく。この外部ラグの存在およびその変動のために、除去すべき攪乱に対して速やかに政策発動がなされねばならない。しかし判断を誤まることなく速やかに対応するということは容易なことではない。時点  $t_0$  において

政策ラグのシステムへの影響

攪乱が生じた場合を考えよう。判断の材料となる資料入手の遅れ、その攪乱による効果は一時的ではなく、数四半期に及ぶかどうかの判断、景気の高や谷にいつ到達するかどうかというあいまいにならざるを得ない判断等々によって、時点 $t_0$ の攪乱に対処するための行動が必要であると政策当局によって認知されるまでには $t_1 - t_0$ の時間が経過するであろう(認知ラグ)。

政策の必要性が認識されても、特に財政政策の場合にみられるように実行可能性をめぐる論議、立法化の必要性、議会の承認等々の長い時間の経過がありうる(意思決定ラグ)。そして最後に政策変更の意思決定とそれが実際に遂行されるまでの間に時間が経過する(行動ラグ)。



これらのラグは(8)式に示されているような政策効果の波及過程が分布ラグにしたがう場合とは異なり、離散的なラグとして表わされる遅れであり、政策当局の外にある問題ではない。それゆえ、内部ラグと言われており、次のようにむだ時間 (dead time) 要素をもつ式として表わすことができるであろう。

$$g_1(t) = \beta [u(t-\tau) - u^*] \quad (53)$$

$$g(t) = \bar{g}_0(t) + g_1(t) \quad (20)$$

(53)式のラプラス変換は

$$G_1(s) = \beta e^{-\tau s} [U(s) - U^*(s)]$$

となるから、(24)式に現われる $F_3$ は $\beta e^{-\tau s}$ に等しい。それゆえ、(25)式で与えられる開ループ伝達関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 A_2(s) &= \frac{\left(\frac{l\beta}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)e^{-\tau s}}{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2}} \\
 &= A_1(s)e^{-\tau s} \quad (54)
 \end{aligned}$$

システムの特徴方程式は $1 + A_2(s) = 0$ であるから次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c) + \lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2} \\
 + \left(\frac{l\beta}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)e^{-\tau s} = 0 \quad (55)
 \end{aligned}$$

またこのむだ時間要素をもつシステムのブロックダイアグラムは図7で示される。図3と比較すれば単純指数ラグ $\mu/(s+\mu)$ にかわって、むだ時間要素 $e^{-\tau s}$ になっているだけである。

前と同様にして、むだ時間要素をもつシステム(1), (2), (20), (53), (4), (5), (6)の安定性、定常偏差、過渡応答を検討することにしよう。

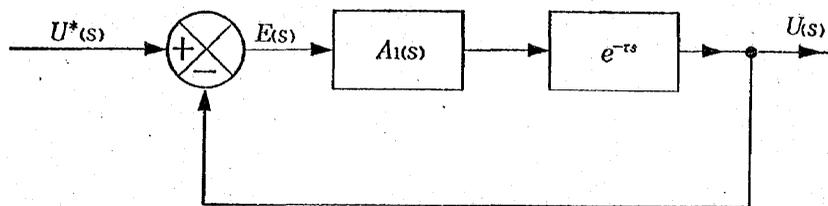


図7 政府支出にむだ時間があるときのブロックダイアグラム

(1) 安定性

まず分析上の困難を指摘しなければならない。 $e^{-\tau s}$  が特性方程式に含まれることによって、微分・定差混合方程式になる64式の安定性を調べるために、これまでのルースの方法は使えない。次の4つの方法が考えられる。

- (i) 根軌跡法
- (ii) ナイキストの安定性判定条件
- (iii) ポポフの条件
- (iv)  $e^{-\tau s}$  を有理式で近似して通常の方法を適用可能にする方法

