Title	確率測度の*弱収束 : 均衡分析への応用のために(二)
Sub Title	Weak * convergence of probability measures : for applications to equilibrium analysis
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1978
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.71, No.1 (1978. 2) ,p.45- 56
JaLC DOI	10.14991/001.19780201-0045
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19780201-0045

確率測度の＊弱収束

——均衡分析への応用のために——

(二)

丸　山　　徹

7　直積測度の＊弱収束

(X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) をふたつの距離空間とし，その直積空間上のBorel測度の＊弱収束と，その周辺分布 (marginal distribution) の＊弱収束の関係について述べる。周知のとおり，$X=X_1\times X_2$ の直積位相は距離

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mathrm{Max}\ \{\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)\};\quad (x_1, x_2), (y_1, y_2)\in X$$

によって定まる位相であることに注意しておこう。

レンマ4　直積 $X=X_1\times X_2$ が可分距離空間であるとき，

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2\ 。$$

ここで $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ はそれぞれ X, X_1, X_2 上のBorel σ- field である。

証明)[36] まず $\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}$ を示す。いま直積 X から X_1, X_2 への射影を proj_1, proj_2 とすれば，これは連続であるから可測。したがって，$E_1\in\mathscr{B}_1$, $E_2\in\mathscr{B}_2$ とすれば，

$$E_1\times E_2=\mathrm{proj}_1^{-1}(E_1)\cap\mathrm{proj}_2^{-1}(E_2)\in\mathscr{B}$$

ゆえに，

$$\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}\ 。$$

つづいて $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2$ を示そう。X における任意の開集合を G とする，X は可分な距離空間であるから，X_1 および X_2 における可算個の開集合の列 $\{U_1, U_2, \cdots\cdots\}$, $\{V_1, V_2, \cdots\cdots\}$ が存在して

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n\times V_n)$$

とすることができる。ゆえに

$$G\in\mathscr{B}_1\otimes\mathscr{B}_2\ 。$$

これからただちに所望の帰結をうる。

(証了)

定理9　(X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2) の直積 (X, ρ) を可分な距離空間とするとき，$\mathscr{M}(X)$ の点列 $\{\mu_n\}$ が μ に＊弱収束するための必要十分条件は，X_1 の μ_1－連続集合 A_1 と X_2 の μ_2－連続集合 A_2 に対して，

$$\lim_n \mu_n(A_1\times A_2)=\mu(A_1\times A_2)$$

の成り立つことである。ただし，μ_1 および μ_2 は μ の周辺確率分布である。

証明)[37] <必要性> X, X_1, X_2 のそれぞれにおける境界を ∂, ∂_1, ∂_2 と書くことにすれば，

$$\partial(A_1\times A_2)\subset((\partial_1A_1)\times X_2)\cup(X_1\times(\partial_2X_2))$$

であるから，必要性は明らか。

<十分性>　系1を用いる。

$$\mathscr{W}\equiv\{A_1\times A_2\subset X\,|\,A_i\text{ は }\mu_i-\text{連続},\ i=1, 2\}$$

注(36)　たとえば，Billingsley〔2〕pp. 225.
(37)　Billingsley〔2〕pp. 20-21.

とおけば，$\mathscr{W}$ は有限個の共通部分をとる操作について閉じている。また仮定により，

$$\mu_n(A)\to\mu(A) \quad \text{for all } A\in\mathscr{W}$$

$(x_1, x_2)\in X$, $\epsilon>0$ とし，(x_1, x_2) を中心，$\delta<\epsilon$ を半径とする開球

$$\begin{aligned}&B_\delta((x_1, x_2))\\&=\{(y_1, y_2)\in X\mid\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2))<\delta\}\\&=\{y_1\in X_1\mid\rho_1(x_1, y_1)<\delta\}\\&\quad\times\{y_2\in X_2\mid\rho_2(x_2, y_2)<\delta\}\end{aligned}$$

を考える。$\delta\neq\delta'$ とすれば

$$\begin{aligned}&\partial_1\{y_1\in X_1\mid\rho_1(x_1, y_1)<\delta\}\\&\quad\cap\partial_1\{y_1\in X_1\mid\rho_1(x_1, y_1)<\delta'\}=\emptyset\\&\partial_2\{y_2\in X_2\mid\rho_2(x_2, y_2)<\delta\}\\&\quad\cap\partial_2\{y_2\in X_2\mid\rho_2(x_2, y_2)<\delta'\}=\emptyset\end{aligned}$$

したがって，$0<\delta<\epsilon$ なる適当な δ に対して，$B_\delta((x_1, x_2))\in\mathscr{W}$。

そこで系1を用いることにすれば，ただちに所望の帰結をうる。

（証了）

系3　$X=X_1\times X_2$ を可分な距離空間とするとき，$\mathscr{M}(X_1)$, $\mathscr{M}(X_2)$ の点列 $\{\mu_{1n}\}$, $\{\mu_{2n}\}$ について

$$\begin{aligned}&w^*\text{-}\lim_n\ \mu_{1n}\times\mu_{2n}=\mu_1\times\mu_2\\&\Longleftrightarrow w^*\text{-}\lim_n\mu_{1n}=\mu_1\\&\quad\text{かつ } w^*\text{-}\lim_n\ \mu_{2n}=\mu_2\end{aligned}$$

8　確率変数の法則収束[38]

(X, ρ) を距離空間とし，その上には Borel σ-field $\mathscr{B}$ が定まっているものとする。また $(\Omega, \mathscr{E}, \mathrm{P})$ を確率測度空間としよう。写像

$$\xi:(\Omega, \mathscr{E})\to(X, \mathscr{B})$$

が可測，すなわち $\xi^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{E}$ を満たすとき，ξ を X-値の**確率変数** (random variable) と言う。ξ が確率変数であるとき，任意の $E\in\mathscr{B}$ に対して，

$$\mu(E)=\mathrm{P}(\xi^{-1}(E))=\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\xi(\omega)\in E\}$$

とおくことによって，可測空間 $(X, \mathscr{B})$ 上にひとつの確率測度 μ が定義される。この μ を ξ の**分布** (distribution) と呼ぶのである。

