

Title	選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論：古典的ニ財モデル
Sub Title	Statistical theory of the "complete determination method" for measuring preference functions
Author	松野, 一彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.3 (1977. 6) ,p.309(55)- 333(79)
JaLC DOI	10.14991/001.19770601-0055
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770601-0055

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論*

—古典的二財モデル—

松 野 一 彦

1. 序

ベルヌーイ・ラプラス型の選好関数のパラメタを測定する方法を考察する。測定の方法は種々考
えうるが、特に「完全決定法」⁽¹⁾と呼ばれる方法が用いられることがある。

この方法は統計的推定問題に対する一般的原理——例えば最小二乗法とか最尤法——から導かれ
るところのものではなかった。むしろ、そういった標準的方法が役に立たないという現場において、
実用の立場からあみ出されたのが完全決定法である。

従来の方法にとって代るこのような新しい方法が提出されたならば、その方法を統計理論的に吟
味してみるという問題が生じる。この完全決定法が通常の推定原理に照し合わせてどのような考え
方に基づいているのか、または通常の推定原理の枠外に位置しているのか、これらの点について完
全決定法の考え方を整理しなければならない。

また、この方法がパラメタ推定の方法として適当な方法であるかをも明らかにしなければならない。
すなわち、推定値として望ましい特性を持っているかどうかという問題である。この問題は、
完全決定法による推定値の標本分布を導き、その分布の形状を調べるということによって解かれる。
そして、この論文では完全決定法の標本分布論に関するいくつかの試みが提示される。⁽²⁾

* この研究は、辻村江太郎教授のセミナーで報告されたが、その機会を与えられたこと、また議論をして頂いたことにつ
いて辻村教授及びセミナーのメンバーの方々に御礼申し上げたい。

特に、小尾恵一郎教授からはこの論文ができてから、多くの指導をうけた。深く感謝したいと思う。

論文の中の誤り、不十分な点は、当然筆者の責任である。

注(1) 完全決定法は、辻村江太郎『消費者行動の理論』、有斐閣、昭和39年、第5、6章、及び K. Tsujimura and T.
Sato "Irreversibility of Consumer Behavior in Terms of Numerical Preference Fields," *Review of
Economics and Statistics*, Vol. 46, (1964) pp. 305-319, に登場した。その後、辻村『消費構造と物価』勁草書房、
1968年、辻村、黒田昌裕『日本経済の一般均衡分析』筑摩書房、1974年においても利用、言及されているところの選好
関数測定法である。

注(2) 完全決定法の統計理論的解明について、この論文では扱いきれない幾多の問題が残っている。しかし、この方法の良
さについて今までなされてきた推測に対する答は提供できたと考えられる。また、完全決定法の含んでいる確率論的仕
組みについての理解は深められたと思う。

§2では、計測の対象となる消費者選好の確率モデルが示される。それを推定するための完全決定法の手続きは§3で与えられる。分析の範囲がどの程度に及ぶかは§4で述べられる。§5, 6, 7では、完全決定値と呼ばれる統計量の性質が調べられる。§8, 9では、完全決定法の手続きの中に登場する決定値のヒストグラムに関して分析がなされる。

2. モデル

2-1 構造方程式系, 誘導型

完全決定法によって測定しようとしているのは、次の型の選好関数である。

$$(2.1) \quad I = (\alpha_1 + q_1)^{\beta_1} (\alpha_2 + q_2)^{\beta_2}$$

これは2財モデルのベルヌーイ・ラプラス型選好関数であって、 q_1, q_2 は各財の消費量であり、 $\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ は未知パラメタ。消費主体を家計としてパラメタ α_1, α_2 は、世帯人員数 m によって次のように動く。

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{11} + \alpha_{12}m, \\ \alpha_2 &= \alpha_{21} + \alpha_{22}m. \end{aligned}$$

収支均等条件は次のように書ける。

$$(2.2.a) \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = Y$$

ただし、 p_1, p_2 は各財の価格、 Y は支出総額である。制約(2.2.a)の下で効用 I の極大条件は、

$$(2.3) \quad \beta_1/p_1(\alpha_{11} + \alpha_{12}m + q_1) = \beta_2/p_2(\alpha_{21} + \alpha_{22}m + q_2).$$

以上より、支出額、 $E_g = p_g q_g$ 、決定の構造方程式系は、⁽³⁾

$$(2.4) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix}.$$

ここで

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1}{\beta_2}, \\ \gamma' &= [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4] = [-\alpha_{11}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_{21}, -\alpha_{12}, \frac{\beta_1}{\beta_2} \alpha_{22}], \\ z' &= [z_1 z_2 \dots z_5] = [p_1 \ p_2 \ mp_1 \ mp_2 \ Y]. \end{aligned}$$

T 期間に渡る時系列データ、 $[E'_{.t} \ z'_{.t}] = [E_{1t}, E_{2t}, z_{1t}, \dots, z_{5t}]$, $t=1, \dots, T$, を使い、パラメタ

注(3) 完全決定法は、(2.1)以外の型でより多くの財についての選好関数の測定にも用いられる。更に、習慣形成を考慮したモデルをも対象にしている。その点では、ここでのモデルが一番簡単なものである。(2.4)は『消費者行動の理論』第6章の古典的モデルである。

$\alpha' = [\beta \ \gamma']$ が完全決定法によって推定される。

完全決定法の標本特性を調べるためにデータ発生の確率的モデルを次のように定める。

$$(2.6) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} E_{.t} = \begin{bmatrix} 0' & 1 \\ \gamma' & 0 \end{bmatrix} z_{.t} + \begin{bmatrix} 0 \\ u_t \end{bmatrix}.$$

すなわち、限界効用均等式に攪乱項 u_t を含んだショックモデルとする⁽⁴⁾。

$\beta \neq -1$ であるならば、次の誘導型（需要関数）を得る。

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} E_{1t} \\ E_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma' / (\beta + 1) & \beta / (\beta + 1) \\ -\gamma' / (\beta + 1) & 1 / (\beta + 1) \end{bmatrix} z_{.t} + \begin{bmatrix} u_t / (\beta + 1) \\ -u_t / (\beta + 1) \end{bmatrix} \\ \equiv \begin{bmatrix} \pi'_1 \\ \pi'_2 \end{bmatrix} z_{.t} + v_{.t} \equiv \Pi z_{.t} + v_{.t}.$$