(i) 根軌跡法

根軌跡図によって安定性を判定するといっても、通常の方法によって64式から根軌跡図を描くことはきわめて困難である。チャン [1] の方法を用いても64式の根軌跡図を描くことは難しいが、チャンの方法の概略を示しておこう。

特性方程式  $1+A_2(s)=0$  において

$$A_2(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}$$

$s = x + jy$  ( $x, y$  は実数) とおくと、特性方程式は次の関係を満たさなければならない。

$$\begin{cases} y = 0 \\ K = -\frac{D(x)}{N(x)} \end{cases} \quad (56)$$

および

$$\begin{cases} \operatorname{Re}N(x+jy)\frac{\operatorname{Im}D(x+jy)}{y} - \operatorname{Re}D(x+jy)\frac{\operatorname{Im}N(x+jy)}{y} = 0 \\ K = -\frac{\operatorname{Re}D(x+jy)}{\operatorname{Re}N(x+jy)} \end{cases} \quad (57)$$

ここで  $\operatorname{Re}$  は実数部、 $\operatorname{Im}$  は虚数部を示す。

64式で与えられる開ループ伝達関数は次のように書くことができる。

$$A_2(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)e^{-\tau s}}{(s+\sigma_1-j\omega_1)(s+\sigma_1+j\omega_1)} \quad (58)$$

したがって

政策ラグのシステムへの影響

$$\begin{aligned}
 N(s) &= (s-z_1)(s-z_2)e^{-\tau s} \\
 &= e^{-\tau s} [s^2 - (z_1+z_2)s + z_1z_2] \\
 D(s) &= (s+\sigma_1-j\omega_1)(s+\sigma_1+j\omega_1) \\
 &= s^2 + 2\sigma_1s + \sigma_1^2 + \omega_1^2
 \end{aligned}$$

とおくことができる。

$$\begin{aligned}
 N(x+jy) &= e^{-\tau x} e^{-j\tau y} [x^2 - y^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2 + jy(2x - z_1 - z_2)]
 \end{aligned}$$

ところが  $e^{-j\tau y} = \cos\tau y - j\sin\tau y$  であるから代入して整理すると

$$\begin{aligned}
 &= e^{-\tau x} \{ \cos\tau y [x^2 - y^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2] + \sin\tau y \cdot y \cdot (2x - z_1 - z_2) \} + \\
 & \quad j e^{-\tau x} \{ \cos\tau y \cdot y \cdot (2x - z_1 - z_2) - \sin\tau y [x^2 - y^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2] \}
 \end{aligned}$$

したがって

$$ReN(x+jy) = e^{-\tau x} (\cos\tau y \cdot A + \sin\tau y \cdot B)$$

$$ImN(x+jy) = e^{-\tau x} (\cos\tau y \cdot B - \sin\tau y \cdot A)$$

ここで

$$A = x^2 - y^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2$$

$$B = y(2x - z_1 - z_2)$$

他方

$$ReD(x+jy) = x^2 - y^2 + 2\sigma_1x + \sigma_1^2 + \omega_1^2$$

$$ImD(x+jy) = 2y(x + \sigma_1)$$

ゆえに根軌跡上の  $x, y$  は次式を満たさなければならない。

$$\begin{cases}
 (x^2 - y^2 + 2\sigma_1x + \sigma_1^2 + \omega_1^2) + Ke^{-\tau x} (\cos\tau y A + \sin\tau y B) = 0 \\
 2y(x + \sigma_1) + Ke^{-\tau x} (\cos\tau y B - \sin\tau y A) = 0
 \end{cases}$$

安定性を検討しよう。虚軸で交わる  $K$  の値を知るために、上式で  $x=0$  とおくと次式がえられる。

$$-y^2 + \sigma_1^2 + \omega_1^2 + K \{ \cos\tau y (-y^2 + z_1z_2) - \sin\tau y \cdot y(z_1 + z_2) \} = 0^*$$

$$2y\sigma_1 + K \{ -\cos\tau y \cdot y(z_1 + z_2) - \sin\tau y (-y^2 + z_1z_2) \} = 0$$