いま確率測度空間の列を $\{(\Omega_n, \mathscr{E}_n, \mathrm{P}_n)\}$，その各々の上で定義された X-値の確率変数の列を $\{\xi_n\}$，さらに ξ_n の分布を μ_n としよう。$w^*\text{-}\lim_n \mu_n=\mu$ が成り立つとき $\{\xi_n\}$ は ξ に**法則収束** (convergence in distribution, —— in law) すると言い，これをしばしば

$$\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$$

などと書く。

重要な注意　法則収束を定義するには，ξ_n の定義域が n とともに変わってもよいことに注目すべきである。

定理10　確率変数 $\xi:(\Omega, \mathscr{E}, \mathrm{P})\to X$ とふたつの確率変数の列 $\{\xi_n: \Omega\to X, \}$, $\{\xi_n': \Omega\to X\}$ が条件

(i)　$\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$

(ii)　$\rho\{\xi_n(\omega), \xi_n'(\omega)\}\longrightarrow 0$　　（測度収束）

を満たすものとすれば，$\xi_n'\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$。

証明[39]　$F\subset X$ を任意の閉集合とすれば，明らかに

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\xi_n'(\omega)\in F\}\\&\leqq\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\xi_n(\omega)\in\overline{B_\delta(F)}\}\\&\qquad+\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\rho\{\xi_n(\omega), \xi_n'(\omega)\}\geqq\delta\}\end{aligned}$$

であるが，仮定(ii)により，$n\to\infty$ につれて右辺第2項は0に収束する。また $\xi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}\xi$ より，

$$\begin{aligned}&\overline{\lim_n}\ \mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\xi_n'(\omega)\in F\}\\&\leqq\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\mid\xi(\omega)\in\overline{B_\delta(F)}\}\end{aligned}$$

$\delta\downarrow 0$ とすれば $\overline{B_\delta(F)}\downarrow F$ であるから，ただちに所望の帰結を得る。　　（証了）

単位区間 $I=[0, 1]$ 上に Lebesgue 測度を定めた空間をしばしば **Wiener 空間**と呼ぶ

定理11　X を完備，可分な距離空間とするとき，任意の $\mu\in\mathscr{M}(X)$ に対して，分布を μ とするような，Wiener 空間 I 上の確率変数

注(38)　本節の内容については，とくに Billingsley〔3〕pp. 6-9. を参照。ξ の値域が $\mathbf{R}^n$ である場合と区別するために "random elements" と呼ぶことも多い。

(39)　Billingsley〔3〕p. 6. ここでの議論は ξ_n の定義域が n ごとに異なっている場合についても成立する。

$$\xi : I \to X$$

が存在する。

証明)[40] 各 $k>0$ に対して可算個の可測集合によるXの分割 $\mathscr{A}_k=\{A_{k1}, A_{k2}, \cdots\}$ を

$$\text{diameter of } A_{ku} \leqq 1/k \quad \text{for all } u=1, 2, \cdots$$

となるように作る。[41] また $\mathscr{A}_{k+1}$ は逐次 $\mathscr{A}_k$ を細分してえられるものとしよう。これに対応して I の分割 $\mathscr{I}_{ku}=\{I_{k1}, I_{k2}, \cdots\}$ を

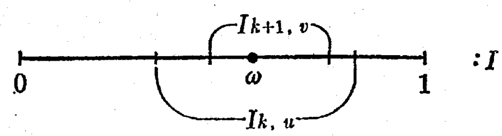
$$|I_{ku}|=\mu(A_{ku})$$

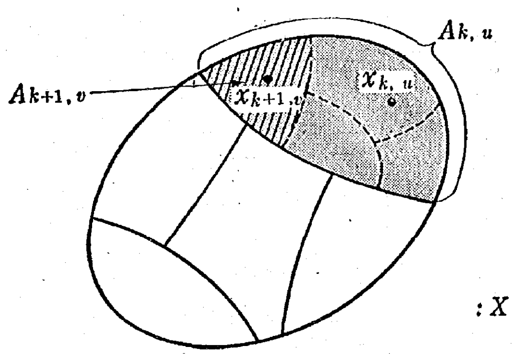
(ここで $|I_{ku}|$ は区間 I_{ku} の長さ) を満たすように作り，$\mathscr{I}_{n+1}$ は $\mathscr{I}_n$ の細分であるようにする。その際,

$$A_{ku} \supset A_{k+1,v} \Longleftrightarrow I_{ku} \supset I_{k+1,v}$$

となるように添数をふることにしよう。いま A_{ku} の中から一点 x_{ku} を選んで確率変数

$\xi_k : I \to X$ を





〈図1〉

$$\xi_k(\omega)=x_{ku} \quad \text{if } \omega \in I_{ku} \tag{1}$$

と定義する。すると $\mathscr{A}_{k+1}$ は $\mathscr{A}_k$ の細分であることから,

$$\{\xi_k(\omega), \xi_{k+1}(\omega), \cdots\}$$

はすべて $\mathscr{A}_k$ のある**ひとつ**の元（集合）に属する。したがって diameter of $A_{ku} \leqq \frac{1}{k}$ により，各 $\omega \in I$ について $\{\xi_k(\omega)\}$ はXの Cauchy 列である。Xは完備ゆえ

$$\lim_k \xi_k(\omega) \equiv \xi(\omega)$$

が存在し，この極限は

$$\rho(\xi(\omega), \xi_k(\omega)) \leqq \frac{1}{k} \tag{2}$$

を満たす。すると，任意の閉集合 $F \subset X$ について

$$\begin{aligned}
&\mu\{\omega \in I | \xi_k(\omega) \in F\} \\
&\leqq \mu\{\omega \in I | \xi_k(\omega) \in \bigcup_{\substack{u \\ A_{ku}\cap F \neq \emptyset}} A_{ku}\} \\
&= \sum_{\substack{u \\ A_{ku}\cap F \neq \emptyset}} \mu\{\omega \in I | \xi_k(\omega) \in A_{ku}\} = \sum_{\substack{u \\ A_{ku}\cap F \neq \emptyset}} |I_{ku}| \\
&= \sum_{\substack{u \\ A_{ku}\cap F \neq \emptyset}} \mu(A_{ku}) \leqq \mu(\overline{B_{1/k}(F)})
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\overline{\lim_k}\, \mu\{\omega \in I | \xi_k(\omega) \in F\} \leqq \mu(F)$$

したがって，ξ_k の分布は μ に＊弱収束する。また(2)と定理10によって，$\xi_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \xi$ であるから ξ の分布は μ でなければならない。（証了）

定理12(Skorohod) Xを完備，可分な距離空間とする。$\mathscr{M}(X)$の点列$\{\mu_n\}$に対して，$w^*-\lim \mu_n=\mu \in \mathscr{M}(X)$ が成り立つとすれば次の条件を満たす Wiener 空間 I 上の確率変数 $\xi^{(n)}$, $\xi : I \to X$ が存在する。

i) ξ および $\xi^{(n)}$ はそれぞれ分布 μ, μ_n ($n=1$,

注(40) Billingsley〔3〕pp. 6-7.

