Title	確率測度の*弱収束 : 均衡分析への応用のために(一)
Sub Title	Weak * convergence of probability measures : for applications to equilibrium analysis
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.6 (1977. 12) ,p.633(53)- 646(66)
JaLC DOI	10.14991/001.19771201-0053
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19771201-0053

研究ノート

確率測度の＊弱収束

――均衡分析への応用のために――

(一)

丸山　徹

距離空間 (X, ρ) 上の Borel 確率測度が作る空間 $\mathscr{M}(X)$ の位相構造について述べる。$\mathscr{M}(X)$ の点列 $\{\mu_n\}$ が $\mu \in \mathscr{M}(X)$ に収束することを任意のBorel集合 E について,

$$\mu_n(E) \to \mu(E)$$

と定めてもよいのであるが，これでは条件が少し強すぎて不便である。そこで通常は，任意の有界連続函数 $f: X \to R$ に対して,

$$\int_X f d\mu_n \longrightarrow \int_X f d\mu$$

が成り立つときに，$\{\mu_n\}$ は μ に収束すると考える。この収束を＊弱収束と言うのであって，本稿で考察する $\mathscr{M}(X)$ の位相も専ら＊弱収束によって定まる位相である。

$\mathscr{M}(X)$ の位相構造に関する研究成果は，確率論・確率過程論においてその最も興味深い応用を見出すのであるが，本稿の目的は，最近の均衡理論の進展過程において応用される範囲内の基本事項を解説しようとするものに過ぎない。確率論方面への応用については Billingsley〔2〕を見るのがよい。また均衡理論への応用については Hildenbrand〔13〕におけるそれがひとつの典型であり，他方 Grandmont〔11〕，丸山〔20〕，Sonderman〔27〕などはいまひとつの方向を示している。

ここで解説する内容には全く新しい結果は付加されていない。ただ数種の文献に散在する諸成果を一箇所にまとめることによって，筆者自身の覚え書とすると同時に数理経済学研究者の便宜を図ろうとする，文字どおりの研究ノートである。Billingsley〔2〕,〔3〕および Parthasarathy〔23〕はこの方面の標準書であり，本稿の第2節以下も主としてこれらに依拠して書かれたものであるが，足りない点やわかりにくいところを補足しながら解説することとしたい。

1.　＊弱収束の概念

確率測度の＊弱収束の意味は既に上に述べたとおりであるが，このような収束概念を考える理論的背景について述べておくことが必要であろう。(1)

まず一般論から始めることとして，$\mathfrak{X}$ を実線形ノルム空間とすれば，(2) その双対空間（すなわち $\mathfrak{X}$ 上の有界線形汎函数の空間）$\mathfrak{X}'$ は operator ノルムの下に Banach 空間となる。そこでさらにこの $\mathfrak{X}'$ の双対空間を $\mathfrak{X}$ の第二双対空間と呼んで $\mathfrak{X}''$ と書くことにする。

いま $x \in \mathfrak{X}$ を固定して考え，各 $\Lambda \in \mathfrak{X}'$ に対して

$$J_x : \Lambda \longmapsto \Lambda(x)$$

とすることによって，作用素 $J_x: \mathfrak{X}' \to R$ が定まる。J_x が $\mathfrak{X}'$ 上で線形であることは明らかであろう。しかもこれは有界で，とくに

$$\| J_x \| = \| x \|$$

注(1)　ここでは函数解析学上のいくつかの概念を述べるが，証明は省略する。詳しくは Dunford-Schwartz〔9〕あるいは Yosida〔31〕を見よ。これらの書物が難解に感じられる読者には加藤〔15〕を推す。

(2)　本来複素線形空間として扱うべきであるが，ここでは後の議論との関係で“実”に限定して考える。

が成り立つ。(ここでもちろん，$\|J_x\|$は作用素J_xの operator ノルムである）すなわち，写像

$$J: x \longmapsto J_x$$

は$\mathfrak{X}$を$\mathfrak{X}''$の部分集合に埋め込む等長線形写像である。[(3)]

定義 $J(\mathfrak{X})\subset\mathfrak{X}''$によって生成される$\mathfrak{X}'$上の位相[(4)]を$\mathfrak{X}'$の＊弱位相（weak＊-topology）と言う。$\mathfrak{X}$における net $\{\Lambda_\alpha\}$の＊弱位相についての収束を＊弱収束（weak＊-convergence）と呼ぶ。

$\mathfrak{X}'$の net$\{\Lambda_\alpha\}$が$\Lambda\in\mathfrak{X}'$に＊弱収束することを以下

$$w^*-\lim_\alpha \Lambda_\alpha=\Lambda$$

と表記する。これは任意の$x\in\mathfrak{X}$について

$$\lim_\alpha \Lambda_\alpha(x)=\Lambda(x)$$

が成り立つことと同値である。

ここでわれわれの主題に話をひき戻そう。Xを任意の（Hausdorff）位相空間，$\mathscr{C}^b(X)$をX上の有界連続実函数が作る線形空間とする。$\mathscr{C}^b(X)$は一様収束ノルム

$$\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|$$

の下に Banach 空間となることは周知のとおりである。

Xの開集合が生成する field を$\mathscr{A}$，同じくXの開集合が生成するσ- field（すなわち Borel σ-field）を$\mathscr{B}$と書く。$\mathscr{A}$上に定まる有限加法的な正則有限複号測度の集合を$\mathscr{M}_f(X)$，$\mathscr{B}$上に定まるσ-加法的な正則有限複号測度の集合を$\mathscr{M}_\sigma(X)$と書けば，これらは次の演算の下に線形空間となる。すなわちμ，$\nu\in\mathscr{M}_f(X)$ (resp. $\mathscr{M}_\sigma(X)$)，$\alpha\in R$ に対して

$$(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)$$
$$(\alpha\mu)(E)=\alpha\cdot\mu(E)$$
$$\text{for every } E\in\mathscr{A} \text{ (resp. } \mathscr{B}\text{)}。$$

さらに，

$\|\mu\|=|\mu|(X)$:（ここで$|\mu|(X)$はμの全変動）

とすることによって，$\mathscr{M}_f(X)$と$\mathscr{M}_\sigma(X)$は各々線形ノルム空間となる。[(5)]もちろん$\mathscr{M}_\sigma(X)$は自然な仕方で$\mathscr{M}_f(X)$の線形部分空間とみなすことができる。まず任意の$\mu\in\mathscr{M}_f(X)$について

$$\mu(f)\equiv\int_X f d\mu;\quad f\in\mathscr{C}^b(X)$$

と定義すれば，この$\mu(\cdot)$は明らかに$\mathscr{C}^b(X)$上の有界線形汎函数である。重要なことはこの逆もまた真であることで，次の二定理は函数解析学上基本的な役割を果す。

Alexandrovの定理[(6)]：Xを任意の（Hausdorff）正規位相空間とする。このとき$\mathscr{C}^b(X)$上の任意の有界線形汎函数Λに対して，

$$\Lambda(f)=\int_X f d\mu \text{ for all } f\in\mathscr{C}^b(X)$$

を満足する$\mu\in\mathscr{M}_f(X)$が存在して，これは一意に定まる。しかも$\|\Lambda\|=\|\mu\|$が成り立つ。

この定理をつうじて，$(\mathscr{C}^b(X))'$は完全に$\mathscr{M}_f(X)$と同一視してもよいことが判明する。とくにXをコンパクトとする場合には上記の定理のうち，$\mathscr{M}_f(X)$を$\mathscr{M}_\sigma(X)$でおきかえた次の定理が成り立つ。

Riesz-Markov-Kakutani の定理[(7)]：Xをコンパクト，Hausdorff 位相空間とする。このとき$\mathscr{C}^b(X)$上の任意の有界線形汎函数Λに対して，

$$\Lambda(f)=\int_X f d\mu \text{ for all } f\in\mathscr{C}^b(X)$$

を満足する$\mu\in\mathscr{M}_\sigma(X)$が存在して，これは一意に定まる。しかも$\|\Lambda\|=\|\mu\|$が成り立つ。さらに$\Lambda$が正の線形汎函数である場合には，それに対応する測度μは正値測度である。