1番目の式に  $\sin\tau y$  を、2番目の式に  $\cos\tau y$  をかけて両式を加えて次式を得る。

$$\sin\tau y (-y^2 + \sigma_1^2 + \omega_1^2) + \cos\tau y (2y\sigma_1) = Kb$$

ゆえに

$$K = \frac{\sin\tau y (-y^2 + \sigma_1^2 + \omega_1^2) + \cos\tau y \cdot 2y\sigma_1}{y(z_1 + z_2)}$$

このとき  $y$  は \* の式によって与えられる。したがって

$$0 < K < \frac{\sin\tau y (-y^2 + \sigma_1^2 + \omega_1^2) + \cos\tau y \cdot 2y\sigma_1}{y(z_1 + z_2)}$$

のとき安定である。

6) および 6) 式を解くことによって根軌跡図を描くことが原理的には可能であるが、むだ時間要素をもついまの例においては、実際上きわめて難解である。それゆえ、根軌跡図による安定性の検討は容易ではない。

(ii) ナイキスト安定条件

根軌跡法よりも多分ナイキストの安定性判定基準による方が解析が容易であろう。ダッソーおよびフーピス [3] は伝達関数

$$\frac{K_1}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

をもつシステムにむだ時間要素が付加されたときの伝達関数

$$\frac{K_1 e^{-\tau s}}{s(1+T_1s)(1+T_2s)}$$

をナイキスト安定条件によって比較して、むだ時間はシステムの安定性を低めると述べている (p. 338)。しかしこの方法は本論文ではとりあげない。

(iii) ポポフの安定条件 [2]

ポポフの安定性条件とは次の通りである。むだ時間要素をもつシステムの状態方程式および出力方程式は、次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + bu(t-\tau) \\ y(t) &= c'x(t-\tau) \end{aligned}$$

ここで  $x$  は状態変数,  $u$  は入力である。

このとき特性方程式

$$|A + e^{-s\tau} A_\tau - sI| = 0$$

の根が半平面  $Res_t \leq -\alpha < 0$  の中に落ち、かつ

$$\frac{1}{K} - Re(1+j\omega q)e^{-j\omega\tau} c' [A + e^{-j\omega\tau} A_\tau - j\omega I]^{-1} b > 0$$

となるような定数  $q$  を見つけることができるならば、そのとき  $k_1 e \leq eg(e) \leq k_2 e$  ( $e$  はエラー) を満たす任意の関数  $g(e)$  に対して、システムは漸近的に安定である。

この方法による安定性の検討は今後の課題として残されており、ここでは単に紹介にとどめた。

(iv)  $e^{-\tau s}$  を有理式で近似する方法 [4]

解析を容易にするという観点から、むだ時間要素  $e^{-\tau s}$  を有理式で近似することを考える。本論文もこの方法を用いる。Padé の近似といわれている近似式は次の通りである。

政策ラグのシステムへの影響

$$e^{-\tau s} \doteq \frac{1 + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-i+1)i!} (\tau s)^i}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-i+1)i!} (\tau s)^i}$$

表2は、 $m, n$  の若干の値に対応する近似式を示している ([4] p. 207)。 $\tau$  が大きいときには、項数を多くとって十分な近似を得る必要がある。

表2 Padé の  $e^{-x}$  の近似式

$m \backslash n$	0	1	2
0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1-x}{1}$	$\frac{1-x+\frac{x^2}{2!}}{1}$
1	$\frac{1}{1+x}$	$\frac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$	$\frac{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{1}{3}x}$
2	$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1-\frac{1}{3}x}{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}$