2-2 内生変数の分布

攪乱項 u_t と外生変数 $z_{.t}$ の確率的性質を次のように設定する。

$$(2.8) \quad \begin{aligned} &u_t \sim N(0, \sigma^2), \\ &u_t \text{ と } u_s \text{ は独立,} \\ &z_{.t} \text{ は繰り返される標本抽出で一定,} \end{aligned}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z'_{.1} \\ \vdots \\ z'_{.T} \end{bmatrix} \text{ は位数 } 5.$$

誘導型 (2.7) と仮定 (2.8) により、内生変数の分布を得る。

$$(2.9) \quad \begin{aligned} &E_{.t} \sim N\left(\begin{bmatrix} \pi'_1 \\ \pi'_2 \end{bmatrix} z_{.t} \begin{bmatrix} \omega & -\omega \\ -\omega & \omega \end{bmatrix}\right), \\ &E_{.t} \text{ と } E_{.s} \text{ は独立,} \end{aligned}$$

ただし、 $\omega = \sigma^2 / (\beta + 1)^2$ 。

以下で現われる種々の統計量は、 $E_{.t}$ の何らかの関数として表わされる。これら統計量の標本分布を導くには、もとの $E_{.t}$ の分布 (2.9) が基本となる。⁽⁵⁾

分布 (2.9) の共分散行列は特異行列であり、 E_{1t} は、確率 1 で、 E_{2t} の線型関数（回帰式）として書ける。

$$(2.10) \quad \begin{aligned} E_{1t} &= \pi'_1 z_{.t} + \omega^{-1} (-\omega) (E_{2t} - \pi'_2 z_{.t}) \\ &= z_{5t} - E_{2t}. \end{aligned}$$

すなわち、収支均等式にもどった。(2.9)、(2.10) より、内生変数すべての分布を書き出すと、

注 (4) 完全決定法の採用はより複雑な現実を前提としていると考えられるが、ここでは簡単なショックモデルを仮定する。

(5) 理論モデル (2.4) と同様に確率関式も静学的なものである。動学的確率関式にするには、習慣形成を含む理論モデルか、系列相関を含む攪乱項を考えればよい。そのような関式での標本分布論は、非常に難しいものとなろう。

$$(2.11) \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1T} \\ E_{21} \\ \vdots \\ E_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{5t} - E_2 \\ \dots\dots\dots \\ N(Z\pi_2, \omega I_T) \end{bmatrix},$$

ただし, $z_5' = [z_{51} \dots z_{5T}]$.

2-3 識別性

確率構造方程式系 (2.6) のパラメタ β, γ の識別性を考える。制約 i) $\beta \neq -1$, ii) 収支均等式には z_{5t} が係数 1 をもって入り, 限界効用均等式には z_{5t} は入らない, の下でパラメタ β, γ は識別可能である。⁽⁶⁾

モデルは更に制約 iii) 収支均等式の攪乱項は恒等的にゼロ, iv) 収支均等式のゼロ制約, 及び“1”制約, を含むが, i) ii) だけで β, γ の識別には充分である。⁽⁷⁾

3. 完全決定法

完全決定法と呼ばれる限界効用均等式の測定法を提示する。モデル (2.6) 第二式の外生変数 $z_{1t} \dots z_{4t}$ には高い相関が観察される。そしてこの多重共線性による最小二乗法の推定値の不精確さを避けるということが以下の方法を採用することの動機であった。⁽⁸⁾⁽⁹⁾

3-1 推定式

完全決定法の基礎になる完全決定値は攪乱項を含まない T 本の限界効用均等式を使う。

$$(3.1) \quad E_{1t} = \beta E_{2t} + \gamma' z_{t1}, \quad t=1, \dots, T,$$

ここで $z_{t1}' = [z_{1t} \dots z_{4t}]$. 観察値 E_{1t}, E_{2t}, z_{t1} が与えられた時, 未知パラメタは $\beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ の 5

注 (6) T. C. Koopmans, H. Rubin, and B. Leipnik, "Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics" Chapt 2 in T. C. Koopmans(ed.) *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, New York: John Wiley and Sons, Inc. (1950)による。この時, (2.5) より a_{ij} も識別可能であるが, β_1, β_2 個別には識別不能である。

(7) R. Stone "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *Economic Journal*, Vol. 64 (1954), pp. 511-527, では, 制約 iv) も考慮した最尤法が試みられている。更に制約 iii) も使った最尤法については, R. W. Parks "Maximum Likelihood Estimation of the Linear Expenditure System," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66 (1971) pp. 900-903, を参照。

(8) この点については『理論』第5章又は『物価』第15章を参照されたい。また, 観察誤差と多重共線性がある時の最小二乗法の標本分布は, K. Matsuno "Multicollinearity and the Exact Distribution of the Least Squares Estimators in the Error Model," *Keio Economic Studies* Vol. 13 (1976) pp. 53-68, で導かれている。

(9) 古典的消費理論に対する習慣形成仮説の優位を確かめる, という統計学的手法にはのりにくい仮説検証を行ないたいということも大きな理由であろう。§3-4参照。

✓

個であるから、(3.1)の中から5本の方程式を取り出し、それを β, γ について解く。 T 本の内、 t_1, \dots, t_5 番目の方程式を取り、それによって解かれた β, γ の完全決定値を $b_{t_1 \dots t_5}, c'_{t_1 \dots t_5} = [c_{1t_1 \dots t_5} \dots c_{4t_1 \dots t_5}]$ と書く。これは線型方程式を解くこととなり、

$$(3.2) \quad \begin{bmatrix} b_{t_1 \dots t_5} \\ c'_{t_1 \dots t_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ E_{2t_2} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} Z_{t_1 \dots t_5}^{-1} \begin{bmatrix} E_{1t_1} \\ E_{1t_2} \\ \vdots \\ E_{1t_5} \end{bmatrix}$$

ただし

$$(3.3) \quad Z_{t_1 \dots t_5} = \begin{bmatrix} \bar{z}'_{t_1} \\ \vdots \\ \bar{z}'_{t_5} \end{bmatrix}$$

ここで仮定(2.8)により $Z_{t_1 \dots t_5}$ は位数4を持つ。更に、確率変数 $E_{2t_1}, \dots, E_{2t_5}$ は非特異正規分布に従うということから、(3.2)右辺の逆行列の位数が落ちるのは確率ゼロでしか起らない。すなわち、仮定の下では完全決定値は確率1で存在する。