いま$\{\mu_\alpha\}$を$\mathscr{M}_f(X)$の net とするとき，これが

注(3) Yosida〔31〕pp. 112-113.
(4) つまり$J(\mathfrak{X})$のすべての元を連続とするような$\mathfrak{X}'$上の最小の位相。
(5) Yosida〔31〕pp. 35-37.
(6) Alexandrov〔1〕
(7) Dunford-Schwartz〔9〕p. 265。またこの定理の拡張とこれに関する結果については小泉〔19〕，Maruyama〔21〕を見よ。

$\mu\epsilon\mathscr{M}_f(X)$に＊弱収束するとは，各 μ_α の定める$\mathscr{C}^b(X)$ 上の有界線形汎函数が，μ の定める有界線形汎函数に＊弱収束することである。すなわち

$$w^*-\lim_\alpha \mu_\alpha=\mu$$

$$\text{iff}\quad \lim_\alpha \mu_\alpha(f)=\lim_\alpha \int_X f d\mu_\alpha=\int_X f d\mu \quad \text{for any } f\epsilon\mathscr{C}^b(X)$$

次節以下においては X は距離空間（距離は ρ）とし，その上で定義されたBorel確率測度の空間$\mathscr{M}(X)\subset\mathscr{M}_o(X)\subset\mathscr{M}_f(X)$ が考察の対象となる。もちろん$\mathscr{M}(X)$ の位相は $\mathscr{M}_f(X)$ から導入される相対位相である。(8)

2.　＊弱収束の特徴づけ

定理１（＊弱収束の特徴づけ）$\{\mu_\alpha\}$ を $\mathscr{M}(X)$のnet，$\mu\epsilon\mathscr{M}(X)$ とするとき，次の５命題は互いに同値である。

(a)　$w^*-\lim_\alpha \mu_\alpha=\mu$

(b)　X上で一様連続な任意の函数gについて，

$$\lim_\alpha\int_X g d\mu_\alpha=\int_X g d\mu$$

(c)　任意の閉集合Fについて

$$\overline{\lim_\alpha}\ \mu_\alpha(F)\leqq\mu(F)$$

(b)　任意の開集合Gについて

$$\underline{\lim_\alpha}\ \mu_\alpha(G)\geqq\mu(G)$$

(c)　$\mu(\partial A)\overset{(9)}{=}0$ を満たす任意の Borel 集合 A（μ－連続集合）について

$$\lim_\alpha \mu_\alpha(A)=\mu(A)$$

証明）(10)　$(a)\Rightarrow(b)$：一様連続な函数はもちろん連続であるから，これは明らか。

$(b)\Rightarrow(c)$：Fを任意の閉集合とし，

$$G_k=\{x\epsilon X\mid\rho(x,\ F)<\frac{1}{k}\}$$

とすれば，

$$F\cap G_k^c=0$$

このとき周知のとおり次の条件を満たすX上の一様連続函数 $f_k:X\to[0,\ 1]$ が存在する。(11)

$$f_k(x)=\begin{cases}1 & \text{on } F\\ 0 & \text{on } G_k^c\end{cases}$$

また

$$G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\cdots;\ \bigcap_k G_k=F。$$

よって（(b)を用いて）

$$\overline{\lim_\alpha}\ \mu_\alpha(F)\leqq\overline{\lim_\alpha}\int_X f_k\ d\mu_\alpha=\int_X f_k d\mu\leqq\mu(G_k)$$

注(8) 本稿におけるよりもさらに一般的な取り扱い —— たとえばXを任意の位相空間とし，その上で定義されるすべての有限複合測度の空間の研究については Topsфe〔28〕と Varadarajan〔30〕などを参照すべきである。また局所コンパクト，Hausdorff 位相空間 X 上でコンパクトな台を有する連続複素数値函数の作る線形空間に，所謂 “inductive limit” による位相を与えて得られる局所凸線形位相空間 $\mathscr{K}(X,\ \mathbf{C})$ の双対に対しても同様のことを行なおうとすると，問題はやや複雑になる。$(\mathscr{K}(X,\ \mathbf{C}))'$ は **Radon** 測度の空間と呼ばれ，Bourbaki〔4〕, Choque〔5〕に詳しい結果が述べられている。最近出版された重要な文献として Schwartz〔26〕がある。

(9)　∂A は A の境界を示す。

(10)　Billingsley〔2〕pp. 11-14, Dudley〔8〕6. 1, Parthasarathy〔23〕pp. 40-42

(11)　たとえば f_k は次の如くして構成せられる。まず実連続函数 $\varphi:R\to[0,\ 1]$ を

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & \text{for } t\leqq0\\ 1-t & \text{for } 0\leqq t\leqq1\\ 0 & \text{for } 1\leqq t\end{cases}$$

と定義する。そして

$$f_k(x)=\varphi(k\rho(x,\ F))$$

とすれば，これが所望の性質を満たしていることは明らかであろう。Billingsley〔2〕p. 8.

$k\to\infty$として，

$$\overline{\lim_{\alpha}}\ \mu_\alpha(F)\leqq\mu(F)$$

$(c)\Longleftrightarrow(d)$： 自明。

(c), $(d)\Rightarrow(e)$：Aをμ-連続集合，つまり$\mu(\partial A)=\mu(\bar{A}\diagdown\mathring{A})=0$としよう。[12]

$$\overline{\lim_{\alpha}}\mu_\alpha(A)\leqq\overline{\lim_{\alpha}}\mu_\alpha(\bar{A})\leqq\mu(\bar{A})=\mu(A)$$

((c) による)

$$\underline{\lim_{\alpha}}\mu_\alpha(A)\geqq\underline{\lim_{\alpha}}\mu_\alpha(\mathring{A})\geqq\mu(\mathring{A})=\mu(A)$$

((d) による)

かくして，$\lim_{\alpha}\mu_\alpha(A)$が存在して，それは$\mu(A)$に相等しい。

$(e)\Rightarrow(a)$：$f\in\mathscr{C}^b(X)$とし，任意の$x\in X$に対して，

$$a<f(x)<b$$

となるように実数a, bを定める。（fは有界であるから，このようなa, bは確かに存在する。）$\mu(X)=1$であるから，

$$\mu\{x\in X\mid f(x)=c\}>0$$

となるようなcはたかだか可算個である。そこで任意の$\varepsilon>0$に対して次のような数t_0, t_1, ……, t_mをとることができる。

(i) $a=t_0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_m=b$

(ii) $t_j-t_{j-1}<\varepsilon$ for $j=1, 2, \cdots\cdots, m$

(iii) $\mu\{x\mid f(x)=t_j\}=0$ for $j=0, 1, 2, \cdots\cdots, m$

いま

$$A_j=\{x\in X\mid t_{j-1}\leqq f(x)<t_j\},\ j=1, 2, \cdots\cdots, m$$

とすれば，A_1, A_2, ……, A_mは互いに素なBorel集合で，

$$X=\bigcup_{j=1}^{m}A_j$$

また

$$\bar{A}_j\diagdown\mathring{A}_j\subseteq\{x\in X\mid f(x)=t_{j-1}\}\cup\{x\in X\mid f(x)=t_j\}$$
$$\therefore\mu\ (\bar{A}_j\diagdown\mathring{A}_j)=0$$

すなわちA_j $(j=1, 2, \cdots\cdots)$はμ－連続集合。したがって(e)より，

$$\lim_{\alpha}\mu_\alpha(A_j)=\mu(A_j)\qquad j=1, 2, \cdots\cdots, m$$

いま，

$$f^*=\sum_j t_{j-1}\ \chi_{A_j}$$

とおくと，[13]任意の$x\in X$に対して

$$|f^*(x)-f(x)|<\varepsilon$$

であること[14]に注意して，

$$\left|\int fd\mu_\alpha-\int fd\mu\right|$$
$$\leqq\left\{\int|f-f^*|\,d\mu_\alpha+\int|f-f^*|\,d\mu\right.$$
$$\left.+\left|\int f^*d\mu_\alpha-\int f^*d\mu\right|\right\}$$
$$\leqq2\varepsilon+\sum_{j=1}^{m}|\mu_\alpha(A_j)-\mu(A_j)|\cdot|t_{j-1}|$$