むだ時間要素をもつシステムの開ループ伝達関数は64式で与えられている。 $e^{-\tau s}$  に表2の  $n=2, m=1$  の近似式を用いると伝達関数は次のようになる。

$$A_2(s) = \frac{\left(\frac{l\beta}{1-v\lambda_2}\right)(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\left(1-\frac{1}{3}\tau s\right)}{\left\{s^2 + \left[\frac{\lambda_1(1-c)+\lambda_2(1-v\lambda_1)}{1-v\lambda_2}\right]s + \frac{\lambda_1\lambda_2(1-c)}{1-v\lambda_2}\right\} \left[1 + \frac{2}{3}\tau s + \frac{(\tau s)^2}{6}\right]} \quad (59)$$

63式で与えられる構造パラメータに対して、69式は次のようになる。

$$A_2(s) = \frac{K(s+0.4)(s+0.2)}{(s+0.1-j0.129)(s+0.1+j0.129)} \frac{2\tau\left(-\frac{3}{\tau}-s\right)}{\left(s+\frac{2}{\tau}-j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\right)\left(s+\frac{2}{\tau}+j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\right)} \quad (60)$$

ここで  $K = l\beta/(1-v\lambda_2)$  であるから

$$K = \frac{1.1\beta}{0.6} \quad (61)$$

60式は次のように書くことができる。

$$\frac{K'(s+0.4)(s+0.2)\left(s-\frac{3}{\tau}\right)}{(s+0.1-j0.129)(s+0.1+j0.129)\left(s+\frac{2}{\tau}-j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\right)\left(s+\frac{2}{\tau}+j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\right)} \quad (62)$$

ここで

$$K' = -2\tau l\beta / (1-v\lambda_2)$$

したがって、62式をむだ時間要素のないシステムの開ループ伝達関数61式とくらべると次のことが

わかる。

(i) 正のゼロ  $3/\tau$  と 2つの極  $-2/\tau \pm j\sqrt{2}/\tau$  が追加されている。正のゼロの追加はシステムを不安定化させる要因となる。

(ii) むだ時間が長く ( $\tau$ が大), 政策措置が強い ( $\beta$ が大) ほどシステムを不安定にする。

(iii)  $K'$  の符号は(8)式のゲイン  $1/\beta(1-\nu\lambda_2)$  とは異符号になる。つまりむだ時間要素のあるシステムは負のゲインをもつ。