3-2 完全決定値の集まり

T 本の方程式から、非復元で、5本取り出す方法(組み合わせ)は、

$$(3.4) \quad N = \frac{T!}{5!(T-5)!}$$

通りある。従って完全決定値 $[b_{t_1 \dots t_5}, c'_{t_1 \dots t_5}]$ は N 個ある。 N 個の決定値を $[b_1, c'_1], [b_2, c'_2], \dots, [b_N, c'_N]$ と表わすこともある。特に N 個全体を考える時には $[b_n, c'_n], n=1, \dots, N$, という添え字を用いる。

3-3 決定値のヒストグラム

N 個の決定値は5次元の直交座標空間に散らばるベクトルである。5次元の完全決定値空間における決定値 N 個の散らばり方は、ヒストグラムによって表示できる。

5次元空間のそれぞれの軸を $K_k - 1, k=1, \dots, 5$, 個の区間に区切る分点を

$$(3.5) \quad [i_{1k}, i_{2k}, \dots, i_{5k}], k=1, \dots, K_k$$

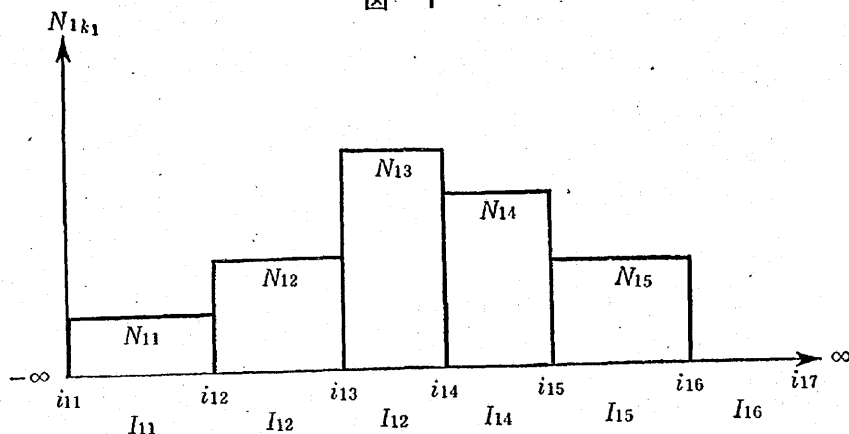
とする。これによって作られる各軸の区間を $I_{1k} = [i_{1k}, i_{1k+1}), I_{2k} = [i_{2k}, i_{2k+1}), \dots, I_{5k} = [i_{5k}, i_{5k+1}), k=1, \dots, K_k - 1$, とする。 $I_{1k_1}, \dots, I_{5k_5}$ の直積を $J_{k_1 \dots k_5}$ とする。これは全部で $K \equiv \prod_{k=1}^5 (K_k - 1)$ 個ある。

‘矩形’ $J_{k_1 \dots k_5}$ に落ちる、すなわち、

$$(3.5.a) \quad i_{1k_1} \leq b_n < i_{1k_1+1}, i_{2k_2} \leq c_{1n} < i_{2k_2+1}, \dots, i_{5k_5} \leq c_{4n} < i_{5k_5+1}$$

となる $[b_n, c_{1n} \dots c_{4n}]$ の個数を $N_{k_1 \dots k_5}$ とする。矩形 $J_{k_1 \dots k_5}$ 上に高さ $N_{k_1 \dots k_5}$ を取り棒柱図を描けば、それは N 個の決定値の散らばりを示すヒストグラム H となる。

図 1



5つの軸の内特定の一軸, 例えば b_n に関するもの, をとってこのヒストグラムを描けば図1のようになる。一次元だけのヒストグラム, 今は H_1 と書く, は完全決定値の marginal な散らばりを表わす。

区間分けの中で特に定めておきたいのは, 決定値を正・負に分ける方法である。すなわちヒストグラム H を作るのに,

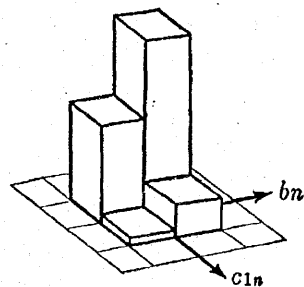
$$\begin{aligned}
 [i_{11} \ i_{21} \dots \ i_{51}] &= [-\infty, -\infty, \dots, -\infty] \\
 (3.6) \quad [i_{12} \ i_{22} \dots \ i_{52}] &= [0, 0, \dots, 0] \\
 [i_{13} \ i_{23} \dots \ i_{53}] &= [\infty, \infty, \dots, \infty]
 \end{aligned}$$

と定める。その結果できるヒストグラムは, 決定値 $[b_n \ c_n]$ をその個々の要素が正であるか負であるかによって仕分けした状態を表わすことになる。例えば2次元について描けば図2のごとくなる。4つの棒柱の高さは $(b_n \ c_{1n})$ が $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$ である決定値の個数を表わす。

3-4 決定値による検定⁽¹⁰⁾

§2に提示した古典的仮説との比較において“習慣形成仮説”が考えられる。習慣形成仮説に基づいても, そこに含まれるパラメタの完全決定値が数組得られるわけである。両仮説によるそれぞれの完全決定値の安定性(集中度)を比較してみる。両者の安定性をくらべて, より安定度の高い決定値を生む仮説の方を採択するという検定の方法が考えられる。この時, 安定度とは直感的な

図 2



注(10) 『理論』の第5・6章及び“Irreversibility~” section V を参照。

ものであるが、§3—3に述べたヒストグラムの集中度であるとも解される。

ヒストグラムの作り方は、矩形 $J_{k_1 \dots k_5}$ の取り方に依存する。前述二つの仮説の比較においては、完全決定値の符号による安定度が重視されていた。これは、ヒストグラムを作る時に (3.6) の意味する区分で、 $J_{k_1 \dots k_5}$ を作ったことになる。

3—5 決定値による推定

N 個の決定値を、何らかの方法によって一つに縮約することによって、最終的な β γ の推定値が得られる。例えば $b_1 \dots b_n$ の単純平均 (grouped または ungrouped)、中央値、最頻値をとればよい。