極限に移って，

$$\overline{\lim_{\alpha}}\left|\int fd\mu_\alpha-\int fd\mu\right|\leqq2\varepsilon$$

（証了）

注意　$w^*-\lim_{\alpha}\mu_\alpha=\mu$ and $w^*-\lim_{\alpha}\mu_\alpha=\nu\Longrightarrow\mu=\nu$

証明）まず$\mu_\alpha=\nu$とおけば，もちろん$w^*-\lim_{\alpha}\mu_\alpha=\nu$であるから，定理1により，任意の閉集合$F$について

$$\nu(F)\leqq\mu(F)$$

次に$\mu_\alpha=\mu$として同様に

$$\mu(F)\leqq\nu(F)$$
$$\therefore\ \mu(F)=\nu(F)$$

したがって，もちろん任意の開集合Gに対しても

$$\mu(G)=\nu(G)$$

いま，

$$\mathscr{Y}=\{F_\sigma-\text{sets}\}\cap\{G_\delta-\text{sets}\}$$

注(12) $\bar{A}$はA閉包，$\mathring{A}$はAの内部を示す。

(13) χ_{A_j}はA_jの特性函数。

(14) なぜなら，任意の$x\in X$について，$x\in A_j$なるA_jが一意に定まり，このjに対して$t_{j-1}\leqq f(x)<t_j$である。したがって$|f^*(x)-f(x)|=|t_{j-1}-f(x)|\leqq t_j-t_{j-1}<\varepsilon$。

とすれば，すべての開集合，閉集合は$\mathscr{S}$の元である。したがって$\mathscr{S}$上でμとνとは一致する。明らかに$\mathscr{S}$は field であり，その生成する σ－field は $\mathscr{B}(X)$ を含む。ゆえに（Carathéodory の拡張定理により）任意の$E\epsilon\mathscr{B}(X)$について

$$\mu(E)=\nu(E)$$

（証了）

すなわち，＊弱収束による極限は well-defined である。これと定理1とから，すべての $f\epsilon\mathscr{C}^b(X)$ または $f\epsilon\mathscr{U}(X)\equiv\{f\epsilon\mathscr{C}^b(X)\mid f$は一様連続$\}$ について

$$\int_X fd\mu=\int_X fd\nu$$

ならば $\mu=\nu$ の成り立つこともただちに知られる。

次に $w^*-\lim_\alpha \mu_\alpha=\mu$ を約束する，便利な十分条件を二，三紹介しておこう。

定理2 $\mathscr{W}\subset\mathscr{B}$ は次のような条件を満足するXの集合族とする。

(i) $W_1, W_2\epsilon\mathscr{W}\Longrightarrow W_1\cap W_2\epsilon\mathscr{W}$

(ii) Xにおける任意の開集合は，$\mathscr{W}$の可算個の元の合併として表わすことができる。

すると，すべての$W\epsilon\mathscr{W}$に対して $\lim_\alpha\mu_\alpha(W)=\mu(W)$ が成り立つならば，$w^*-\lim_\alpha\mu_\alpha=\mu$。

証明)[15] $W_1, W_2, \cdots\cdots, W_m\epsilon\mathscr{W}$ ならば $\bigcap_{i=1}^m W_i\ \epsilon\mathscr{W}$ であるから，

$$\begin{aligned}\mu_\alpha\Big(\bigcup_{i=1}^m W_i\Big)&=\sum_i\mu_\alpha(W_i)-\sum_{i,j}\mu_\alpha(W_i\cap W_j)\\&\quad+\sum_{i,j,k}\mu_\alpha(W_i\cap W_j\cap W_k)-\cdots\cdots\\&\longrightarrow\sum_i\mu(W_i)-\sum_{i,j}\mu(W_i\cap W_j)\\&\quad+\sum_{i,j,k}\mu(W_i\cap W_j\cap W_k)-\cdots\cdots\\&=\mu\Big(\bigcup_{i=1}^m W_i\Big)\end{aligned}$$

GをXの開集合とすれば，仮定によって

$$G=\bigcup_i W_i$$

を満たす $W_1, W_2, \cdots\cdots\epsilon\mathscr{W}$が存在する。そこで $\varepsilon>0$ に対して

$$\mu\Big(\bigcup_{i\leq m}W_i\Big)>\mu(G)-\varepsilon$$

となるようにmを選べば，

$$\begin{aligned}\mu(G)-\varepsilon<\mu\Big(\bigcup_{i\leq m}W_i\Big)&=\lim_\alpha\mu_\alpha\Big(\bigcup_{i\leq m}W_i\Big)\\&\leq\varliminf_\alpha\mu_\alpha(G)\end{aligned}$$

εは任意であるから，定理1により所望の帰結をうる。

（証了）

系1 Xを可分な距離空間とし，$\mathscr{W}\subset\mathscr{B}$ を次のような条件を満たすXの集合族とする。

(i) $W_1, W_2\epsilon\mathscr{W}\Longrightarrow W_1\cap W_2\epsilon\mathscr{W}$

(ii) 任意の $x\epsilon X$ と任意の $\varepsilon>0$ に対して，[16]

$$x\epsilon\mathring{W}\subset W\subset B_\varepsilon(x)$$

を満たす $W\epsilon\mathscr{W}$ が存在する。

このとき，すべての $W\epsilon\mathscr{W}$ について

$$\lim_\alpha\mu_\alpha(W)=\mu(W)$$

ならば，

$$w^*-\lim_\alpha\mu_\alpha=\mu。$$

証明)[17] (ii)によって，開集合Gの各点xについて，

$$x\epsilon\mathring{W}\subset W\subset G,$$

を満たす $W\epsilon\mathscr{W}$ が存在する。Xは可分であるから，

$$G\subset\bigcup_i\mathring{W}_i \text{ and } W_i\subset G$$

を満足する $W_1, W_2, \cdots\cdots\epsilon\mathscr{W}$ が存在する。ゆえに $G=\bigcup_i W_i$ となり，定理2の条件が成り立つのである。

（証了）

定理3 (X, ρ) を任意の距離空間，$\{\mu_\alpha\}$を$\mathscr{M}(X)$ の net とする。$\{\mu_\alpha\}$ の任意の subnet $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$ が，収束 subnet を有するものとし，その（＊弱収束による）

注(15) Billingsley〔2〕p. 14.

(16) $B_\varepsilon(x)\equiv\{y\epsilon X\mid\rho(x, y)<\varepsilon\}$。

(17) Billingsley〔2〕pp. 14-15.

極限を共通にμとすれば，$w^*\text{-}\lim_{\alpha} \mu_\alpha=\mu$ である。

（その逆は明らか。）

証明)[18] 帰謬法を用いることとし，$\{\mu_\alpha\}$がμに$*$弱収束しないものと仮定する。すると，$*$弱収束の定義によって。次の条件を満足する$f\in\mathscr{C}^b(X)$，$\epsilon>0$および$\{\mu_\alpha\}$の適当なsubnet $\{\mu_{\alpha_\beta}\}$が存在する。

$$\left| \int_X f d\mu_{\alpha_\beta} - \int_X f d\mu \right| \geqq \epsilon$$

これから，$\{\mu_{\alpha_\beta}\}$のいかなるsubnetもμに$*$弱収束しえぬこととなって矛盾。

（証了）

3. 距離づけと可分性

本節では空間$\mathscr{M}(X)$の距離づけについて考察する。主要な定理は，Xが可分な距離空間であれば$*$弱位相を有する$\mathscr{M}(X)$もまた可分な距離空間に位相同型であることを主張するものである。これは甚だ簡明な主張であるが証明は存外に難しい。われわれはまず三つのレンマを立てて準備をしなければならない。