(41) たとえば次のようにすればよい。Xは可分であるから，半径 $1/k$ の可算個の開球$\{Uk_1, Uk_2, \cdots\cdots\}$でXを被覆することができる。

次に

$$\begin{aligned}
&Ak_1=Uk_1 \\
&Ak_2=Uk_2 \setminus Uk_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&Ak_n=Uk_n \setminus \left(\bigcup_{u=1}^{n-1} Uk_u\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

とすればよろしい。

2, ……）を有する。

ii) $\lim_{n} \xi^{(n)}(\omega)=\xi(\omega)$ for all $\omega \in I$

証明)[42] まず $\delta \neq \delta'$のとき $\partial B_{\delta}(x) \cap \partial B_{\delta'}(x)=\emptyset$ であるから，xを中心とする開球は，たかだか可算個の半径をのぞいてμ-連続集合であることに注意する。したがってXは，直径 $\leqq 1/n$ なる可算個のμ-連続集合 $A_1, A_2,$ ……によって被覆される。一般性を失うことなく，これらの集合は互いに素となるように選ぶことができる。(注(41)を見よ)

そこで定理11に準じて，Xの分割$\mathscr{A}_k$をつくるが，今度はその元が全部μ-連続となるように作る。

また同様にIの分割$\mathscr{I}_k$を考える。そして各nに対して，

$$\begin{cases} \mathscr{I}_k^{(n)}=\{I_{k1}^{(n)},\ I_{k2}^{(n)},\ \cdots\} \\ |I_{ku}^{(n)}|=\mu_n(A_{ku}) \end{cases}$$

を構成する。添数は

$$I_{ku}^{(n)}<I_{kv}^{(n)} \Longleftrightarrow I_{ku}<I_{kv}$$

を満たすようにふることにしよう。(ここで，$I_{ku}<I_{kv}$ は区間 I_{ku} が I_{kv} の左側にあることを表わしている。)

前定理と同様に，$x_{ku} \in A_{ku}$ を pick up して，

$$\begin{aligned} \xi_k^{(n)}(\omega)&=x_{ku} \quad \text{if } \omega \in I_{ku}^{(n)} \\ \xi_k(\omega)&=x_{ku} \quad \text{if } \omega \in I_{ku} \end{aligned}$$

とすれば，

$$\begin{aligned} \xi_k^{(n)}(\omega)&\longrightarrow \xi^{(n)}(\omega) \quad \text{as } k \to \infty \\ \xi_k(\omega)&\longrightarrow \xi(\omega) \quad \text{as } k \to \infty \end{aligned}$$

であり，しかも

$$\begin{aligned} &\rho(\xi^{(n)}(\omega),\ \xi_k^{(n)}(\omega)) \leqq \frac{1}{k} \\ &\rho(\xi(\omega),\ \xi_k(\omega)) \leqq \frac{1}{k} \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ。

そして，ξ と $\xi^{(n)}$ の分布はそれぞれ μ, μ_n であることも前定理と同様にして示される。

さて，

$$\sum_u \{\mu(A_{ku})-\mu_n(A_{ku})\}=0$$

であるから，

$$\begin{aligned} &\sum_u |\,|I_{ku}|-|I_{ku}^{(n)}|\,| \\ &=\sum_u |\mu(A_{ku})-\mu_n(A_{ku})| \\ &=2\sum_u \mathrm{Max}\{\mu(A_{ku})-\mu_n(A_{ku}),\ 0\} \end{aligned}$$

A_{ku} は μ-連続，かつ w^*-$\lim_{n} \mu_n=\mu$ ゆえ，

$$\mathrm{Max}\{\mu(A_{ku})-\mu_n(A_{ku}),0\} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

これから

$$\lim_{n\to\infty} \sum_u |\,|I_{ku}|-|I_{ku}^{(n)}|\,|=0 \tag{4}$$

いまkとu_0を固定する。α を I_{ku_0} の左の端点，α_n を $I_{ku_0}^{(n)}$ の左の端点とすれば，(4)から

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{\substack{u \\ I_{ku}<I_{ku_0}}} |I_{ku}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{u \\ I_{ku}^{(n)}<I_{ku_0}^{(n)}}} |I_{ku}^{(n)}| \\ &=\lim_{n\to\infty} \alpha_n \end{aligned}$$

右の端点についても同様である。

したがって $\omega \in \mathrm{int}\ I_{ku}$ とすれば，十分に大きなnについては $\omega \in I_{ku}^{(n)}$となり，(3)をつうじて

$$\rho(\xi(\omega),\ \xi^{(n)}(\omega)) \leqq \frac{2}{k}$$

かくしてωがどのkについても I_{ku} の端点でないならば，十分に大きなnについて

$$\rho(\xi(\omega),\ \xi^{(n)}(\omega)) \leqq \frac{2}{k}$$

$$\therefore\ \xi^{(n)}(\omega) \longrightarrow \xi(\omega) \qquad \text{as } n \to \infty$$

さらにωがあるI_{ku}の端点とするならば，このようなωの集合は可算で，Lebesgue 測度0。そこでこの Lebesgue 測度0の集合上では，$\xi^{(n)}(\omega)$ を定義しなおして

$$\xi^{(n)}(\omega)=\xi(\omega)$$

とすれば，やはり $\xi^{(n)}$ の分布は μ_n で，しかも

$$\xi^{(n)}(\omega) \longrightarrow \xi(\omega) \qquad \text{for all } \omega \in I$$

(証了)

注(42) Billingsley〔3〕pp. 7-8.

