Title	伊藤清三・ 小松彦三郎編 解析学の基礎
Sub Title	S. Ito and H. Komatsu eds. Foundations of analysis
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1978
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.71, No.1 (1978. 2) ,p.88- 90
JaLC DOI	10.14991/001.19780201-0088
Abstract	
Notes	書評
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19780201-0088

書評

伊藤清三・小松彦三郎編

『解析学の基礎』

1

昨今の数理経済学が急速調な展開を遂げた結果，経済理論に活用される数学の多様性も甚だしく増大して，各種専門誌に登場する諸論文は，ひととおり推論の筋道を追跡するだけでもなかなか骨が折れる。そうした状況の中で，理論経済学を研究するに際してとりあえず身につけていなければならない数学的素養は何々か。これは学部や大学院の学生の間でしばしば耳にする至極もっともな不安であろう。いろいろな考え方があろうけれども，筆者自身はメニューを次のふたつにしぼって十分と考えている。第一は高木貞治『解析概論』（改訂第三版）岩波，1961 に該当する講義を聴きながら書物を眼光紙背に徹して熟読すること。第二は線形代数の正確な履習である。これだけでもひと仕事と言うに足る手ごたえがあるはずだが，また本当にこの程度の数理を自在に使いこなせれば，あとは徒手空拳で相当なところまで斬り込んでゆけるし，またそれでなくては困るのである。それ以上の数学は必要に応じてゆっくり勉強してゆけば事足りると思われる。

そうした段階を卒業して，もう少し高級な解析学を必要としている，とくに大学院レベルの学生諸氏のために，標記の書物を初等的な箇所に重点をおきながら紹介したい。

全体の構成は三つの章に分たれており，第1章　解析函数（一松信，柳原二郎執筆），第2章　測度と積分（伊藤清三執筆），第3章　函数空間論（小松彦三郎執筆）となっている。

2

第1章は（複素）函数論として通常教えられている標準的な内容であるが，『解析概論』の第5章よりは余程難しいところまで筆を延ばしている。巾級数論については簡単な復習をするだけで，ただちに正則な複素函数の議論が始まる。

応用上，函数論の最初の目標が Cauchy の積分定理にあることは勿論だが，本書ではここに至る道案内はあまり親切とは言えない。まず線積分一般についての知識は十分に既知とされているので，たとえば「区分的に滑らかな閉曲線」などという用語が準備なしに用いられる。件の定理の証明は Stokes の定理を援用して行なわれるものであるが，初学者にとっては呑み込みにくいかもしれない。むしろ“複素平面 C の開集合 D で正則な函数 $f(z)$ について，微分形式 $f(z)dz$ は必ず D において閉じている”ことを主張する Cauchy の定理を（たとえば Goursat の初等的な手法で）導き，それを通じて積分公式に至る途がより明澄ではあるまいか。この方法を採択する場合には，Morera の定理も上記の形式の Cauchy の定理の逆として適当に述べ直しておくのがよい。

また整理の仕方という点では，“全空間で正則かつ有界な函数は定数に限る”という Liouville の定理の扱いも少し気になる。本書ではこれを Cauchy の積分公式の系から導出しており，勿論これでもかまわないが，そのすぐあとで Cauchy の係数評価式（Cauchy の不等式）を述べているのであるから，Liouville の定理はそれからただちに明らかであることを読者は注意しておくべきであろう。その方が簡明であろうと思われる。もっともこれは多分に好みの問題であって，本質にかかわることではない。さらに Liouville の定理から得られる結果として，所謂「代数学の基本定理」も不可欠で，読者は自らそれを補いつつ読み進むべきである。

留数の計算とその積分法への応用については非常に懇切であって，豊かな例題と演習が用意されている。その他の基本事項としてはたとえば，最大値の原理と Schwartz の補題が述べられ，その striking な応用例として，Riemann の等角写像定理が端然と証明されている。この美しい定理の証明は，それほど容易ではないが味わうべきものがあろう。実は，この水準の定理になると，学部の講義では時間が足りずにスキップしてしまうことが多いのである。

各種の初等函数，特殊函数の解説も詳細で手際がよく，また複素領域における常微分方程式論のていねいな解説も応用家にとっては有益と思われる。

従来，経済学の分野で複素解析がいきいきとした活躍の場を得たことは殆どなかったと言ってよい。しかしながら，筆者自身が，身近の経済学研究者の間で着々と進行している若干の実験的な計算に立ちあった経験からみて，複素解析が本来の威力を発揮すべき余地

は決して小さくないと感じられる。それは微分方程式とか確率論とかを通して間接的に必要とされることもあるし，また一層直接的に，経済分析に現われる具体的な（とくに有理函数の）特異積分の計算が，実は複素数を用いることによってはじめて「見透しよく」（『解析概論』p. 122）理解されることを思えば，むしろ当然のことなのである。