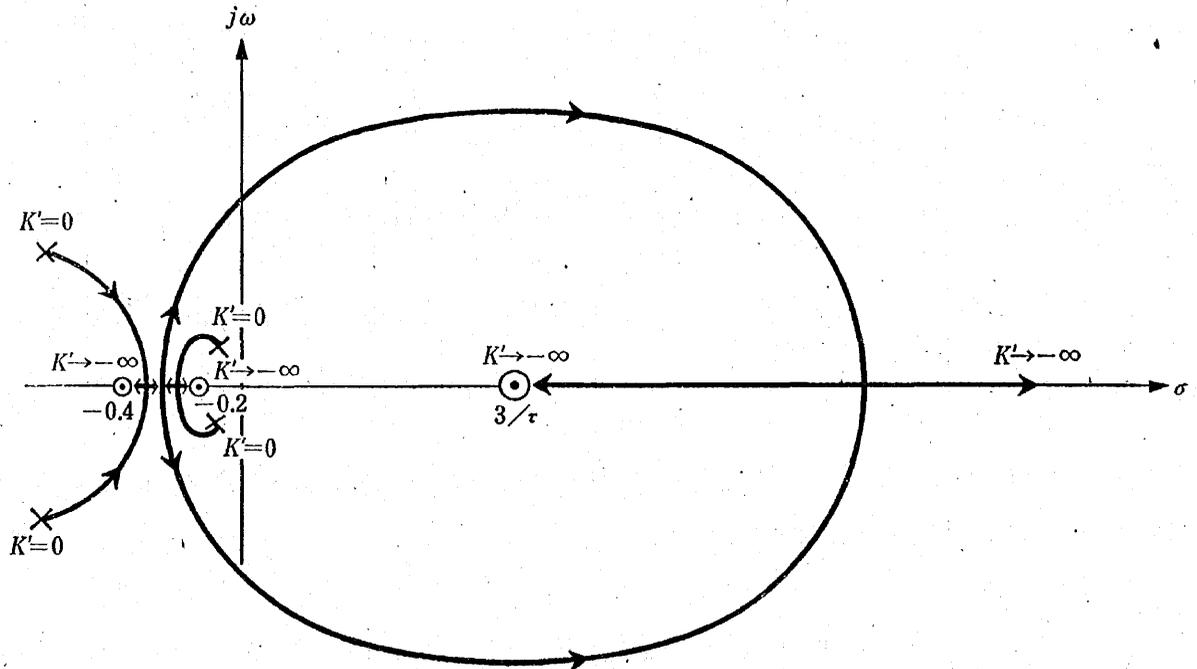


図8 (6)式の根軌跡

(6)式の開ループ伝達関数をもつシステムの根軌跡図は図8のようになる。図8と比較すべき根軌跡は図2である。明らかに、 $g_1(t) = \beta[u(t) - u^*]$  というフィードバック効果を入れても安定的であったシステムが、むだ時間の存在によって不安定になる可能性はきわめて高くなる。実際、 $\tau=1$  (1期のラグ) のとき、 $\beta > 1.012$  という強い措置がとられるならばシステムは不安定になる。たとえば  $\beta=1.364$  のとき  $1+A_2(s)=0$  特性根は  $-0.2571 \pm j0.06245$ ,  $0.6571 \pm j4.359$  となり、実数部が正の根を2つもつ。

このように政策ラグのなかでも、安定性により深く関連しているのは、むだ時間として示される内部ラグである。そして内部ラグが長いほど、また政策措置が強いほど、システムを不安定にすることが示された。このようなむだ時間要素を除去することができないとすれば、政策当局は、 $u - u^*$  のギャップにのみ注目しないで、その変化  $D(u - u^*)$  に注目した微分政策をも併せてとる必要がある。

システムを不安定にし、景気循環を一層大きくするかも知れないこの内部ラグの長さが、金融政策と財政政策の特徴を際立たせていると言われる。金融政策の意思決定ラグは短かく、行動ラグはほとんどゼロであるといわれているのに対して、長い立法手続きと制度的な制約によって財政政策の内部ラグはかなり長いといわれている。外部ラグは、集計需要に直接作用する財政支出の方が、利子率を通じて作用する金融政策よりも短かいであろうが、両政策における内部ラグの長さの相違は、そしてそのラグが分布ラグではなく離散的なラグとして現われることが財政政策の欠点とされてきた。このことは、金融政策の方が有効であるという主張、あるいはビルトイン・スタビライザーの機能にもっと信頼をおくべきであるという主張につながっていく。しかし、性急にこのような結論へいく前に、金融・財政政策のラグ、ビルトイン・スタビライザーの機能について実証分析が必要であろう。

(2) 定常偏差、時間的反応

むだ時間要素がある場合も、システムが安定であるとき  $u^*=u_0^*$  (一定) の目標に対して定常偏差が残り、定常偏差が

$$\left( \frac{1-c}{1-c+l\beta} \right) u_0^*$$

となるのは3, 4の場合と同じである。それゆえ、定常偏差を小さくするためには強い政策措置 ( $\beta$ が大) をとるか、あるいは過去の  $u-u^*$  のギャップの累積に注目して積分政策をとらねばならない。しかし、このいずれの方法も、むだ時間要素のあるシステムにおいては不安定化効果を一層助長することになる。むだ時間要素をもつシステムに対しては、安定性の点からいえば積分政策をとるべきではないし、また強い措置をとるべきでもない。