定義 $\delta_{(x)}\in\mathscr{M}(X)$が$\delta_{(x)}(\{x\})=1$を満たす測度であるとき，$\delta_{(x)}$は$x\in X$に対する**Dirac**測度，あるいは点$x$に質量1をおいて定義される測度であると言う。[19] X上のDirac測度の全体を$\varDelta$で表わす。

レンマ1 Xは$\varDelta$と位相同型である。

証明) 写像$\varphi: X\to\varDelta$を$\varphi: x\mapsto\delta_{(x)}$と定義すればこれは明らかに全単射である。さらに$\varphi$が両連続となることが次の如くして示される。

まず$\delta_{(x)}$の定義によって，任意の$x\in X$, $f\in\mathscr{C}^b(X)$に対して，

$$\int_X f d\delta_{(x)}=f(x)$$

であることに注意する。そこで$x_\alpha\to x_0$とすればfの連続性から$f(x_\alpha)\to f(x_0)$

i. e. $\displaystyle\lim_{\alpha}\int f d\delta_{(x_\alpha)}=\int f d\delta_{(x_0)}$

$\therefore\ w^*\text{-}\lim_{\alpha}\delta_{(x_\alpha)}=\delta_{(x_0)}$

逆に$w^*\text{-}\lim_{\alpha}\delta(x_\alpha)=\delta(x_0)$を仮定し，$x_\alpha\nrightarrow x_0$としよう。このとき$x_0$の開近傍$U$が存在して，$\{x_\alpha\}$の適当なsubnet $\{x_{\alpha_\beta}\}$をとると

$$x_{\alpha_\beta}\in X\setminus U \quad \text{for all } \alpha_\beta$$

とすることができる。距離空間XはT_4ゆえ，連続函数$g: X\to[0, 1]$で

$$g(x_0)=0,\ g(x)=1 \text{ on } X\setminus U$$

を満たすものが存在する。するとこのgについて，

$$\int g d\delta_{(x_{\alpha_\beta})}=1 \quad\text{and}\quad \int g d\delta_{(x_0)}=0$$

これは当初の仮定に矛盾。（証了）

レンマ2 $\varDelta$は$\mathscr{M}(X)$における列閉集合[20]である。

証明) $\{x_n\}$を$w^*\text{-}\lim_{n}\delta_{(x_n)}=\nu$となる$X$の点列とし，$\nu\in\mathscr{M}(X)$を示そう。まず$\{x_n\}$は収束部分列を有する。実際，仮にそうでないとすると集合

$$A=\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$$

は閉であり，またAの任意の部分集合Bも閉。$w^*\text{-}\lim_{n}\delta_{(x_n)}=\nu$と定理1より，

$$\nu(B)\geqq\overline{\lim_{n}}\,\delta_{(x_n)}(B)$$

よって，Aの任意の無限部分集合$C\subset A$に対して

$$\nu(C)=1$$

が成り立たねばならない。これはνが確率測度であることに矛盾。

かくして$\{x_n\}$は収束部分列$\{x_{n_m}\}$を有する。そこで

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_m}=x$$

とすれば，レンマ1により，

注(18) Billingsley〔2〕p. 16.

(19) $\delta_{(x)}$はX上の任意の可測函数fに対して

$$\int_X f d\delta_{(x)}=f(x)$$

を成り立たしめる測度と言ってもよい。

(20) 位相空間Xの部分集合Aが列閉集合であるとは，Aの点列$\{x_n\}$が$x_0\in X$に収束するとき$x_0\in A$となることを言う。

$\delta_{(x)}=\nu$

が成り立たねばならない。ゆえにΔは列閉集合である。

（証了）

レンマ3　Xを全有界な距離空間とすればX上の有界一様連続函数の集合$\mathscr{U}(X)$は一様収束ノルムの下で可分なBanach空間となる。

証明）　距離空間Xはある完備な距離空間$\hat{X}$の稠密部分集合として等長に埋め込まれることが知られている。[21] ここではXの全有界性を仮定しているから，$\bar{X}=\hat{X}$はコンパクトである。任意の$f\in\mathscr{U}(X)$はX上で一様連続であるから，fは$\hat{X}$上の連続函数として一意に拡張される。この拡張を$\tilde{f}$とすれば

$$\sup_{x\in X}|f(x)|=\sup_{x\in\tilde{X}}|\tilde{f}(x)|$$

したがって$\mathscr{U}(X)$と$\mathscr{C}(\hat{X})$はBanach空間として同型である。

$\hat{X}$はコンパクトゆえ，$\mathscr{C}(\hat{X})$は可分。[22] よって$\mathscr{U}(X)$も可分である。

（証了）

定理4　Xを可分な距離空間とすれば$\mathscr{M}(X)$は距離づけ可能でしかも可分となる。逆も可。

証明）[23]　Xを可分とすればUrysohnの埋め込み定理によって，Xは閉区間$[0, 1]$の可算直積に埋め込まれる。したがってXは全有界に距離づけ可能である。

レンマ3により，$\mathscr{U}(X)$は可分。そこで$\mathscr{U}(X)$の可算稠密集合を$\{g_1, g_2, \cdots\cdots\}$としよう。$R^\infty$を$R$の可算直積とし，写像$T:\mathscr{M}(X)\to R^\infty$を次のように定義する。

$$T:\mu\longmapsto\left(\int_X g_1d\mu,\ \int_X g_2d\mu,\ \cdots\cdots\right)$$

以下，Tが$\mathscr{M}(X)$と$T(\mathscr{M}(X))\subset R^\infty$との間に位相同型を与えることを示す。

(1°)　Tは単射：$T(\mu)=T(\nu)$であれば

$$\int g_r d\mu=\int g_r d\nu \qquad \text{for all } r=1, 2\cdots\cdots$$

$\{g_1, g_2, \cdots\cdots\}$は$\mathscr{U}(X)$で稠密ゆえ，すべての$g\in\mathscr{U}(X)$に対して

$$\int gd\mu=\int gd\nu。$$

$\therefore\ \mu=\nu$ [24]

(2°)　Tは連続：$w^*\text{-}\lim_\alpha \mu_\alpha=\mu$とすれば，定義によって，

$$\int g_r d\mu_\alpha\to\int g_r d\mu \qquad \text{for all } r。$$

$$\therefore\ T(\mu_\alpha)\to T(\mu)$$

(3°)　T^{-1}は連続：$\{\mu_\alpha\}$を$\mathscr{M}(X)$のnetとし，$T(\mu_\alpha)\to T(\mu)$

$$\text{i. e. } \int g_r d\mu_\alpha\to\int g_r d\mu \qquad \text{for all } r$$

とする。任意の$g\in\mathscr{U}(X)$に対して，

$$\left|\int gd\mu_\alpha-\int gd\mu\right|\leqq 2\,\|g-g_r\| + \left|\int g_r d\mu_\alpha-\int g_r d\mu\right|$$

したがって，

$$\overline{\lim_\alpha}\left|\int gd\mu_\alpha-\int gd\mu\right|\leqq 2\,\|g-g_r\|$$

しかし，$g\in\mathscr{U}(X)$に対して$\|g-g_{n_k}\|\to 0$を満たす点列$\{g_{n_k}\}$が存在するから，

$$\overline{\lim_\alpha}\left|\int gd\mu_\alpha-\int gd\mu\right|=0。$$

定理1により，T^{-1}は連続。

以上によりTは$\mathscr{M}(X)$と$T(\mathscr{M}(X))\subset R^\infty$との間に位相同型を与えることが知られた。したがって$\mathscr{M}(X)$は距離づけ可能であり，またR^∞は可分ゆえ，$\mathscr{M}(X)$も可分。

逆に，$\mathscr{M}(X)$を可分な距離空間とする。レンマ1によってXはDirac測度の空間Δに位相同型である。$\Delta\subset\mathscr{M}(X)$は可分であるから$X$も可分。

（証了）

系2　Xを可分な距離空間とする。このときX上に

注(21)　位相空間一般論の成書を見よ。たとえばKelley〔17〕p. 196.

(22)　Dunford-Schwartz〔9〕p. 437.

(23)　Parthasarathy〔23〕pp. 43-44.