実際の分析では、次の方法が取られている⁽¹¹⁾。まず、上述の符号による安定度を吟味した上で、一番集中した符号、例えば $(b_n \ c_{1n} \dots \ c_{4n}) = (+ + - - -)$ 、を満たす決定値を選びグループを作る。このグループに属す決定値の個々の要素、例えば b_n 、を見、グループ内でのヒストグラムを作る。このヒストグラムの最頻値級に属す決定値をもって β の最終的推定値とする。 $\gamma_1 \dots \gamma_4$ についても同様である。

4. 問題

以上で、理論モデルとそれを計測する方法としての完全決定法を提示した。この完全決定法の統計理論的な性質を吟味するのであるが、以下の分析は、次のような範囲において行なわれる。

度々ふれてきたが、完全決定法は古典的仮説と習慣形成仮説を比較するという目的をもっている。しかし、ここでは古典的仮説のパラメタ推定方法としての完全決定法を考える。従って、習慣形成仮説モデルとの関連は取り扱わない。また、検定法としての考察はしない。

完全決定値から最終的な推定値に至るまでは幾つかの段階がある。そのつど、種々の統計量が登場する。分析は、それら統計量の内の幾つかに限られる。そして、次のように大別できる。

i) 個々の完全決定値の標本分布を導く。例えば特定の $[b_{t_1 \dots t_5} \ c'_{t_1 \dots t_5}]$ の同時分布、 $b_{t_1 \dots t_5}$ の周辺分布、 $c_{t_1 \dots t_5}$ の周辺分布を導びく。そしてこれら標本分布の特性を調べる。

ii) N 個全体の決定値 $[b_1 \ c'_1] \dots [b_n \ c'_n]$ の中に含まれる確率的仕組みを検討する。最終的な推定値に至る過程で N 個の完全決定値を一つのヒストグラム集約させたが、このヒストグラムの性質が考察される。

注 (11) 『理論』第5章 p. 141 を参照。

(12) 最少頻度級に属す決定値が使われてもいる。このように、選ばれた最終的推定値は、さらにモデルの予測能力のテストに用いられる。そしてテストは、古典的仮説単独のテストではなく、古典的仮説と習慣形成仮説の対比という枠組みで行なわれる。すなわち、習慣形成仮説にも、最多及び最少頻度による最終的推定値がえられ、その推定値による予測力が古典的仮説によるものと比較される。この意味で、最多頻度に関する推定値と最少頻度に関する推定値両者を使い、種々の角度から両仮説を対比させようというのが『理論』その他の文献における分析方法である。

5. $[b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]$ の標本分布

一つの決定値 $[b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]$ の標本分布を導く。 $[b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]$ は, (3.2) で定義される。その中の内生変数についての制約 (2.10) を使えば, 次を得る。

$$(5.1) \quad \begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} = Z_{t_1, \dots, t_5} \begin{bmatrix} -c_{t_1, \dots, t_5} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{b_{t_1, \dots, t_5} + 1},$$

ただし

$$(5.2) \quad Z_{t_1, \dots, t_5} = \begin{bmatrix} z'_{t_1} \\ \vdots \\ z'_{t_5} \end{bmatrix}.$$

ここで $[E_{2t_1} \dots E_{2t_5}]$ の分布は (2.11) より

$$(5.3) \quad \begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} \sim N \left(Z_{t_1, \dots, t_5} \pi_2, \frac{\sigma_2}{(\beta+1)^2} I_5 \right).$$

(5.1) より $[E_{2t_1} \dots E_{2t_5}]$ から $[b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]$ への変換のヤコビアンは,

$$(5.4) \quad J([E_{2t_1} \dots E_{2t_5}]; [b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]) = (b_{t_1, \dots, t_5} + 1)^{-6} |Z_{t_1, \dots, t_5}|, \quad b_{t_1, \dots, t_5} \neq -1.$$

(5.3) と (5.4) から $[b_{t_1, \dots, t_5} \ c'_{t_1, \dots, t_5}]$ の標本分布の確率密度関数 (p. d. f) を得る。整理した結果をかくと,

$$(5.5) \quad f_1(b, c') = (2\pi)^{-\frac{5}{2}} \left| \frac{\sigma_2}{(\beta+1)^2} (Z'Z)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(b+1)^6} \exp -\frac{1}{2} \left\{ [c' - 1] - \frac{b+1}{\beta+1} [r' - 1] \right\} \left\{ \frac{\sigma_2 (b+1)^2}{(\beta+1)^2} (Z'Z)^{-1} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{b+1}{\beta+1} \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad b \neq -1. \quad (13)$$

上の導出は任意の $(t_1 \dots t_5)$ について成り立つ。(5.5) 式は c_{t_1, \dots, t_5} の要素の周辺分布を導くのに利用される。

6. b_{t_1, \dots, t_5} の標本分布

特定の完全決定値ベクトルの要素である b_{t_1, \dots, t_5} の標本分布を導き, その特性を吟味する。

6-1 分布導出

完全決定値の定義 (3.2) より b_{t_1, \dots, t_5} について解くと (クラメル公式),

$$(6.2) \quad b_{t_1, \dots, t_5} = \frac{\sum_{i=1}^5 d_{t_1, \dots, t_5}^{(i)} E_{1t_i}}{\sum_{i=1}^5 d_{t_1, \dots, t_5}^{(i)} E_{2t_i}}$$

注 (13) この式では, b, c, Z の添え字 t_1, \dots, t_5 を省略してある。また $f_1(b, c) = 0, b = -1$.