$G_1(s)=1/s$  の入力に対する  $u(t)$  の時間経路として、(43)式の構造パラメータ、 $\tau=1$  および  $\beta=0.2$  のケース、すなわち  $g_1(t)=0.2 [u(t-1)-u^*]$  のケースを示しておこう。 $\tau=1$  に対して  $\beta=0.2$  はシステムを不安定にすることはない。これらの構造パラメータの値が与えられると開ループ伝達関数は次のようになる。

$$A_2(s) = \frac{-0.733(s+0.4)(s+0.2)(s-3)}{(s+0.1-j0.129)(s+0.1+j0.129)(s+2-j\sqrt{2})(s+2+j\sqrt{2})} \quad (63)$$

したがって、閉ループ伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{U(s)}{U^*(s)} \\ &= \frac{-0.733(s+0.4)(s+0.2)(s-3)}{s^4+3.467s^3+8.587s^2+2.568s+0.336} \\ &= \frac{-0.733(s+0.4)(s+0.2)(s-3)}{(s^2+0.3225s+0.04462)(s^2+3.145s+7.528)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-0.733(s+0.4)(s+0.2)(s-3)}{(s+0.16125-j0.13645)(s+0.16125+j0.13645)(s+1.5725-j2.2484)(s+1.5725+j2.2484)} \quad (64)$$

ゆえに  $U^*(s)=1/s$  の入力に対する  $u(t)$  の経路は次式で与えられる。

$$u(t) = 0.524 - 0.446e^{-0.16t} \sin(0.136t + 138.5^\circ) - 0.575e^{-1.57t} \sin(2.25t + 23.4^\circ) \quad (65)$$

65式の右辺第3項は  $e^{-1.57t}$  によって急速にゼロに収束していき、代表特性根の実数部  $-0.16$  は62式や64式と余り異なっていない。したがってこのケースにおいては、過渡応答にもむだ時間のない場合にくらべてそれほど大きな相違は現われないであろう。実際65式から  $u(t)$  の時間経路を計算すれば、表3がえられる。表1とくらべよ。むしろこのケースにおいては反応は早い。

表3  $u(t)$  の時間経路65式

$t$		
0	0	(100)
1	0.221	(88.9)
2	0.299	(85.0)
3	0.345	(82.8)
4	0.370	(81.5)
5	0.394	(80.3)
6	0.413	(79.3)
7	0.430	(78.5)
8	0.444	(77.8)
9	0.454	(77.3)
10	0.467	(76.7)
11	0.475	(76.2)
12	0.483	(75.9)

6

システムの安定性は、これまでに明らかにしてきたように、政策が実行される以前のシステムの特長(ラグ分布のパラメータを含めた構造パラメータの値)、政策調整方式(微分、比例、積分)、政策ラグの型(内部、外部)とラグの長さおよび政策措置の強さに依存している。本論文で主として考察してきたのは、単純な、安定的な乗数・加速度モデルを用いて、 $u-u^*$  に対して政府支出が比例政策によって行なわれる場合、政策ラグがシステムの特長をどう変えるかということであった。4で述べたように政府支出が時間的な遅れをもって配分されるとき、本論文で考察したシステムにおいては、それはシステムを不安定化させなかった。しかし、一般的に、分布ラグで示される政府支出の遅れは、開ループ伝達関数に  $\mu/(s+\mu)$  の追加、すなわち極を追加することに等しく、極の追加はシステムを不安定化させ、速応性を鈍くする。