(24)　定理1のあとに述べた注意を見よ！

元の距離と同値な距離を定め，その新しい距離について有界かつ，一様連続な函数列 $\{g_1, g_2, \cdots\cdots\}$ で次のような条件を満たすものを存在せしめることができる。すなわち，$\mathscr{M}(X)$ における任意の点列 $\{\mu_n\}$ に関して

$$w^*-\lim_n \mu_n=\mu$$

$$\Longleftrightarrow \lim_n \int_X g_r d\mu_n=\int_X g_r d\mu \quad \text{for } r=1, 2, \cdots\cdots$$

さて X が可分な距離空間であるとき，$\mathscr{M}(X)$ は具体的にどのような距離によって距離づけ可能であるか。次にそれを検討する。

まず $E\in\mathscr{B}$ について $B_\varepsilon(E)=\{x\in X \mid \rho(x, E)<\varepsilon\}$ とする。このとき $\mu, \nu\in\mathscr{M}(X)$ に対して，

$$\eta(\mu, \nu)=\inf\{\varepsilon>0 \mid \mu(E)\leqq\nu(B_\varepsilon(E))+\varepsilon \text{ and } \nu(E)\leqq\mu(B_\varepsilon(E))+\varepsilon \text{ for all } E\in\mathscr{B}\}$$

と定義すれば，η は $\mathscr{M}(X)$ 上の距離となる。(25) この距離を Prohorov の距離と言う。重要なことは，**Prohorov の距離によって定まる $\mathscr{M}(X)$ 上の位相は＊弱位相と一致すること**，これである。以下，その証明。(26)

はじめに $\mathscr{M}(X)$ の点列 $\{\mu_n\}$ と $\mu\in\mathscr{M}(X)$ について，$\lim_{n\to\infty}\eta(\mu_n, \mu)=0$ を仮定する。任意の $\varepsilon>0$ と閉集合 F に対して，

$$\delta<\varepsilon$$

かつ

$$\mu(B_\delta(F))<\mu(F)+\frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $\delta>0$ をとる。（実際，このような $\delta>0$ は存在する。）この δ について，十分大なる n をとるならば

$$\eta(\mu_n, \mu)<\frac{\delta}{2}$$

とすることができるから，やはり十分大なる n について，(27)

$$\mu_n(F)<\mu(B_\delta(F))+\delta<\mu(F)+\varepsilon.$$

ところで $\varepsilon>0$ は任意であったから，

$$\overline{\lim_n}\mu_n(F)\leqq\mu(F)$$

ゆえに定理1により，

$$w^*-\lim_n\mu_n=\mu.$$

逆に，$w^*-\lim_n\mu_n=\mu$ を仮定する。任意の $\varepsilon>0$ に対して，$3\delta<\varepsilon$ を満たすように $\delta>0$ を選ぶ。半径が δ よりも小で，しかも μ に関して連続集合となる開球を以て X を被覆する。X は可分であるから，それは可算部分被覆を有する。これから周知の手法をつうじて $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=X$，$A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ かつ diameter of $A_i<\delta$ を満たす連続集合 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ を構成することができる。$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ であるから，十分大なる k について，

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)>1-\delta \tag{1}$$

$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_k$ に属する集合の合併から成る（有限）集合族を $\mathscr{F}$ とすれば，$\mathscr{F}$ の元は μ－連続集合である。$w^*-\lim_n\mu_n=\mu$ から，任意の $A\in\mathscr{F}$ について，十分大なる n をとれば，

$$|\mu_n(A)-\mu(A)|<\delta \tag{2}$$

これと（1）とから

$$\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)>1-2\delta \tag{3}$$

さて $E\in\mathscr{B}$ とし，

$$A=\cup\{A_i \mid A_i\cap E\neq\emptyset;\ i=1, 2, \cdots, k\}$$

とする。

$$E\subset A\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)^c$$

$$A\subset B_\delta(E) \ (\text{なぜなら diameter of } A_i<\delta)$$

と不等式(1)(2)(3)から，十分大なる n については

注(25) 次の公準だけを確認しておこう。$\eta(\mu, \nu)=0$ とする。このときすべての閉集合 F について $\mu(F)=\nu(F)$ である。したがって，すべての Borel 集合 $E\in\mathscr{B}$ に対して $\mu(E)=\nu(E)$，すなわち $\mu=\nu$ が成り立つ。距離に関する他の公準の証明も容易。

(26) Billingsley〔2〕pp. 238-239.

(27) $\mu_n(F)<\mu(B_{\delta/2}(F))+\frac{\delta}{2}<\mu(B_\delta(F))+\frac{\delta}{2}<\mu(F)+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}<\mu(F)+\varepsilon$

$$\mu(E) \leqq \mu_n(B_\delta(E)) + 2\delta$$
$$\mu_n(E) \leqq \mu(B_\delta(E)) + 3\delta$$

ここで $3\delta < \varepsilon$ であるから，十分大なる n については，

$$\eta\ (\mu,\ \mu_n) < \varepsilon。$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \eta\ (\mu,\ \mu_n) = 0 \qquad \text{(証了)}$$

さて，X が可分であれば $\mathscr{M}(X)$ も可分であるが，$\mathscr{M}(X)$ の可算稠密な部分集合を具体的に見出すことができるであろうか。次の定理はその問に肯定的な答えを与えるものである。

定理 5 （可算稠密部分集合） Xを可分距離空間とし，DはXの可算稠密部分集合とする。このときDの有限部分集合を台とするような（X上の）確率測度の集合 $\mathscr{F}(D)$ は $\mathscr{M}(X)$ において稠密である。

証明）[28] Xの有限集合を台とするような確率測度の集合を$\mathscr{F}(X)$ としよう。DがXで稠密であることから$\mathscr{F}(D)$ は$\mathscr{F}(X)$ において稠密である。[29]また$\mathscr{F}(X)$ はXの可算部分集合を台とする確率測度の作る空間において稠密である（容易！）。したがって$\mathscr{M}(X)$ の任意の測度が，可算部分集合を台とする測度の＊弱収束極限になることを示せばよいことになる。

まず $\mu\in\mathscr{M}(X)$を固定する。Xは可分であるから，各自然数nに対して，

$$X = \bigcup_j A_{nj},\quad A_{nj}\cap A_{nk} = 0 \text{ for } j \neq k,$$

$$A_{nj} \in \mathscr{B}(X) \text{ for all } n,\ j$$

$$\text{diameter of } A_{nj} \leqq \frac{1}{n} \qquad \text{for all } j$$

を満たすような $\{A_{nj}\}$ を選ぶことができる。つぎに $x_{nj}\in A_{nj}$ を勝手に選び，測度 μ_n を

$$\mu\,(A_{nj}) = \mu_n(\{x_{nj}\})$$

と定義する。$g\in\mathscr{U}(X)$ を任意に選んで

$$\alpha_{nj} = \inf_{x\in A_{nj}} g\ (x)$$

$$\beta_{nj} = \sup_{x\in A_{nj}} g\ (x)$$

とする。gは一様連続であり，またjについて一様に diameter of $A_{nj}\to 0$ as $n\to\infty$であるから，

$$\sup_j\ (\beta_{nj} - \alpha_{nj}) \to 0 \qquad \text{as } n\to\infty$$

さて，μ_n の定義から，

$$\left| \int g d\mu_n - \int g d\mu \right|$$
$$= \left| \sum_j \int_{A_{nj}} (g - g\ (x_{nj}))\ d\mu \right|$$
$$\leqq \sup_j\ \ (\beta_{nj} - \alpha_{nj}) \to 0 \qquad (\text{as } n\to\infty)$$

$g\in\mathscr{U}(X)$ は任意であったから，$w^*-\lim\ \mu_n = \mu$。

（証了）

4．コンパクト

次の定理はXのコンパクト性と$\mathscr{M}(X)$ のコンパクト性が同値となることを示す重要なものである。

定理 6 （コンパクト） $\mathscr{M}(X)$ がコンパクトになるためにはXがコンパクトであることが必要十分である。

証明）[30] <十分性> まずXがコンパクトな距離空間としよう。このとき$\mathscr{C}^b(X)$ は可分な Banach 空間となる。ゆえに$\mathscr{C}^b(X)$ の点列$\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して，

$$g_1 = 1\ ;\ \|g_n\| \leqq 1 \qquad \text{for all } n$$

かつ $\mathscr{C}^b(X)$ における 0 を中心とする単位球 S_0 の中で稠密とすることができる。写像T：$\mathscr{M}(X) \to [-1,1]^\infty$ を

注(28) Billingsley〔2〕p. 237, Parthasarathy〔23〕pp. 44-45.