ここで $d_{t_1 \dots t_5}^{(t)}$ は、行列 $\begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} \bar{Z}_{t_1 \dots t_5}$ の E_{2t_i} に関する余因子で、例えば次のように書ける。

$$(6.2) \quad d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \bar{z}'_{\cdot t_1} \\ \bar{z}'_{\cdot t_3} \\ \bar{z}'_{\cdot t_4} \\ \bar{z}'_{\cdot t_5} \end{vmatrix}$$

(2.10) により (6.1) を書きかえると、

$$(6.3) \quad \sum_1^5 d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} E_{2t_i} = \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} z'_{t_i} / (b_{t_1 \dots t_5} + 1) \\ = |Z_{t_1 \dots t_5}| / (b_{t_1 \dots t_5} + 1)$$

ここで (5.3) より

$$(6.4) \quad \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} E_{2t_i} \sim N \left(\sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} z'_{t_i} \pi_2, \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2} \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)2} \right)$$

行列式の性質を使うと次のように書き改められる。

$$(6.5) \quad \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} z'_{t_i} \pi_2 = \frac{1}{\beta+1} |Z_{t_1 \dots t_5}|$$

さらに行列の性質より、 $l' = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ として、

$$(6.6) \quad \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)2} = l' (Z'_{t_1 \dots t_5} Z_{t_1 \dots t_5})^{-1} l |Z_{t_1 \dots t_5}|^2$$

故に

$$(6.7) \quad \sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} E_{2t_i} \sim N \left(\frac{1}{\beta+1} |Z_{t_1 \dots t_5}|, \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2} |Z_{t_1 \dots t_5}|^2 l' (Z'_{t_1 \dots t_5} Z_{t_1 \dots t_5})^{-1} l \right)$$

(6.3) の変換のヤコビアンは、

$$(6.8) \quad J(\sum d_{t_1 \dots t_5}^{(t)} E_{2t_i} : b_{t_1 \dots t_5}) = |Z_{t_1 \dots t_5}| / (b+1)^2, \quad b_{t_1 \dots t_5} \neq -1$$

であるから (6.7) より $b_{t_1 \dots t_5}$ の *p.d.f* を得る。整理した結果は、

$$(6.9) \quad f_2(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\beta+1|}{(b+1)^2} (\sigma^2 l' (Z'Z)^{-1} l)^{-\frac{1}{2}} \\ \exp - \frac{1}{2\sigma^2 l' (Z'Z)^{-1} l} \left(\frac{\beta-b}{b+1} \right)^2, \quad b \neq -1. \quad (14)$$

この *p.d.f* は γ と独立であり、 β と $\mu^2_{t_1 \dots t_5} \equiv \sigma^2 l' (Z'_{t_1 \dots t_5} Z_{t_1 \dots t_5})^{-1} l$ に依存する。⁽¹⁵⁾ 以下でこ

注 (14) この式では b, Z の添え字を落してある。以下、注書きせずに添え字を落すことがある。また $f_2(b) = 0, b = -1$ 。

(15) 分布を書きかえるならば、 $(\beta+1)$ と $\mu^2_{t_1 \dots t_5} / (\beta+1)^2$ に依存するとも言ってもよい。その時 $\mu^2_{t_1 \dots t_5} / (\beta+1)^2$ は誘導型 (2.7) に対する最小二乗推定値の (要素の) 標本分散でもある。

分布 (6.9) は、サンプルサイズが5の時の直接最小二乗法の標本分布でもあるし、またその時の間接最小二乗法の標本分布でもある。サンプルサイズが5の時は、両推定量は恒等的に等しいためである。

サンプルサイズが、一般の大きさの時にも間接最小二乗法の標本分布として (6.9) と同型のものが得られる時がある。その点については、A. R. Bergstrom, "The Exact Sampling Distributions of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume," *Econometrica*, Vol. 30 (1962) 480-489, 及び、佐和隆光「直接最小二乗推定量と誤差分散との関係について」『季刊理論経済学』Vol. 17(1967) 65-69 を参照。

の分布の性質を調べる。

6-2 分布のモーメント

分布 f_2 の ν 次のモーメントを求めるには、

$$(6.10) \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{\infty} \right\} \frac{b^\nu}{(b+1)^2} \exp - \frac{1}{2\mu^2} \left(\frac{\beta+1}{b+1} - 1 \right)^2 db$$

が存在しなければならない。しかし、この積分は $\nu \geq 1$ に対し存在しないところのものである。⁽¹⁶⁾

従って、完全決定値 $b_{t_1 \dots t_5}$ の標本分布はいかなる次数のモーメントも持たない。

6-3 分布のモード

上のように、分布はそのモーメントで特徴付けられないから、他の特性をみる。

方程式

$$(6.11) \frac{df_2}{db} = 0$$

は解

$$(6.12) b = - \left\{ 1 + \frac{1}{4\mu^2} (\beta+1) \right\} \pm \frac{1}{2\mu^2} |\beta+1| \sqrt{1 + \frac{1}{8\mu^2}}$$

をもつ。右辺第二項は、一般にゼロでないから $b_{t_1 \dots t_5}$ の $p.d.f$ は二山分布である。また二つのモードの距離、 $\frac{1}{\mu^2} |\beta+1| \sqrt{1 + \frac{1}{8\mu^2}}$ は $\mu^2_{t_1 \dots t_5}$ の減少関数、(σ^2 の減少関数) $\beta (> -1)$ の増加関数であることもわかる。

6-4 分布のメディアン

$b_{t_1 \dots t_5}$ の $p.d.f$, f_2 のメディアンを $\lambda_{t_1 \dots t_5}$ (または λ と省略) とすると、それは次の方程式を⁽¹⁷⁾ 満たす。

$$(6.13) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\beta+1)}{(b+1)^2 \mu} \exp - \frac{1}{2\mu^2} \left(\frac{\beta-b}{b+1} \right)^2 db = \frac{1}{2}.$$

これは次の条件に変換される。

$$(6.14) \int_{-\frac{1}{\mu}}^{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\beta+1}{\lambda+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

注 (16) これはコーシーの積分定理による (例えばスミルノフ『高等数学教程』邦訳Ⅱ巻 p. 246参照)。コーシー分布のモーメントが存在しないことを示すのもこの定理による。

(17) 以下、 $\beta > -1$ として話をすすめる。選好関数が凸であるために、 $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ 従って $\beta > 0$ と限ってもよい。

すなわち、基準化された正規分布についての積分に帰着する。積分の下限、 $-\frac{1}{\mu}$ は負であるから、(6.14) を満たす上限についての制約を得る。

$$(6.15) \quad 0 < \frac{1}{\mu} \left(\frac{|\beta+1|}{\lambda+1} - 1 \right) < \infty$$

または、

$$(6.16) \quad -1 < \lambda_{t_1 \dots t_5} < \beta$$

これより、個々の完全決定値 $b_{t_1 \dots t_5}$ は一般には β についてのメディアン不偏推定値とはならない。 $b_{t_1 \dots t_5}$ がメディアン不偏推定値、 $\lambda_{t_1 \dots t_5} = \beta$ 、であるためには、(6.14) より

$$(6.17) \quad \int_{-\frac{1}{\mu}}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2}$$