9　一様収束

レンマ5　Xを距離空間，$\mu\in\mathscr{M}(X)$とする。このときμについての連続集合の族$\mathscr{C}_\mu$はfieldである。

証明）　$A\in\mathscr{C}_\mu$とする。$\mu(\partial A)=0$でかつ

$$\partial A=\partial A^c$$

であるから，もちろん$\mu(\partial A^c)=0$。

$$\therefore\quad A^c\subset\mathscr{C}_\mu$$

つぎに$A_1, A_2\in\mathscr{C}_\mu$とすれば，

$$\partial(A_1\cup A_2)\subset\partial A_1\cup\partial A_2$$
$$\therefore\quad \mu(\partial(A_1\cup A_2))=0$$
$$\therefore\quad A_1\cup A_2\in\mathscr{C}_\mu$$

ゆえに$\mathscr{C}_\mu$はfieldである。

（証了）

レンマ6　Xを可分距離空間，$\mu\in\mathscr{M}(X)$そして$\mathscr{A}_0$をX上で同程度連続（equicontinuous）な函数の族とする。このとき任意の$\varepsilon>0$について，次のような条件をみたす連続集合の列$\{A_j\}$が存在する：

(i)　$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=X$

(ii)　$A_i\cap A_j=\emptyset$　for $i\neq j$

(iii)　任意の$x, y\in A_j$と，任意の$f\in\mathscr{A}_0$に対して

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

証明）　ρをXの距離としよう。任意の$\delta>0$，$x\in X$に対して，通常どおり，

$$B_\delta(x)=\{y\in X\mid \rho(x, y)<\delta\}。$$

と書く。

すると，再三用いた推論をつうじてすべての球$B_\delta(x)$は，

$$\mu(\partial B_{\delta'}(x))=0$$

となるような球$B_{\delta'}(x)$，$\delta'\leqq\delta$を含む。

$\mathscr{A}_0$は同程度連続な族であるから，任意の$x\in X$について，$\delta=\delta(x)$が存在して，

(1)　$B_\delta(x)$は連続集合

(2)　任意の$y\in B_\delta(x)$と任意の$f\in\mathscr{A}_0$に対して，

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(1)$$

とすることができる。またこのような$\{B_\delta(x)\mid x\in X\}$は$X$の開被覆であるが，$X$は可分であるから，点列$\{x_j\}$が存在して，

$$\{B_{\delta(x_j)}(x_j)\}_{j=1}^{\infty}$$

がXの被覆となる。注(41)と同様に，つまり

$$A_1=B_{\delta(x_1)}(x_1)$$
$$A_n=B_{\delta(x_n)}(x_n)\cap B_{\delta(x_{n-1})}(x_{n-1})^c\cap\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cap\ B_{\delta(x_1)}(x_1)^c\quad n=2, 3, \cdots\cdots$$

とする。レンマ5から，すべてのA_nは連続集合。$\{A_n\}$は互いに素であり，かつ

$$\bigcup_n A_n=X。$$

(iii)は不等式(1)から明らかであろう。

（証了）

定理13（Rao）Xを可分な距離空間，$\{\mu_n\}$をX上の測度とする。$\mathscr{A}_0\subset\mathscr{C}^b(X)$は$X$上で同程度連続かつ一様有界な函数族とする。このとき

$$w^*\text{-}\lim\mu_n=\mu \iff \lim_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathscr{A}_0}\left|\int_X f d\mu_n-\int_X f d\mu\right|=0$$

証明）[43]　十分性は自明であるから，必要性だけを示そう。そこでw^*-lim $\mu_n=\mu$とする。$\{A_j\}$をレンマ6で述べた性質をもつ集合の列とし，点列

$$\{x_j\in A_j\}$$

を考える。任意の$\nu\in\mathscr{M}(X)$に対して，$\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$に集中した離散測度$\tilde{\nu}$を

$$\tilde{\nu}(\{x_j\})=\nu(A_j)\quad\text{for all } j$$

と定義する。$\{A_j\}$の性質から任意の$f\in\mathscr{A}_0$について

$$\left|\int_X f d\nu-\int_X f d\tilde{\nu}\right|$$
$$\leqq\sum_{j=1}^{\infty}\left|\int_{A_j} f d\nu-\int_{A_j} f d\tilde{\nu}\right|$$

注(43)　Rao〔25〕

$$\leqq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |f(x)-f(x_j)|\,d\nu$$
$$\leqq \varepsilon$$

すると，任意の $\nu \in \mathscr{M}(X)$ について，

$$\sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int_X f d\nu - \int_X f d\bar{\nu} \right| \leqq \varepsilon$$

A_j は連続集合で $w^*-\lim \mu_n = \mu$ であるから，定理1により，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A_j) = \mu(A_j) \quad (\text{for all } j)$$

ゆえに，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int_X f d\bar{\mu}_n - \int_X f d\bar{\mu} \right|$$
$$\leqq M \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_j |\mu_n(A_j) - \mu(A_j)|$$
$$=0 \qquad (\text{for some } M>0)$$

かくして，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right|$$
$$\leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int f d\mu_n - \int f d\bar{\mu}_n \right| + \sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int f d\mu - \int f d\bar{\mu} \right| + \sup_{f \in \mathscr{A}_0} \left| \int f d\bar{\mu}_n - \int f d\bar{\mu} \right| \right\}$$
$$\leqq 2\varepsilon$$

（証了）

次の定理は，X が完備な距離空間の場合について Prohorov〔24〕が得た結果の一般化である。

定理14 (X, ρ) を可分距離空間とし，$\mu_n, \mu \in \mathscr{M}(X)$ に対して，$w^*-\lim \mu_n = \mu$ とする。さらに X から可分距離空間 (Y, ρ') への連続函数の列 $\{f_n\}$ が $f: X \to Y$ に広義一様収束[(44)]するものとする。このとき，

$$w^*-\lim \mu_n f^{-1} = \mu f^{-1}$$

証明)[(45)] g を Y 上で有界，一様連続な任意の実数値函数とする。このとき函数列

$$g(f_n)\ ;\ n=1, 2, \cdots\cdots$$

は $g(f)$ に広義一様収束する。実際，g の一様連続性から，任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta>0$ をとれば，

$$\rho'(x, y) < \delta \Longrightarrow |g(x)-g(y)|$$

とすることができる。$K \subset X$ を任意のコンパクト集合とするとき，十分に大きな n については，

$$\sup_{x \in K} \rho'(f(x), f_n(x)) < \delta$$

であるから，このような十分大きな n については

$$\sup_{x \in K} |g(f(x)) - g(f_n(x))|$$

が成り立つのである。

さて，周知の Ascoli の定理によって $\{g(f_n)\}$ は同程度連続である。しかも g の有界性から，この函数族は一様有界となり，定理13によって，