3

第2章は Lebesgue 積分論の標準的な解説であるが，視野の広い，しかも簡明な好篇である。経済学における積分論のひとつの使い方としては，W. Hildenbrant *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton, N. J.) 1974 などを見ていただきたい。

まず集合環上の Jordan 測度，σ-代数上の測度が公理的に与えられたのち，可算加法的な Jordan 測度を σ-代数上の測度に拡張する方法が示される（Hopf の拡張定理)。通例どおり，所与の Jordan 測度から Carathéodoryの外測度を構成し，それをその外測度に関して可測な集合の作るσ-代数に制限することによって所望の拡張が得られるのである。この推論に用いられる手続は煩雑ではあるが，さして難しいわけではない。ここを明確に理解しておかないと，たとえば直積測度という大切な概念もボンヤリしてしまうはずである。

つづいて定石どおり，可測函数の概念とその基本性質（単函数の収束，Egorov の定理等々)，Lebesgue 積分の定義とその基本性質（各種収束定理，Fubini の定理等々）が念入りに説明されている。この部分の演習問題には Lusin の定理とか，L^1 函数の Fourier 変換の連続性など重要な結果も含まれているから，見逃さずに解いておきたいものである。

ただ Riemann 積分と Lebesgue 積分との関係を立ち入って研究することはなされていない。たとえば，“$[a, b]$ 上で有界な函数 $f(x)$ が Riemann 可積分であるためには $f(x)$ が殆どいたるところ連続なることが必要十分である。しかもこのときには $f(x)$ は Lebesgue 可積分でもあって，ふたつの積分は合致する”という事実は重要であるが，この点を認識するためには，pp. 135-136 の問題9を是非考えてみる必要があると思われる。さらに細かな注意であるが，具体的な計算上大切な点として，たとえば，積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx\ ;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

などは Riemann の特異積分としては存在するが，Lebesgue 可積分ではない。こうしたリマークが演習として付加されたならば，一層周到であったかと思われる。

加法的集合函数（複号測度）に関しては，Hahn 分解，Jordan 分解，Radon-Nikodym の定理など，本質的な結果が十分に論じられている。

応用上非常に大切な実軸上の Lebesgue 積分に対しても，微積分法の基本定理とか不定積分の微分可能性の問題が論じられているが，ここで欲を言えば，有界変動函数と絶対連続函数に関する系統的な整理が，本文または演習としてほしかったと思う。この領域の命題の証明には，しばしば Vitali の “covering lemma” が用いられるが，本書では「右から見えない点」という概念を用いる F. Riesz の方法が踏襲されている。

通常，積分論で講義されるのは以上の程度であるが，本書ではさらに進んで，函数空間として特に重要な L^p 空間と連続函数空間 $\mathscr{C}(X)$（これついては後にまた触れる)，ならびに Hilbert 空間上の Fourier 解析の要点が要領よく整理されており，初学者にとって貴重であろう。Plancherel の定理，Paley-Wiener の定理や Bochnerの定理を含め，またある程度の見透しをつけた上での解説であるが，実は本格的に Fourier 解析を使いこなすためには，もう少し詳しい結果を必要に応じて知っていかねばならない。(河田龍夫『Fourier 解析』(産業図書) 1975などを参照。)

4

第3章は，函数解析学をかなり一般的な形式で述べたものであり，はじめのふたつの章に比べると大分レベルが上がっている。L. Schwartz による超函数論の開発と相呼応して，Banach 空間よりも一般な局所凸線形位相空間の上で函数解析を整理する切実な必要が生じてきたことは周知のところであろう。巻末の参考文献にも挙げられている Bourbaki や Grothendieck の業績は，この方向での努力の monument とみなすことができよう。本書の叙述も，この精神をある程度貫こうとする意図を以て書かれたと思われるので，議論がひとまわり難しくなっているのである。

まず代表的なタイプの線形位相空間が定義され，演習として多くの例が提供されている。たださらに初歩的な事例に関しては，あっさりと扱われているにすぎないから，その辺のトレーニングが不十分な向きは，

たとえば l^p, L^p, $\mathscr{C}(X)$, ……などの完備性を自らの手でチェックしてみるとよいであろう。（L^pについては第2章 p. 152 を参照。）