でなければならない。これが成り立つのは $-\frac{1}{\mu} = -\infty$ 又は $\mu^2 = 0$ の時に限る。すなわち、 $\sigma^2 = 0$ という自明な時のみに限り $b_{t_1 \dots t_5}$ は β のメディアン不偏推定値となる。

$\mu_{t_1 \dots t_5}$ が与えられた時にメディアン $\lambda_{t_1 \dots t_5}$ と β の関係がどうなっているかを見ることができる。

(6.14) の積分の上限を x とする。従って、

$$(6.18) \quad \lambda = \frac{1}{1+\mu x} \beta - \frac{\mu x}{1+\mu x}$$

$Z_{t_1 \dots t_5}$ は既知パラメタであるから未知パラメタ σ^2 を決めると μ が決まる。 μ を与えることにより正規分布表より x の値がわかる (図3参照)。そして (6.18) より $b_{t_1 \dots t_5}$ の分布のメディアン $\lambda_{t_1 \dots t_5}$ と β の関係が読みとれる。それを表1にのせる。

6-5 分布のグラフ

完全決定値 $b_{t_1 \dots t_5}$ の $p.d.f$ のグラフを図4、図5に描く。この $p.d.f$ はパラメタ β と $\mu_{t_1 \dots t_5}$ に依存するから、 β 、 μ^2 を種々に与え分布の図を得る。パラメタの与え方は表2に示す。8つの分布 $f^{(1)} \dots f^{(8)}$ が描かれているが、例えば $f^{(1)}$ は $\beta = 0.67$ 、 $\mu^2 = 1/18$ の時の完全決定値の $p.d.f$ である。

図4には、 $f^{(1)}$ から $f^{(5)}$ があり、 β を一定として μ^2 の

図 3

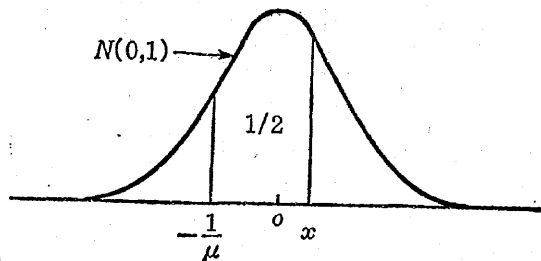


表-1

$\mu_{t_1 \dots t_5}$	$\lambda_{t_1 \dots t_5}$
4	$0.162\beta - 0.838$
3	$0.229\beta - 0.771$
2	$0.364\beta - 0.636$
1	$0.710\beta - 0.290$
$1/2$	$0.972\beta - 0.028$
$1/3$	$0.999\beta - 0.001$
$1/4$	$(\approx) \beta$

表-2

$\beta \backslash \mu^2$	$1/18$	$1/8$	$1/2$	2	$9/2$
0.67	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$
0.3	—	—	$f^{(6)}$	—	—
0	—	—	$f^{(7)}$	—	—
-0.4	—	—	$f^{(8)}$	—	—

図 4

$\beta=0.67$ ⊙印

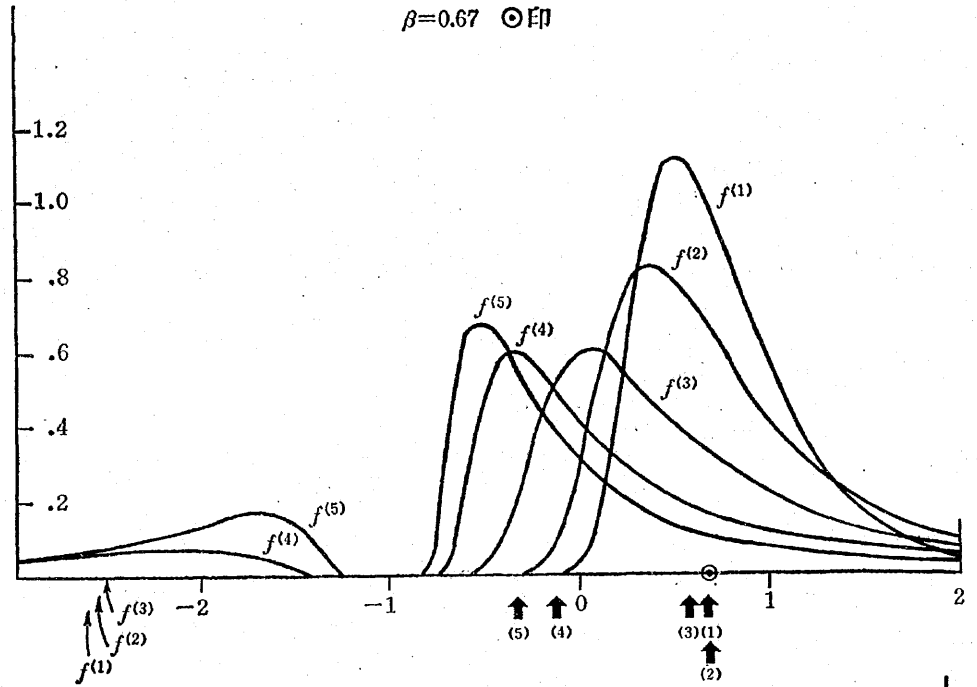
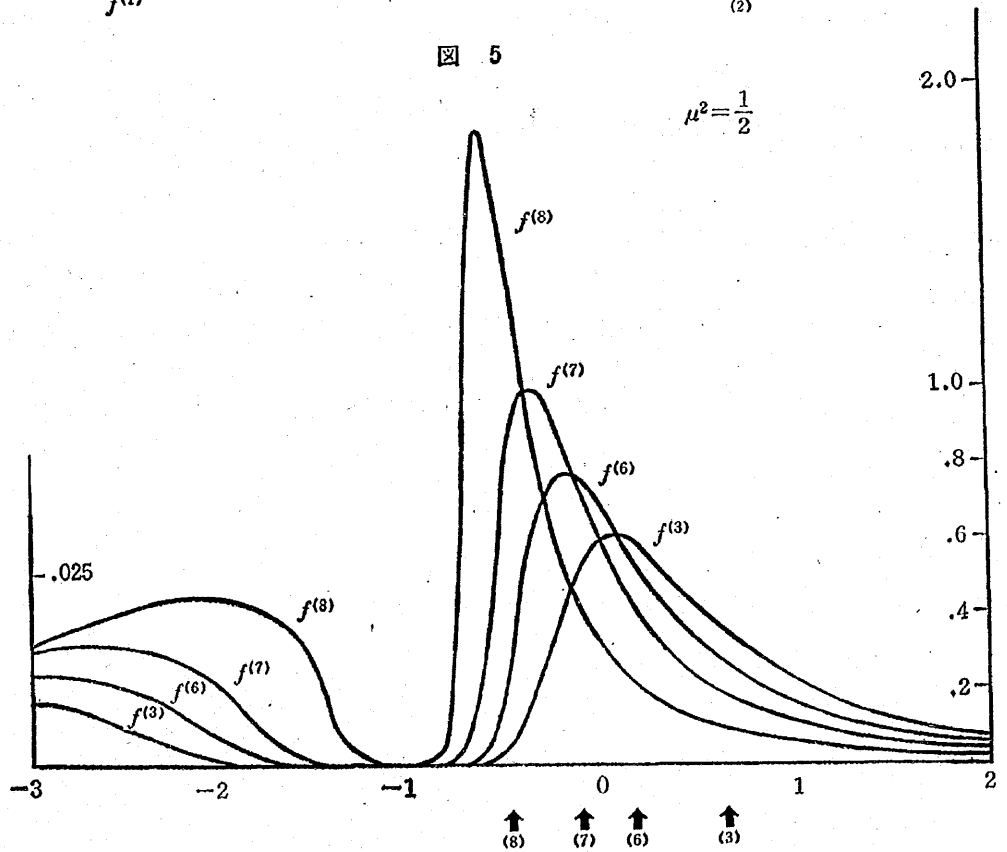