(29) 実際，まず $\mu\in\mathscr{F}(X)$ の台を $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して，各 x_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ を中心とし，半径 $1/k$ $(k=1, 2, \cdots)$ の開球 $B_1k(x_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ を作る。$\overline{D}=X$ ゆえ，各 i に対して必ず互いに相異なる $yk_i\in D$ が存在して $y_{ki}\in B_1/k(x_i)$ とすることができる。そこで $\{y_{k1}, y_{k2}, \cdots, y_{kn}\}$ を台とする確率測度 $\nu_k\in\mathscr{F}(D)$ を $\nu_k(\{y_{ki}\}) = \mu(\{x_i\})(i=1, 2, \cdots, n)$ と定義するならば，任意の $g\in\mathscr{U}(X)$ と $\varepsilon>0$ に対して，

$$\sup|\ g(x_i) - g(y_{ki})\ | \to 0 \text{ as } k\to\infty$$

とすることができる。ゆえに

$$\left|\int_X g d\mu - \int_X g d\nu_k\right| = \left|\ \sum g(x_i)\mu(\{x_i\}) - \sum g(y_i)\nu_k(\{y_{ki}\})\ \right| \leqq \sum |\ g(x_i) - g(y_{ki})\ |\ \mu(\{x_i\}) \to 0$$

(30) Parthasarathy〔23〕pp. 45-46.

$$\mu \longmapsto \left(\int g_1 d\mu, \int g_2 d\mu, \cdots\cdots\right)$$

で定義すれば定理4で示したと同様に，T は $\mathscr{M}(X)$ と$[-1, 1]^\infty$ の部分集合$T(\mathscr{M}(X))\subset[-1, 1]^\infty$との間に位相同型を与える。そこで$T(\mathscr{M}(X))$が$[-1, 1]^\infty$の閉部分集合であることを証明しよう。そうすれば$\mathscr{M}(X)$ のコンパクト性が示されたことになる。

$\{\mu_n\}$ を$T(\mu_n)\longrightarrow(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$となるような$\mathscr{M}(X)$の点列とする。また$g$を$\mathscr{C}^b(X)$の単位球$S_0$に属する任意の函数とすれば，$\{g_n\}$の部分列$\{g_{n_r}\}$が存在して，

$$\|g_{n_r}-g\|\to 0 \text{ as } r\to\infty。$$

すると，

$$\begin{aligned}&\left|\int_X g d\mu_n-\int_X g d\mu_m\right|\\ &=\left|\int_X \{g-g_{n_r})+g_{n_r}\}d\mu_n-\int_X\{(g-g_{n_r})+g_{n_r}\}d\mu_m\right|\\ &\leqq 2\|g-g_{n_r}\|+\left|\int_X g_{n_r}d\mu_n-\int_X g_{n_r}d\mu_m\right|\end{aligned}$$

したがって $T(\mu_n)$ が収束列であることを考慮して，

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\left|\int_X g d\mu_n-\int_X g d\mu_m\right|\leqq 2\|g-g_{n_r}\|。$$

そこで $r\to\infty$ とすれば，

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\left|\int_X g d\mu_n-\int_X g d\mu_m\right|=0$$

かくして，$\mathscr{C}^b(X)$ の単位球 S_0 の任意の元gに対して

$$\lim_n \int_X g d\mu_n \equiv \Lambda(g)$$

が存在する。任意の$f\in\mathscr{C}^b(X)$ に対して適当に $c\neq 0$ をとれば，必ず $cf\in S_0$。とすることができる。そこで

$$\Lambda(f)=c\Lambda(f/c)\ ;\ f\in\mathscr{C}^b(X)$$

と定義すれば，Λは明らかに well-difined である。また Λは$\mathscr{C}^b(X)$ 上の正の線形汎函数で$\|\Lambda\|=1$となることは容易に確かめることができる。[31] ゆえに，Riesz-Markov-Kakutani の定理から，

$$\Lambda(f)=\int_X f d\mu;\ f\in\mathscr{C}^b(X)$$

を満たす (Borel) 確率測度μが存在する。とくに

$$\int_X g_r d\mu=\alpha_r$$

である。かくして

$$T(\mu)=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots)$$

となり，したがって $T(\mathscr{M}(X))$ は閉集合である。

<必要性>逆に $\mathscr{M}(X)$ がコンパクトな距離空間としよう。レンマ1，2により，Xは$\mathscr{M}(X)$ の閉部分集合Δと位相同型である。よってXはコンパクト。

（証了）

5. 完 備 性

定理7（完備性） Xを可分な距離空間としよう。このとき$\mathscr{M}(X)$ が（位相空間として）完備となるためにはXが完備であることが必要十分である。

証明[32] まず位相空間一般論でよく知られた次の事実に注意しておく。すなわち，(Alexandroff)

> “ある距離空間が完備であるための必要十分条件は，それが(他の)完備距離空間のG_δ－集合として位相同型に埋めこまれることである。このときは，他の任意の完備距離空間への埋め込み（もしそれが存在すれば）の像はすべてG_δ－集合となる。”[33]

<十分性> まずXが完備とする。Xは可分であるから，定理4でおこなったように，Urysohnの定理から，Xは全有界としてよい。その完備化$\tilde{X}$はコンパクトで，Alexandroff の定理から，Xは$\tilde{X}$のG_δ－集合である。いま

$$\mathscr{M}_0=\{\mu\in\mathscr{M}(\tilde{X})\mid\mu(\tilde{X}\diagdown X)=0\}$$

とするならば，$\mathscr{M}_0$と$\mathscr{M}(X)$とは位相同型である。[34] 定理6から$\mathscr{M}(\tilde{X})$ はコンパクトであり，したがって完

注(31) $\|\Lambda\|=\sup_{f\in S_0}|\Lambda(f)|=\sup_{f\in S_0}\left|\lim_n \int_X f d\mu_n\right|\leqq 1$

であり，しかも $\Lambda(1)=1$ であるから，$\|\Lambda\|=1$。

(32) Parthasarathy〔23〕pp. 46-47.

(33) Kelley〔17〕pp. 207-208.

(34) 各 $\tilde{\mu}\in\mathscr{M}_0$に対して，$\tilde{\mu}$の$X$への限定を$\mu$とすれば，写像$\tilde{\mu}\longmapsto\mu$は $\mathscr{M}_0$ と $\mathscr{M}(X)$ の間に位相同型を与える。

備である。ゆえに$\mathscr{M}(X)$が完備であることを示すには，$\mathscr{M}_0$が$\mathscr{M}(\tilde{X})$のG_δ-集合であることを証明すればよい。以下その証明。

X は $\tilde{X}$ の G_δ- 集合であるから，

$$G_1\supseteq G_2\supseteq\cdots\cdots,$$
$$\bigcap_k G_k=X$$

を満たす$\tilde{X}$の開集合の列$\{G_k\}$が存在する。明らかに

$$\mathscr{M}_0=\bigcap_k\{\mu\in\mathscr{M}(\tilde{X})\mid\mu(\tilde{X}\setminus G_k)=0\}$$

$$=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{r=1}^{\infty}\{\mu\in\mathscr{M}(\tilde{X})\mid\mu(\tilde{X}\setminus G_k<\frac{1}{r}\}$$

ここで，集合

$$\{\mu\in\mathscr{M}(\tilde{X})\mid\mu(\tilde{X}\setminus G_k)<\frac{1}{r}\}$$

が $\mathscr{M}(\tilde{X})$ の開集合であることを示す。つまり，

$$\{\mu\in\mathscr{M}(\tilde{X})\mid\mu(\tilde{X}\setminus G_k)\geqq\frac{1}{r}\}$$