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int g(f_n) d\mu_n - \int g(f_n) d\mu \right|$$
$$\leqq \lim_{n\to\infty} \sup_k \left| \int g(f_k) d\mu_n - \int g(f_k) d\mu \right|$$
$$=0$$

さらに上限収束定理により，

$$\lim_{n\to\infty} \int g(f_n) d\mu = \int g(f) d\mu。$$

かくして，

$$\lim_{n\to\infty} \int g(f_n) d\mu_n = \int g(f) d\mu$$

定理1より

$$w^*-\lim \mu_n f_n^{-1} = \mu f^{-1}$$

（証了）

つづいて，最近の一時的均衡分析において，有効に利用されている定理を述べる[(46)]。

定義 f, f_n を距離空間 X 上における実数値函数とし，点 $x \in X$ に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ について

注(44) $\{f_n\}$ が X の任意のコンパクト集合上で f に一様収束するとき，$\{f_n\}$ は f に広義一様収束するという。

(45) Rao〔25〕

(46) これは何人かの論者によって独立に得られていると思われるが，たとえば Grandmont〔11〕。ただし，Grandmont の論文には証明が述べられていないので，本稿の以下の議論はそれを補充する役に立つであろう。応用については，Grandmont〔11〕，丸山〔20〕，Sondermann〔27〕。

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n)=f(x)$$

が成り立つとき，$\{f_n\}$ は x において f に連続収束 (continuous convergence) するという。

レンマ7 $\{f_n\}$ を距離空間 X 上の実数値函数列で次の二条件を満足するものとする。

(i) すべての n について，f_n は一点 $x\in X$ で連続。
(ii) $\{f_n\}$ は x において f に連続収束する。

このとき，$\{f_n\}$ は点 x において同程度連続である。

証明） いま仮に $\{f_n\}$ が x において同程度連続ではないとしよう。するとある $\varepsilon>0$ に対して

$$|f_{n_1}(x_1)-f_{n_1}(x)|\geqq\varepsilon \quad \text{for some } x_1\in B_1(x)$$

を満たす $f_{n_1}\in\{f_n\}$ が存在する。一般に

$$|f_{n_p}(x_p)-f_{n_p}(x)|\geqq\varepsilon \text{ for some } x_p\in B_{1/p}(x)$$
$$n_1<n_2<\cdots\cdots<n_{p-1}<n_p<\cdots\cdots$$

を満たす $f_{n_p}\in\{f_n\}$ が存在する。このような構成によれば

$$x_p\to x \quad \text{as } p\to\infty$$

であり，したがって(ii)により

$$\lim_{p\to\infty} f_{n_p}(x_p)=f(x)$$

しかし

$$|f_{n_p}(x_p)-f(x)|$$
$$\geqq|f_{n_p}(x_p)-f_{n_p}(x)|-|f_{n_p}(x)-f(x)|$$

ここで $|f_{n_p}(x)-f(x)|\to0$ であるから

$$\lim_{p\to\infty}|f_{n_p}(x_p)-f(x)|\geqq\varepsilon。$$

矛盾。 （証了）

定理15 X を可分な距離空間とする。$\mathscr{M}(X)$ の点列 $\{\mu_n\}$ に対して

$$w^*-\lim\mu_n=\mu\in\mathscr{M}(X)$$

が成り立ち，さらに X 上の実数値連続函数列 $\{f_n\}$ が次の二条件を満たすものとする。

(i) $\{f_n\}$ は一様有界。
(ii) $\{f_n\}$ は各 $x\in X$ において f に連続収束する。

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu_n=\int_X f d\mu$$

証明） 仮定とレンマ7とから，$\{f_n\}$ は各 $x\in X$ において同程度連続である。したがって定理13により

$$\lim_{n\to\infty}\sup_p\left|\int_X f_p d\mu_n-\int_X f_p d\mu\right|=0。\tag{1}$$

したがって容易に

$$\left|\int_X f d\mu-\int_X f_n d\mu_n\right| \tag{2}$$
$$\leqq\left|\int_X f_n d\mu_n-\int_X f_n d\mu\right|+\left|\int_X f_n d\mu-\int_X f d\mu\right|$$

(2)の第1項は(1)によって0に収束し，また第2項も仮定(i)(ii)および有界収束定理から0に収束する。したがって所望の帰結が得られるのである。 （証了）

10 エルゴード定理[(47)]

$(\Omega,\ \mathscr{E},\ P)$ を確率空間，$(X,\ \rho)$ を完備・可分な距離空間とする。X における Borel σ- field を $\mathscr{B}$ としたとき，写像 $\xi:\Omega\to X$ が

$$\xi^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{E}$$

を満足するならば，すでに §8 で述べたように ξ は X-値の確率変数であると言う。$\{\xi_n:\Omega\to X\}$ を X-値の確率変数の列とする。各 $\omega\in\Omega$ について $\xi_1(\omega),\ \xi_2(\omega),\ \cdots\cdots,\ \xi_n(\omega)$ の各点に質量 $1/n$ を与える X 上の確率測度を，大きさ n の標本に基づく標本分布 (sample distribution) と呼んで，これを $\mu_n(A,\ \omega)$ （ここで $A\in\mathscr{B};\ \omega\in\Omega$）と書く。

$\mathscr{B}\times\Omega$ 上の実数値函数 $\lambda(A,\ \omega)$ が次の条件を満たすとき，これを X 上の彷徨測度 (random measure) と呼ぶ。