図 5

$\mu^2 = \frac{1}{2}$



選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論

値と $p.d.f$ の変化の関係が読める。 $\mu^2 = \sigma^2 \nu'(Z'Z)^{-1}$ であったから、図4は、i) β , $Z_{t_1 \dots t_5}$ を一定として $p.d.f$ と σ^2 の関係を示すと同時に ii) β, σ^2 を一定として $p.d.f$ と $Z_{t_1 \dots t_5}$ の関係を示すものでもある。横軸下の矢印 (j) は $f^{(j)}$ のメディアンの位置を示す。

次の事柄は図から読み取れる通りである。

(i) 二つの山の内、 μ^2 (または σ^2 または $\nu'(Z'Z)^{-1}$) が小さくなるにつれ左の山は消えて行き、右側の山に確率があつまる。

(ii) μ^2 が小さくなるにつれ、左山のモードはより左へ行き、右山のモードはより右へ行く。

(iii) 右山のモードの高さは μ^2 が小さくなるにつれ、一度小さくなり、そして再び大きくなる。すなわち $f^{(1)} \dots f^{(5)}$ の右の頂上を結んだ線を引くならU字型をしている。

図5には、 $f^{(3)}, f^{(6)}$ から $f^{(8)}$ があり μ^2 を一定にした時の β と $p.d.f$ の関係が読める。但し、右山と左山のたて軸のスケールは異なる。次が読みとれる。

(iv) β が (-1 へ向って) 小さくなるにつれ、二つの山も -1 へ向って行く。そして山の高さも高くなって行く。

(v) メディアンと右山のモードは共に β と -1 の間にある。

(vi) β が大きい程、 β とメディアンの差は大きい。

7. $c_{mt_1 \dots t_5}$ の標本分布

§5で完全決定値(ベクトル), $[b_{t_1 \dots t_5} \ c'_{t_1 \dots t_5}]$, の $p.d.f$ を得た。§6ではその要素である $b_{t_1 \dots t_5}$ の $p.d.f$ を得た。次に $c'_{t_1 \dots t_5} = [c_{1t_1 \dots t_5} \dots c_{5t_1 \dots t_5}]$ の要素, 例えば $c_{1t_1 \dots t_5}$ の標本分布を導く。

7-1 分布導出

$b_{t_1 \dots t_5}, c_{t_1 \dots t_5}$ の (同時) $p.d.f, f_3$, である (5.5) と $b_{t_1 \dots t_5}$ の (周辺) $p.d.f, f_2$, である (6.9) を使うと、 $b_{t_1 \dots t_5}$ が与えられた時の $c_{t_1 \dots t_5}$ の条件付き分布の $p.d.f$ を得る。まず f_2 を書き変えて、

$$(7.1) \quad f_2(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2} \nu'(Z'Z)^{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} (b+1)^2 \exp - \frac{1}{2} \left(\nu' - \frac{b+1}{\beta+1} \nu' \right) \left\{ \frac{\sigma^2 (b+1)^2}{(\beta+1)^2} (Z'Z)^{-1} \right\}^{-1} \left(l - \frac{b+1}{\beta+1} l \right) \quad (18)$$

問題の条件付き分布は、(5.5) と (7.1) より

$$(7.2) \quad f_3(c|b) = \frac{f_1}{f_2} = (2\pi)^{-2} \left(\frac{\sigma^2 (b+1)^2}{(\beta+1)^2} \right)^{-2} \left(\frac{1}{\nu'(Z'Z)^{-1}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

注(18) この節でも、 b, c, Z の添え字 $t_1 \dots t_5$ をかかってに省略することがある。

$$\exp - \frac{1}{2} \left(c' - \frac{b+1}{\beta+1} r \right) \left\{ \frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2} (\bar{Z}'\bar{Z})^{-1} \right\}^{-1} \left(c - \frac{b+1}{\beta+1} r \right), \quad b \neq -1.$$

ただし $\bar{Z} \equiv \bar{Z}_{t_1, \dots, t_b}$, (3.3). ここで行列式の性質

$$(7.3) \quad |Z'Z| = |\bar{Z}'\bar{Z}| |V'(Z'Z)^{-1}|$$

を使えば,

$$(7.4) \quad f_3 = (2\pi)^{-2} \left| \frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2} (\bar{Z}'\bar{Z})^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \\ \exp - \frac{1}{2} \left(c' - \frac{b+1}{\beta+1} r \right) \left\{ \frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2} (\bar{Z}'\bar{Z})^{-1} \right\}^{-1} \left\{ c - \frac{b+1}{\beta+1} r \right\} \\ = N \left(\frac{b+1}{\beta+1} r, \frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2} (\bar{Z}'\bar{Z})^{-1} \right)$$

c'_{t_1, \dots, t_b} の要素, 例えば c_{1t_1, \dots, t_b} の (周辺) 条件付き *p.d.f* は (7.4) から

$$(7.5) \quad f_4(c_1 | b) = N \left(\frac{b+1}{\beta+1} r_1, \frac{(b+1)^2}{(\beta+1)^2 \varphi_1^2} \right)$$