が閉であることを言えばよい。いま

$$w^*\text{-}\lim_n\mu_n=\mu,\ \mu_n(\tilde{X}\setminus G_k)\geqq\frac{1}{r}$$

とすれば，定理1から，閉集合 $\tilde{X}\setminus G_k$ について，

$$\mu(\tilde{X}\setminus G_K)\geqq\overline{\lim_n}\mu_n(\tilde{X}\setminus G_k)\geqq\frac{1}{r}$$

かくして，$\mathscr{M}_0$は$\mathscr{M}(\tilde{X})$のG_δ—集合であり，$\mathscr{M}(X)$は完備である。

<必要性> 逆に$\mathscr{M}(X)$が完備，可分な距離空間としよう。レンマ1，2より，Xは$\mathscr{M}(X)$の閉部分集合Δに位相同型であるから，Xは完備である。

（証了）

6. 緊密性

定義 Γを$\mathscr{M}(X)$の部分集合とする。任意の$\varepsilon>0$に対して

$$\mu(K_\varepsilon)\geqq 1-\varepsilon\quad\text{for all }\mu\in\Gamma$$

を満たすコンパクト集合 $K_\varepsilon\subset X$ が存在するとき，Γは一様に緊密 (uniformly tight) であると言う。

定理8（緊密性と相対コンパクト） Xを完備，可分な距離空間とする。このとき，$\Gamma\subset\mathscr{M}(X)$が＊弱位相について相対コンパクトであるためには，$\Gamma$が一様に緊密であることが必要十分である。

証明)(35) <十分性> まずΓが一様に緊密であることを仮定しよう。すると定義によって，各自然数kに対し，

$$\mu(K_k)>1-\frac{1}{k}\qquad\text{for all }\mu\in\Gamma$$

を満たすコンパクト集合が存在する。ここで一般性を失うことなく

$$K_1\subset K_2\subset\cdots\cdots$$

とすることができる。Xは可分な距離空間であるから，Xには可算基$\mathscr{G}$が存在する。そこで

$$\bar{U}\cap K_k\ ;\ k=1,2,\cdots\cdots,\ U\in\mathscr{G}$$

の形の集合を考え，このような集合の有限個の合併から成る集合族を$\mathscr{W}$としよう。すると

1° $\mathscr{W}$は可算集合。

2° $W_1, W_2, \cdots\cdots, W_n\in\mathscr{W}$とすれば，

$$\bigcup_{i=1}^{n}W_i\in\mathscr{W}$$

3° $\mathscr{W}$の元はすべてコンパクト集合。

さて，$\{\mu_n\}$をΓにおける任意の点列としよう。対角線論法によって，$\{\mu_n\}$から適当な部分列$\{\mu_{n_m}\}$を選び，すべての$W\in\mathscr{W}$について

$$\alpha(W)=\lim_{m\to\infty}\mu_{n_m}(W)\tag{1}$$

が存在するようにする。いま，任意の開集合Gに対して

$$\mu(G)=\sup_{W\subset G}\alpha(W)\tag{2}$$

を満足するような $\mu\in\mathscr{M}(X)$ が存在するものとすれば，

$$w^*\text{-}\lim_m\mu_{n_m}=\mu$$

が成り立つ。なぜなら，$W\subset G$ とすれば，$\alpha(W)=\lim_m\mu_{n_m}(W)\leqq\underline{\lim}_m\mu_{n_m}(G)$ であるから $\mu(G)\leqq\underline{\lim}_m\mu_{n_m}(G)$。ゆえに定理1によって，$w^*\text{-}\lim_m\mu_{n_m}=\mu$

注(35) Billingsley〔3〕pp. 10-12。Dudley〔8〕10. 4 には別証がある。

である。かくして(2)を満たすような $\mu\in\mathscr{M}(X)$ を見出すことが，以下の行論における眼目となる。

まず(1)で定義された $\alpha(\cdot)$ は次の性質を有することは容易に知られる。すなわち $W_1, W_2\in\mathscr{W}$ に対して

$$W_1\subset W_2 \Longrightarrow \alpha(W_1)\leqq\alpha(W_2) \tag{3}$$

$$W_1\cap W_2=0 \Longrightarrow$$
$$\alpha(W_1\cup W_2)=\alpha(W_1)+\alpha(W_2) \tag{4}$$

$$\alpha(W_1\cup W_2)\leqq\alpha(W_1)+\alpha(W_2) \tag{5}$$

次いで，各開集合 G に対して

$$\beta(G)=\sup_{W\subset G}\alpha(W) \tag{6}$$

と定義し，さらに任意の部分集合 $M\subset X$ に対して

$$\gamma(M)=\inf_{M\subset G}\beta(G) \tag{7}$$

とおく。明らかに，開集合 G に対しては $\beta(G)=\gamma(G)$ である。

$\beta(\cdot)$ は開集合に関して有限劣加法的である。

その証明：$W\subset G_1\cup G_2$, $W\in\mathscr{W}$

とするとき，

$$F_1=\{x\in W \mid \rho(x, G_1^c)\geqq\rho(x, G_2^c)\}$$
$$F_2=\{x\in W \mid \rho(x, G_2^c)\geqq\rho(x, G_1^c)\}$$

とおく。いま仮に $F_1\not\subset G_1$ としよう。そこで $x\in F_1$ かつ $x\notin G_1$ とすれば，$x\in G_2$。したがって G_2^c が閉であることから，$\rho(x, G_1^c)=0<\rho(x, G_2^c)$ となり矛盾。ゆえに $F_1\subset G_1$ でなければならない。同様にして $F_2\subset G_2$。F_1, F_2 はコンパクト集合 W の閉部分集合であるからやはりコンパクト。F_1, F_2 のコンパクト性と $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$ から，次のような $W_1, W_2\in\mathscr{W}$ が存在する。

$$F_1\subset W_1\subset G_1$$

$$F_2\subset W_2\subset G_2$$

(3), (5), (6)から

$$\alpha(W)\leqq\alpha(W_1\cup W_2)\leqq\alpha(W_1)+\alpha(W_2)$$
$$\leqq\beta(G_1)+\beta(G_2)。$$

$\beta(\cdot)$ は開集合に関して σ- 劣加法的である。

その証明：いま

$$W\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$$

とすれば，W はコンパクトであるから，

$$W\subset\bigcup_{n=1}^{N}G_n \qquad \text{for some } N$$

したがって $\beta(\cdot)$ の劣加法性から，

$$\alpha(W)\leqq\beta\left(\bigcup_{n=1}^{N}G_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{N}\beta(G_n)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\beta(G_n)$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ に含まれる W について sup をとれば

$$\beta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\beta(G_n)$$

$\gamma(\cdot)$ は外測度である。

その証明：γ が単調であること (i. e. $M_1\subset M_2 \Longrightarrow \gamma(M_1)\leqq\gamma(M_2)$) は自明ゆえ，$\gamma$ が σ- 劣加法的であることさえ示せばよい。任意の $\varepsilon>0$，任意の $M_n\subset X$ について

$$M_n\subset G_n$$
$$\beta(G_n)<\gamma(M_n)+\varepsilon/2^n$$

を満たすように開集合 $G_n (n=1, 2, \cdots)$ を選ぶ。すると β の σ- 劣加法性から，

$$\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\leqq\beta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\beta(G_n)$$
$$<\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(M_n)+\varepsilon$$

ε は任意であったから，

$$\gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(M_n)。$$

すべての閉集合は γ- 可測である。

その証明：示すべきことは，任意の閉集合 F と，任意の部分集合 $M\subset X$ に対して

$$\gamma(M)\geqq\gamma(M\cap F)+\gamma(M\cap F^c) \tag{8}$$

が成り立つことである。しかし(8)を示すためには，すべての開集合 G について

$$\beta(G)\geqq\gamma(G\cap F)+\gamma(G\cap F^c) \tag{9}$$

が成り立つことを示せば十分である。蓋し，

$$G\supset M \Longrightarrow \beta(G)\geqq\gamma(M\cap F)+\gamma(M\cap F^c)$$

ゆえ G について inf. をとれば(8)を得るからである。

任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$W_0 \subset G \cap F^c$$
$$\alpha(W_0) > \beta(G \cap F^c) - \varepsilon$$