単純指数ラグで示される政府支出の遅れ、および離散的なラグで示される政策のむだ時間要素が、システムを不安定にする(単純ではあるが)典型的な例を示しておこう。

$$c(t) = c_1 y(t) - c_2 D y(t), \quad 0 < c_1 < 1, c_2 > 0 \quad (66)$$

$$i(t) = vDy(t), \quad v > 0 \quad (67)$$

$$g(t) = \bar{g}_0(t) + g_1(t) \quad (68)$$

$$g_1(t) = \beta \int_0^t [u(\tau) - u^*] d\tau, \quad \beta > 0 \quad (69)$$

$$u(t) = \bar{n}(t) - l(t) \quad (70)$$

$$l(t) = ly(t), \quad l > 0 \quad (71)$$

$$y(t) = c(t) + i(t) + g(t) \quad (72)$$

このシステムは、図1の信号の流れ図で

$$F_1 = c_1 - c_2s$$

$$F_2 = vs$$

$$F_3 = \beta/s$$

の場合であるから、開ループ伝達関数は(73)式より得られ、次のようになる。

$$A(s) = \frac{l\beta/(c_2 - v)}{s\left(s - \frac{1 - c_1}{v - c_2}\right)} \quad (73)$$

ここで  $v < c_2$  と仮定すれば、仮定によって  $1 - c_1 > 0$  であるから、(73)式の開ループ伝達関数をもつシステムは、 $\beta$ の大きさいかにかわらず安定である。

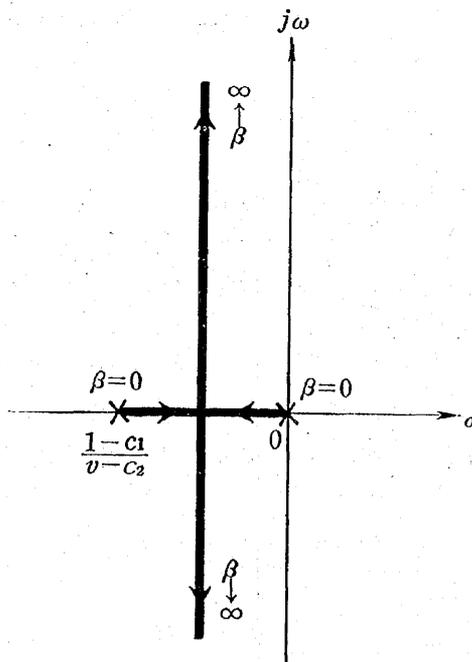


図9 (73)式の根軌跡

69式で示されるこの積分政策に、政府支出が単純指数ラグで示される分布ラグ

$$g_1(t) = \frac{\beta\mu}{D+\mu} \int_0^t [u(\tau) - u^*] d\tau, \quad \beta > 0, \mu > 0 \quad (74)$$