Hilbert 空間の双対空間の表現に関する F. Riesz の定理は，Hibert 空間論の foundation とも言うべき重要な定理であるが，Banach 空間，局所凸線形位相空間でも同種の解析を行なおうとすると，まず（自明でない）有界線形汎函数の存在証明から出発しなければならない。この要求に応えるのが Hahn-Banach の定理なのである。実は経済学者にも馴染みの深い凸集合の分離定理は，Hahn-Banach の定理の幾何学的なイメージとして把握されるもので，経済学研究者は，周知の定理を一層高く広い視野の下に眺めなおすことができるはずである。これを理解した読者は，G. Debreu "Valuation Equilibrium and Pareto Optimum" *Proc. N. A. S.* vol. 40, 1954, pp. 588-592 を研究してみることをおすすめしたい。

各種線形位相空間の双対空間の表現論も相当詳細に論じられており，これほど懇切な叙述を施した成書は稀だと思う。Banach 空間としては，L^p，Xをコンパクト位相空間としたときの連続函数空間$\mathscr{C}(X)$，局所コンパクト位相空間Xにおいて"無限遠点で消える"（vanishing at infinity）連続函数空間$\mathscr{C}_0(X)$などの双対空間が決定され，さらに一般に，局所コンパクト空間X（resp. R^n の開集合Ω）で台がコンパクトな連続（resp. 無限回微分可能な）函数の空間に，所謂inductive limit による位相を与えて得られる局所凸線形位相空間 $\mathscr{K}(X)$（resp. $\mathscr{D}(\Omega)$）の双対として Radon 測度（resp. 超函数）が規定される。これらの証明の準備として線形束，ノルム束の双対が正確に整理されているのも，見る目に清々しい。しかし，確率論や経済学に現われる連続函数族の定義域は必ずしも局所コンパクトでない（たとえば単に距離空間）場合も多く，"Xを任意の正規空間とするときに，$\mathscr{C}(X)$ の双対空間はX上の正則 Borel Jordan 測度の空間と同一視しうる"という形の定理が便利であることに注意しておこう。

双対空間の位相構造を調べる際にも局所凸空間レベルで解析が進行するので，通常は双対空間における単位球の汎弱一コンパクト性を主張する Alaoglu の定理も，ヨリ一般の形式を付与されている。経済学にとって powerful な，non-atomic 有限次元ベクトル測度に関する Ljapunov 定理も Alaoglu の定理の応用として得られるので，力のある読者は考えてみるとよい（ただし容易ではない！）。演習問題には Smulian, Eberlein の定理など大切なものが含まれている。

つづいて，連続線形作用素論。定石どおり Banach の閉グラフ定理，Banach-Steinhaus の共鳴定理などが述べられたあと，線形作用素の重要例が詳細に検討されている。積分作用素，Fourier 変換といった基本的なものから，Sobolev 空間の埋蔵，補間定理など，現代的な話題にも十分に筆が伸びており，心踊る一節であろう。

本書の大詰めは，コンパクト作用素（Riesz の理論)，Fredholm 作用素の基本，Dunford の operational calculus と所謂スペクトル写像定理（spectral mapping theorem)，そして最後に，連続自己共役線形作用素のスペクトル分解の解説をつうじて，函数解析の本領の一端が示されている。

コンパクト線形作用素論の叙述には，やや具体例の不足が感じられる。たとえば$[a, b]^2$ 上で連続な積分核を有する積分作用素について検討してみるとよい。それと同時に理論の応用例，特に積分方程式への応用が周到に述べられていたならば，読者にとっては一層有益であったろうと惜しまれる。Riesz-Schauderの択一定理をめぐって，コンパクト作用素と Fredholm 作用素の交渉が詳しく論じられているが，実はさらにこの間の全貌を明らかにするためには，Banach 代数の理論が必要になる。たとえば Banach 空間 $\mathfrak{X}$ 上の有界線形作用素の作る Banach 代数を $L(\mathfrak{X})$，コンパクト作用素の作る部分代数を $C(\mathfrak{X})$ とするとき，"$T \in L(\mathfrak{X})$が Fredholm 作用素であるためには，$C(\mathfrak{X})$を法としてTが生成する同値類が，商代数 $L(\mathfrak{X})/C(\mathfrak{X})$の可逆元となることが必要十分である"事実が知られている（Atkinson, 1951)。H. O. Cordes らの最近の仕事も興味深い。

Dunford の operational calculus についてもあまり応用方面は書かれていないので，読者は他の書物でそれを補充しつつ研究しなければならない。

以上，簡単に紹介してきた本書は，岩波書店から刊行中の現代数学演習叢書中の一冊であり，読者は姉妹篇の吉田耕作・伊藤清三編『函数解析と微分方程式』と，これを併読し，丹念に演習を解かれるならば，少なくとも現代解析学の基礎は自家薬籠中のものとすることができるであろう。〔岩波書店，1977年12月刊，xiv+518 ページ，6,000円〕

丸 山 徹
（経済学部助手）