(i) 各 $\omega\in\Omega$ について，$\lambda(A,\ \omega)$ は $\mathscr{B}$ 上の確率測度。
(ii) 各 $A\in\mathscr{B}$ について，$\lambda(A,\ \omega)$ は ω の可測函数。

たとえば，確率変数列 $\{\xi_n:\Omega\to X\}$ に対応する標本分布 $\mu_n(A,\ \omega)$ は彷徨測度である。

注(47) 本節の内容は主として Rao 〔25〕 pp. 670-674 による。

確率論において，次の事実はよく知られている。
（確率論の成書を見よ。）

レンマ8　$\xi:\Omega\to X$を確率変数，$\mathscr{F}$を$\mathscr{B}$の部分σ-field とする。このとき $\mathbf{E}\,|f(\xi)|<\infty$ を満たす X 上の任意の函数 $f(x)$ に対して

$$\mathbf{E}[f(\xi)\,|\,\mathscr{F}]=\int_X f(x)\lambda(dx,\omega)\ \text{a. e. [P]}$$

を成立せしめるX上の彷徨測度 $\lambda(A,\omega)$ が存在する。ただしここで $\mathbf{E}[f(\xi)\,|\,\mathscr{F}]$ は $\mathscr{F}$に関する，$f(\xi)$ の条件付期待値である。

定義　$\{\lambda_n,\lambda\}$ をX上の彷徨測度の列とする。

$$\mathbf{E}\int_X|g(x)|\lambda(dx,\omega)<\infty$$

を満たすX上の任意の実可測函数 $g(x)$ について，

$$\lim_{n\to\infty}\int g(x)d\lambda_n=\int g(x)d\lambda\quad \text{a. e. [P]}$$

が成り立つとき，$\{\lambda_n,\lambda\}$ は**エルゴード性**を有すると言う。

定理16　可分距離空間 X上の彷徨測度の列 $\{\lambda_n,\lambda\}$ がエルゴード性を有するものとすれば，

$$\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,w^*\text{-}\lim_{n\to\infty}\lambda_n(\cdot,\omega)=\lambda(\cdot,\omega)\}=1$$

証明）エルゴード性の定義により，任意の$f\in\mathscr{C}^b(X)$について

$$\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)d\lambda_n=\int_X f(x)d\lambda\}=1 \tag{1}$$

Xは可分であるから，系2により$g_i\in\mathscr{C}^b(X)\,(i=1,2,\cdots\cdots)$ が存在して

$$w^*\text{-}\lim_n \nu_n=\nu\quad(\nu_n,\nu\in\mathscr{M}(X))$$

$$\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\int_X g_i d\nu_n=\int_X g_i d\nu\quad\text{for all }i \tag{2}$$

(1)によって

$$\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,w^*-\lim\lambda_n(\cdot,\omega)=\lambda(\cdot,\omega)\}$$
$$=\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,\lim_{n\to\infty}\int_X g_i d\lambda_n=\int_X g_i d\lambda\ \text{for all }i\}$$
$$=1$$

（証了）

定理17　可分距離空間 X上の彷徨測度の列 $\{\lambda_n,\lambda\}$ がエルゴード性を有するとし，さらに $\mathscr{A}_0$ は次の条件を満たす X 上の実連続函数族と仮定する。

(i)　X上の（実数値）連続函数gが存在して，

$$|f(x)|\leqq g(x)\quad\text{for any } f\in\mathscr{A}_0\text{ and any }x\in X$$

かつ

$$\mathbf{E}\int g(x)\lambda(dx,\omega)<\infty$$

(ii)　$\mathscr{A}_0$ は同程度連続。

このとき

$$\eta_n(\omega)=\sup_{f\in\mathscr{A}_0}\left|\int_X f(x)\lambda_n(dx,\omega)-\int_X f(x)\lambda(dx,\omega)\right|$$

とおけば，

$$\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,\eta_n(\omega)\to0\}=1$$

証明）　$\{\lambda_n,\lambda\}$ はエルゴード性を有するのであるから，その定義と定理16とから

$$\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,w^*-\lim_n\lambda_n(\cdot,\omega)=\lambda(\cdot,\omega)\}=1$$

さらに仮定(i)により，$\mathscr{A}_0$は殆どいたるところ一様有界である。ゆえに定理13によってただちに所望の帰結を得る。（証了）

上記の定理は η_n が0に概収束する条件を示すものであるが，α次の平均収束条件も以下のようにして調べることができる。

レンマ9　$\mathscr{A}$は可分距離空間X上の可測函数の族，gはX上の可測函数で次の条件を満たすものとする。

(i)　$|f(x)|\leqq g(x)$

$$\text{for any } f\in\mathscr{A}\text{ and any }x\in X$$

(ii)　$\mathbf{E}\int[g(x)]^{1+\alpha}\lambda(dx,\omega)<\infty$

$$\text{for some }\alpha\geqq0$$

さらにX上の彷徨測度の列 $\{\lambda_n,\lambda\}$ がエルゴード性を有し，任意の $\varepsilon>0$について

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{\omega\in\Omega\,|\,\eta_n(\omega)>\varepsilon\}=0$$

が成り立つとするならば，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\eta_n^{1+\alpha}=0$$

ただし η_n の定義は前定理と同様である。

証明） 実数値確率変数 h_n, h を

$$h_n(\omega)=\int_X [g(x)]^{1+\alpha}\ \lambda_n(dx,\ \omega),$$

$$h(\omega)=\int_X [g(x)]^{1+\alpha}\ \lambda(dx,\ \omega)$$

と定義すると，$\{\lambda_n,\ \lambda\}$ のエルゴード性を考慮して，

(a) $h_n\geqq 0$, $h\geqq 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}h_n=\mathrm{E}h$

(c) $\mathrm{P}\{\omega\in\Omega \mid h_n\to h\}=1$

いま

$$H_n=h_n-h$$
$$H_n^+=\mathrm{Max}\{H_n,\ 0\}$$
$$H_n^-=\mathrm{Max}\{-H_n,\ 0\}$$

とおけば

$$0\leqq H_n^-\leqq h$$

かつ

$$H_n^-\longrightarrow 0 \text{ a. e. [P]}$$

であるから，上限収束定理により，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}H_n^-=0$$

さらに(b)から

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(H_n^+-H_n^-)=0$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}H_n^+=0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\mid h_n-h\mid=\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(H_n^++H_n^-)=0 \tag{1}$$