を成り立たしめる $W_0 \in \mathscr{W}$ と

$$W_1 \subset G \cap W_0{}^c$$
$$\alpha(W_1) > \beta(G \cap W_0{}^c) - \varepsilon$$

を満たす $W_1 \in \mathscr{W}$ とを選ぶ。$W_0 \cap W_1 = \emptyset$ かつ W_0, $W_1 \subset G$ であるから，(4)により，

$$\begin{aligned}\beta(G) &\geqq \alpha(W_0 \cup W_1) = \alpha(W_0) + \alpha(W_1)\\ &> \beta(G \cap F^c) + \beta(G \cap W_0{}^c) - 2\varepsilon\\ &= \gamma(G \cap F^c) + \gamma(G \cap F) - 2\varepsilon\end{aligned}$$

これからただちに(9)を得る。

上の命題からすべての Borel 集合は γ- 可測となる。

そこで γ の $\mathscr{B}$ への限定を μ とすれば，μ は X 上の測度で，しかも各開集合 G については，

$$\mu(G) = \gamma(G) = \beta(G)。$$

したがって μ は(2)を満足する。最後に

$$1 \geqq \mu(X) = \beta(X) \geqq \sup_k \alpha(K_k) \geqq \sup_k (1 - \frac{1}{k})$$

から，μ は確率測度である。

<必要性> 逆に $\Gamma \subset \mathscr{M}(X)$ が相対コンパクトであるとしよう。$S_1, S_2, \cdots$ を半径 δ の開球で $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = X$ を満たすものとする。任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$B_N = \bigcup_{n=1}^{N} S_n$$
$$\mu(B_N) > 1 - \varepsilon \qquad \text{for all } \mu \in \Gamma$$

を満たす N が存在する。

その理由：もしそれが正しくないとすれば，ある $\varepsilon>0$ と $\mu_N \in \Gamma$ とが存在して，

$$\mu_N(B_N) \leqq 1 - \varepsilon \qquad N = 1, 2, \cdots\cdots$$

Γ は相対コンパクトであるから，$\{\mu_N\}$ の適当な部分列 $\{\mu_{Nm}\}$ をとれば

$$w^* - \lim_m \mu_{Nm} = \mu_0 \in \mathscr{M}(X) \tag{10}$$

しかし，そうすると

$$\mu_0(B_N) \leqq \varliminf_m \mu_{Nm}(B_N) \leqq \varliminf_m \mu_{Nm}(B_{Nm})$$
$$\leqq 1 - \varepsilon$$

である一方 $B_N \uparrow X$ となるから，(10)は不可能。(以上)

このようにして，各 ε, $\delta>0$ に対して，

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} S_n) > 1 - \varepsilon \qquad \text{for all } \mu \in \Gamma$$

を満たす半径 δ の開球 $S_1, \cdots S_N$ が存在する。そこで

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N_k} S_{kn}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

を満たす，半径 $1/k$ の球 $S_{k1}, \cdots\cdots, S_{kN_k}$ をとり，

$$K = \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{N_k} S_{kn}}$$

とすれば K はコンパクト($\cap \cup S_{kn}$ の全有界性から)で，

$$\mu(K) > 1 - \varepsilon \qquad \text{for all } \mu \in \Gamma$$

(証了)

参考文献

〔1〕 Alexandroff, A. D. "Additive Set Functions in Abstract Spaces, I-III" *Mat. Sbornik N.S. 8* (50, 1940 309-348; ibid. *9* (51), 1941 563-628; ibid. *13* (55) 1943 169-238.

〔2〕 Billingsley, P. : *Convergence of Probability Measures* (Wiley, N.Y.) 1968.

〔3〕 ———: *Weak Convergence of Measures: Applications in Probability* (Society for Industrial and Applied Mathematics, Pennsylvania) 1971.

〔4〕 Bourbaki, N. : *Eléments de mathématique : Intégration* (Livre XIII) (Hermann, Paris) 1973.

〔5〕 Choquet, G. : *Lectures on Analysis* Vol. I. (Benjamin, London) 1969.

〔6〕 Dudley, R. M. "Convergence of Baire Measures" *Studia Math. 27*, 1966, 251-268.

〔7〕 ———: "Distances of Probability Measures and Random Variables" *Ann. Math. Statist. 39*, 1968, 1563-1572.

〔8〕 ———: *Probability and Metrics-Convergence of Laws on Metric Spaces, with a View to Statistical Testing* (Aarhus Universitet) 1976.

〔9〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz : *Linear Operators*, Par. I (Interscience, N.Y.) 1958.

〔10〕 Fortet, R. and E. Mourier "Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique" *Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 60*, 1953, 267-285.

〔11〕 Grandmont, J. "On the Short-run Equilibrium in a Monetary Economy" in J. H. Dréze ed. *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality* (Macmillan, London) 1974.

〔12〕 Halmos, P. : *Measure Theory* (van Nostrand, N.Y.) 1950.

〔13〕 Hildenbrand, W. : *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton Univ. Press, Princeton) 1974.

〔14〕 Kallianpur, G. "The Topology of Weak Convergence of Probability Measures" *J. Math. Mech. 10*, 1961, 947-969.

〔15〕 加藤敏夫『位相解析』(共立出版，東京) 1957.

〔16〕 河田龍夫『応用数学概論』II (岩波書店，東京) 1952.

〔17〕 Kelley, J. L. : *General Topology* (van Nostrand, N.Y.) 1955.

〔18〕 Kisynski, J. "On the Generation of Tight Measures" *Stud, Math. 30*, 1968, 141-151.

〔19〕 小泉澄之『実解析』(実教出版，東京) 1977.

〔20〕 丸山徹「一時的均衡分析」『三田学会雑誌』69巻7号 (1976) pp. 55-73 および 69巻8号 (1976) pp. 33～51.

〔21〕 Maruyama, T. "Space of Measures" mimeographed, 1977.

〔22〕 Mourier, E. "Eléments aléatoires dans un espace de Banach" *Ann. Inst. Henri Poincaré 13*, 1953, 161-244.

〔23〕 Parthasarathy, K.R. : *Probability Measures on Metric Spaces*, (Academic Press, N.Y.) 1967.

〔24〕 Prohorov, Yu. V. "Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory" *Theor. Prob. Appl. 1*, 1956, 157-214.

〔25〕 Rao, R.R. "Relations between Weak and Uniform Convergence of Measures with Applications" *Ann. Math. Statist. 33*, 1962, 659-680.

〔26〕 Schwartz, L. : *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, (Oxford, London) 1973.

〔27〕 Sonderman, D. "Temporary Competitive Equilibrium under Uncertainty" in J. H. Dréze ed. *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality* (Macmillan, London) 1974.

〔28〕 Topsøe, F. : *Topology and Measure* (Springer, Berlin) 1970.

〔29〕 Varadarajan, V. S. "Weak Convergence of Measures on Separable Metric Spaces" *Sankhyā 19*, 1958, 15-22.

〔30〕 ———"Measures on Topological Spaces" *Amer. Math. Soc. Transl.* ser. II, *48*, 1965, 161-228.

〔31〕 Yosida, K. : *Functional Analysis* 3rd ed. (Springer, Berlin) 1971.

〔付記〕 本稿は二，三の機会に筆者が行なった講義の草稿に最小限の加筆を施したものである。冒頭に述べたとおり，この方面の研究書としてはBillingsley〔2〕，〔3〕と Parthasarathy〔23〕が基本的であるが，本稿もこれらの書物に多くを負うている。引用，利用をあらかじめ快く許して下さった P. Billingsley, K. R. Parthasarathy 両博士のご好意に心から謝意を表したい。

（経済学部助手）