にしたがうケース、およびむだ時間要素をもつ

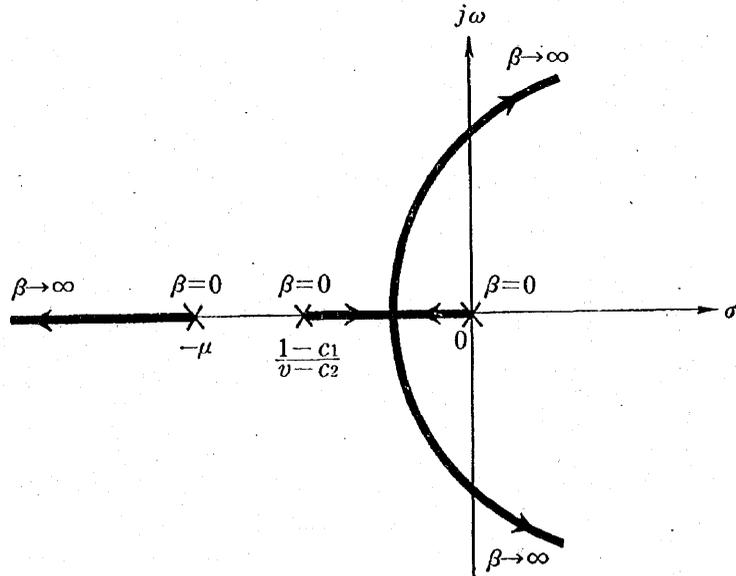


図10 (76)式の根軌跡

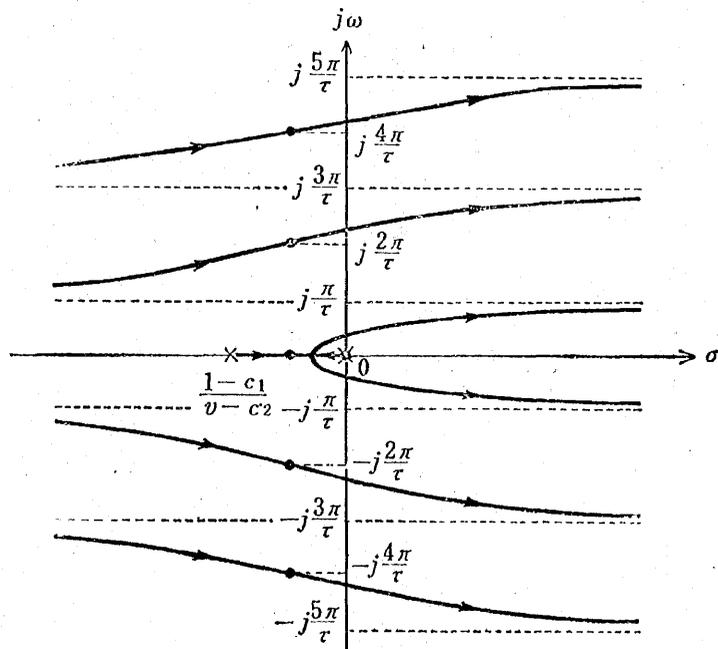


図11 (77)式の根軌跡

$$g_1(t) = \beta \int_0^t [u(t-\tau) - u^*] d\tau, \beta > 0, \tau > 0 \quad (75)$$

のケースにおいては、開ループ伝達関数はそれぞれ次のようになる。

$$A(s) = \frac{l\beta \mu / (c_2 - v)}{s(s + \mu) \left( s - \frac{1 - c_1}{v - c_2} \right)} \quad (76)$$

$$A(s) = \frac{l\beta e^{-\tau s} / (c_2 - v)}{s \left( s - \frac{1 - c_1}{v - c_2} \right)} \quad (77)$$

(75), (76), (77)式の根軌跡図は図9～図11に示した。図11はチャン〔1〕の作図である。この3つの図を比較すれば、政策ラグによってもたらされる不安定化効果は歴然としていることがわかるであろう。

7

政策ラグの問題は、安定化政策において最も重要な問題ではないであろうが、しかし無視できない問題である。外部ラグは政策当局が容易にコントロールしえないけれども、内部ラグはそうではない。5で示したように、むだ時間の長さそのものが不安定化効果をもっているから、攪乱への緩慢な対応は安定化政策そのものを無意味にしかねない。本論文であつてきたむだ時間要素をもつ政策の分析は数学的にはかなり粗く、筆者自身不満足ではあるが、しかし必要なのは数学的精緻化ではなく、金融・財政政策のラグの実証分析であり、それら政策の有効性を安定化政策との関連で分析することであろう。

参 考 文 献

- 〔1〕 Chang, C. H.: "An Analytical Method for Obtaining the Root Locus with Positive and Negative Gain", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1964 January pp. 92-94.
- 〔2〕 Csáki F.: *State Space Methods for Control Systems*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
- 〔3〕 D'Azzo J. J. & Houpis C. H.: *Feedback Control System Analysis & Synthesis*, McGraw-Hill, 1966.
- 〔4〕 伊藤正美: 『自動制御概論』, 昭晃堂, 1977.
- 〔5〕 Mayer T.: *Monetary Policy in the United States*, Random House, 1968.
- 〔6〕 Minotani C.: "Optimal Policy Adjustment Rules, Policy Lags and the Stability of the System", *Keio Economic Studies*, Vol. 14, No. 2, 1978.

(経済学部助教授)