を得る。さて $\varepsilon>0$ を任意に与え，

$$\mathrm{E}_n=\{\omega\in\Omega \mid \eta_n(\omega)>\varepsilon\}$$

とおく。すると

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\eta_n^{1+\alpha}\\
&=\int_{E_n^c}\eta_n^{1+\alpha}\ d\mathrm{P}+\int_{E_n}\eta_n^{1+\alpha}\ d\mathrm{P}\\
&\leqq\varepsilon^{1+\alpha}+\int_{E_n}\eta_n^{1+\alpha}\ d\mathrm{P}
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&\eta_n^{1+\alpha}\ (\omega)\\
&\leqq\sup_{f\in\mathscr{A}}\left|\int f(x)\lambda_n(dx,\ \omega)-\int f(x)\lambda(dx,\ \omega)\right|^{1+\alpha}\\
&\leqq\left[\int g(x)\lambda_n(dx,\ \omega)+\int g(x)\ \lambda\ (dx,\ \omega)\right]^{1+\alpha}\\
&\leqq 2^{1+\alpha}\left[\left(\int g(x)\lambda_n(dx,\ \omega)\right)^{1+\alpha}\right.\\
&\qquad\left.+\left(\int g(x)\ \lambda\ (dx,\ \omega)\right)^{1+\alpha}\right]\\
&\leqq 2^{1+\alpha}[h_n(\omega)+h(\omega)] \quad (\text{Hölder の不等式}^{(48)})\\
&\leqq 2^{1+\alpha}[\ |h_n(\omega)-h(\omega)|\ +2h(\omega)]
\end{aligned} \tag{3}$$

仮定から $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)=0$。ゆえに(1), (2), (3)から，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\eta_n^{1+\alpha}\leqq\varepsilon^{1+\alpha}$$

（証了）

定理17，レンマ 9 から，Fortet-Mourier〔10〕による結果の一般化として，次の定理が得られる。

定理18 定理17の仮定に加えて

$$\mathrm{E}\int [g(x)]^{1+\alpha}\ \lambda\ (dx,\ \omega)<\infty \quad \text{for some } \alpha\geqq 0$$

が成り立つものとすれば，

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\eta_n^{1+\alpha}=0$$

さて，$\{\xi_n:\Omega\to X\}$ を強定常過程とする。確率過程論で周知のとおり，一般性を失うことなく $\{\xi_n\}$ は保測変換 T をつうじて ξ_1 から生成されるものとしてよい。すなわち

$$\xi_n=\xi_1(T^{n-1})$$

いま

$$\mathscr{T}=\{A\in\mathscr{E} \mid T^{-1}A=A\}$$

とすれば，$\mathscr{T}$ は $\mathscr{E}$ の部分 σ-field である。

注(48) $g\in \mathrm{L}^{1+\alpha}$, $1\in \mathrm{L}^{1+\frac{1}{\alpha}}$ に対して Hölder の不等式を用いればよい。

さらに $\mathbf{E}\,|f(\xi_1)|<\infty$ とするならばレンマ8により

$$\mathbf{E}\,[f(\xi_1)\,|\,\mathscr{T}]=\int_X f(x)\,\mu(dx,\,\omega)\ \text{a. e.}[\mathrm{P}]$$

を満たす彷徨測度 $\mu(A,\,\omega)$ が存在する。

古典的な G. Birkhoff のエルゴード定理の主張は,(49)

"$\mathbf{E}\,|\,f(\xi_1)\,|<\infty$ ならば,殆どいたるところ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)=\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(dx,\,\omega)$$

$$=\mathbf{E}\,[f(\xi_1)\,|\,\mathscr{T}]=\int f(x)\,\mu(dx,\,\omega)\text{"}$$

である。

ここで上記の諸結果は $\lambda_n=\mu_n$, $\lambda=\mu$ とおきかえても成り立つことは明らかである。Birkhoffのエルゴード定理から $\{\mu_n,\,\mu\}$ がエルゴード性を有することが知られるので,

定理19 $\mathscr{A}_0$ は X 上の同程度連続な函数族とし,g は定理17の(i)(ii)を満たす連続函数とする。さらに

$$\mathbf{E}\,|\,g(\xi_1)\,|^{1+\alpha}<\infty \quad \text{for some } \alpha\geqq 0$$

とすれば,

(a) $\mathrm{P}\,\{\omega\in\Omega\,|\,\lim_{n\to\infty}\eta_n(\omega)=0\}=1$

(b) $\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\,\eta_n^{1+\alpha}=0$

ただしここで

$$\eta_n(\omega)=\sup_{f\in\mathscr{A}_0}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k(\omega))-\int f(x)\,\mu(dx,\,\omega)\Big|$$

最後に,Xとして可分な Banach 空間 $\mathfrak{X}$ を考える。確率変数 $\xi:\Omega\to\mathfrak{X}$ が $\mathbf{E}\,\|\xi\|<\infty$を満たす限り,

$$\Lambda(\mathbf{E}\xi)=\mathbf{E}(\Lambda\xi)\quad \text{for any } \Lambda\in\mathfrak{X}'$$

を満足する $\mathbf{E}\xi\in\mathfrak{X}$ が存在する。この $\mathbf{E}\,\xi$ を ξ の Bochner 積分と言う。(50)

同様にして,$\mathbf{E}\,\|\xi\|<\infty$ ならば,任意の $\Lambda\in\mathfrak{X}'$ について

$$\Lambda\,\mathbf{E}[\xi_1\,|\,\mathscr{T}]=\int(\Lambda x)\,\mu(dx,\,\omega)$$
$$=\mathbf{E}\,[\Lambda\xi_1\,|\,\mathscr{T}]\quad \text{a. e.}$$

を満足する確率変数 $\mathbf{E}\,[\xi_1\,|\,\mathscr{T}]$ の存在が示される。

そこで $\{\xi_n:\Omega\to\mathfrak{X}\}$ を$\mathbf{E}\,\|\xi_1\|<\infty$ なる強定常過程とし,

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

と定義すれば,

$$\|S_n-\mathbf{E}\,[\xi_1\,|\,\mathscr{T}]\,\|$$
$$=\sup_{\|\Lambda\|\leqq 1}|\,(\Lambda,\,S_n-\mathbf{E}\,[\xi_1\,|\,\mathscr{T}])\,|$$
$$=\sup_{\|\Lambda\|\leqq 1}\Big|\int(\Lambda x)\,d\,(\mu_n-\mu)\,\Big|\text{。}$$

したがって$\mathscr{A}_0=\{\Lambda\in\mathfrak{X}'\,|\,\|\Lambda\|=1\}$ かつ$g(x)=\|x\|$ として定理19から容易に,

定理20 $\lim_{n\to\infty}\|S_n-\mathbf{E}\,[\xi_1\,|\,\mathscr{T}]\,\|=0$ a. e.

さらに

$$\mathbf{E}\,\|\xi_1\|^{1+\alpha}<\infty \quad \text{for some } \alpha\geqq 0$$

を仮定すれば

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\,\|S_n-\mathbf{E}[\xi_1\,|\,\mathscr{T}]\,\|^{1+\alpha}=0\text{。}$$

ただしここで$\{\xi_n\}$は$\mathbf{E}\,\|\xi_1\|<\infty$なる強定常過程である。

以上,区切がよいから,ここで筆を止める。実は Hilbert 空間上の測度の問題や Hilbert空間に値をとる確率変数の Fourier 解析的取扱いについても述べるつもりであったが,もはや紙数も尽きたので,それは次の機会に延期せざるをえない。

最後に,Banach 空間の上で確率の問題を扱おうとする最近の研究方向を示すものとして論文集 A. Beck ed. *Probability in Banach Spaces, Oberwolfach 1975* (Springer Verlag, Berlin) 1976 をあげておきたい。

注(49) たとえば河田〔16〕第20章を見よ。
(50) Yosida〔31〕pp. 132—136を見よ。

参考文献

〔1〕 Alexandroff, A. D. "Additive Set Functions in Abstract Spaces, I-III" *Mat. Sbornik N. S. 8* (50, 1940 309-348; ibid. *9* (51), 1941 563-628; ibid. *13* (55) 1943 169-238.

〔2〕 Billingsley, P. : *Convergence of Probability Measures* (Wiley, N. Y.) 1968.

〔3〕 ———: *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania) 1971.

〔4〕 Bourbaki, N. : *Eléments de mathématique : Intégration* (Livre XIII) (Hermann, Paris) 1973.

〔5〕 Choquet, G. : *Lectures on Analysis* Vol. I. (Benjamin, London) 1969.

〔6〕 Dudley, R. M. "Convergence of Baire Measures" *Studia Math. 27*, 1966, 251-268.

〔7〕 ———: "Distances of Probability Measures and Random Variables" *Ann. Math. Statist. 39*, 1968, 1563-1572.

〔8〕 ———: *Probability and Metrics-Convergence of Laws on Metric Spaces, with a View to Statistical Testing* (Aarhus Universitet) 1976.

〔9〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz : *Linear Operators*, Part I (Interscience, N. Y.) 1958.

〔10〕 Fortet, R. and E. Mourier "Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique" *Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 60*, 1953, 267-285.

〔11〕 Grandmont, J. "On the Short-run Equilibrium in a Monetary Economy" in J. H. Dréze ed. *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality* (Macmillan, London) 1974.

〔12〕 Halmos, P. : *Measure Theory* (van Nostrand, N. Y.) 1950.

〔13〕 Hildenbrand, W. : *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton Univ. Press, Princeton) 1974.

〔14〕 Kallianpur, G. "The Topology of Weak Convergence of Probability Measures" *J. Math. Mech. 10*, 1961, 947-969.

〔15〕 加藤敏夫『位相解析』(共立出版，東京) 1957.

〔16〕 河田龍夫『応用数学概論』II (岩波書店，東京) 1952.

〔17〕 Kelley, J. L. : *General Topology* (van Nostrand, N. Y.) 1955.

〔18〕 Kisynski, J. "On the Generation of Tight Measures" *Stud. Math. 30*, 1968, 141-151.

〔19〕 小泉澄之『実解析』(実教出版，東京) 1977.

〔20〕 丸山徹「一時的均衡分析」『三田学会雑誌』69巻7号 (1976) pp. 55-73 および 69巻8号 (1976) pp. 33～51.

〔21〕 Maruyama, T. "Space of Measures" mimeographed, 1977.

〔22〕 Mourier, E. "Eléments aléatoires dans un espace de Banach" *Ann. Inst. Henri Poincaré 13*, 1953, 161-244.

〔23〕 Parthasarathy, K. R. : *Probability Measures on Metric Spaces*, (Academic Press, N. Y.) 1967.

〔24〕 Prohorov, Yu. V. "Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory" *Theor. Prob. Appl. 1*, 1956, 157-214.

〔25〕 Rao, R. R. "Relations between Weak and Uniform Convergence of Measures with Applications" *Ann. Math. Statist. 33*, 1962, 659-680.

〔26〕 Schwartz, L.: *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, (Oxford, London) 1973.

〔27〕 Sonderman, D. "Temporary Competitive Equilibrium under Uncertainty" in J. H. Dréze ed. *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality* (Macmillan, London) 1974.

〔28〕 Topsφe, F. : *Topology and Measure* (Springer, Berlin) 1970.

〔29〕 Varadarajan, V. S. "Weak Convergence of Measures on Separable Metric Spaces" *Sankhyā 19*, 1958, 15-22.

〔30〕 ———"Measures on Topological Spaces" *Amer. Math. Soc. Transl.* ser. II, *48*, 1965, 161-228.

〔31〕 Yosida, K.: *Functional Analysis* 3rd ed. (Springer, Berlin) 1971.

〔付記〕 本稿は二，三の機会に筆者が行なった講義の草稿に最小限の加筆を施したものである。冒頭に述べたとおり，この方面の研究書としては Billingsley〔2〕,〔3〕と Parthasarathy〔23〕が基本的であるが，本稿もこれらの書物に多くを負うている。引用，利用をあらかじめ快く許して下さった P. Billingsley, K.R. Parthasarathy 両博士のご好意に心から謝意を表したい。

（経済学部助手）