ただし

$$(7.6) \quad \varphi_1^2 \equiv \varphi_{1t_1, \dots, t_b}^2 = \sigma^2 [1 \ 0 \ 0 \ 0] (\bar{Z}'\bar{Z})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

次にこの条件付き *p.d.f* と b_{t_1, \dots, t_b} の *p.d.f* を使えば (b_{t_1, \dots, t_b} , c_{1t_1, \dots, t_b}) の (同時) *p.d.f* に戻すことができる。後の利用に都合が良いように整理した結果,

$$(7.7) \quad f_5(b, c_1) = f_2 \cdot f_4 = \frac{\exp - \frac{1}{2} \left(\frac{r_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2} \right) \cdot (\beta+1)^2}{2\pi (\varphi_1^2 \mu^2)^{\frac{1}{2}}} (b+1)^{-3} \\ \cdot \exp - \frac{(\beta+1)^2}{2} \left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2} \right) \left(\frac{1}{b+1} \right)^2 \\ \cdot \exp (\beta+1) \left(\frac{r_1 c_1}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2} \right) \left(\frac{1}{b+1} \right) \\ \equiv C \left(\frac{1}{b+1} \right)^3 e^{-A \left(\frac{1}{b+1} \right)^2} e^{B \left(\frac{1}{b+1} \right)}, \quad b \neq -1.$$

ここで最後の式は定義式で C は f_5 の定数項, A と B が何を示すかは明らか。この同時分布から b を積分で消せば目的の c_1 の標本分布が得られる。

b についての積分をした結果 c_{1t_1, \dots, t_b} の *p.d.f* は

$$\text{注(19)} \quad f_5(c_1) = \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{\infty} \right\} C \left(\frac{1}{b+1} \right)^3 \exp - A \left(\frac{1}{b+1} \right)^2 \exp B \left(\frac{1}{b+1} \right) db \\ = \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right\} C t^{-3} \exp - A \left(\frac{1}{t} \right)^2 \exp B \left(\frac{1}{t} \right) dt \\ = \left\{ \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right\} C s \exp - A s^2 \exp B s ds$$

$$(7.8) \quad f_0(c_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)}}{\pi} \left(\varphi_1^2 \mu^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+i)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)i!} \left[\frac{\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)^2}{2\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)} \right]^i \quad (20)$$

導出過程からわかるように、一般に c_{m1}, \dots, c_{ms} の $p.d.f$ は (7.8) のパラメタ γ_1, φ_1^2 をそれぞれ $\gamma_m, \varphi_m^2 = \sigma^2 \times [(\bar{Z}'\bar{Z})^{-1}]$ の $m \times m$ の要素] で置き換えることによって得られる。 $\gamma_1, \sigma^2, Z_{i1}, \dots, Z_{is}$ に依存して $\beta\gamma_2 \dots \gamma_4$ とは独立な $p.d.f$ (7.8) の性質を次に調べる。

7-2 分布のモーメント

分布 f_0 の ν 次のモーメントを求めるには、項別積分の各項について次の型の積分を計算しなければならない。

$$(7.9) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1^{\nu} \left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)^{2i}}{\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2} + \frac{1}{\mu^2}\right)^{i+1}} dc_1$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 C(-s) \exp -A(-s)^2 \exp B(-s) ds + \int_0^{\infty} C s \exp -As^2 \exp B s ds \\ &= \int_0^{\infty} C s e^{-As^2} \{e^{-Bs} + e^{Bs}\} ds \\ &= 2C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^{2i}}{(2i)!} \int_0^{\infty} s^{2i+1} e^{-As^2} ds \\ &= C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^{2i}}{(2i)!} \frac{\Gamma(i+1)}{A^{i+1}} \\ &= CA^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+i)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)i!} \left(\frac{B}{A}\right)^{2i} \end{aligned}$$

注(20) この $p. d. f$ は、一般に、確率変数 X と Y が

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_1^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \right)$$

に従う時の $c_1 = \frac{X}{Y}$ の $p. d. f$ としても導びける。

このように、(期待値がゼロでない) 二つの正規変数の比の分布を議論したものには次の文献がある。R. C. Geary, "The Frequency Distribution of the Quotient of Two Normal Variates," *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 93 (1930) 442-446. E. C. Fieller, "The Distribution of the Index in a Normal Bivariate Population," *Biometrika* Vol. 24 (1932) 428-440. G. Marsaglia "Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of Uniform Variables," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 60 (1965) 193-204.

間接最小二乗法との関係で、これら比の分布に注目、整理したものには R. C. Basmann, "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Overidentified Cases," *Journal of the American Statistical Association* Vol. 56 (1961) 619-636. 及び Basmann "Exact Finite Sample Distributions for Some Econometric Estimators and Test Statistics: A Survey and Appraisal," Chapt. 4, *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. II. Intriligator and Kendrick (ed.) (1974) North Holland.

しかし、 $\nu \geq 1$ に対しこの無限積分は存在しない。⁽²¹⁾

故に、完全決定値 c_{m_1, \dots, m_s} の標本分布はいかなる次数のモーメントも持たない。

7-3 分布のグラフ

$p.d.f$ (7.8) 自体は、 x, y が

$$(7.10) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

に従う時の

$$(7.11) \quad c_1 = \frac{\varphi_1}{\mu} \left(\frac{\gamma_1 + x}{\frac{1}{\mu} + y} \right)$$

の分布としても導びける。そして $t \equiv \left(\frac{\gamma_1 + x}{\varphi_1} \right) / \left(\frac{1}{\mu} + y \right)$ の分布のグラフが Marsaglia⁽²²⁾ によって与えられている c_1 は t の定数倍であるから、Marsaglia のグラフの縦横軸のスケールを別とすれば、 t の分布図はそのまま、 c_1 の分布図と読める。

その図によれば次が観察される。

- (i) パラメタの値によって分布の対称性、非対称性が現われる。
- (ii) パラメタの値によって分布の一山性、二山性が生じる。

7-4 その他

$\gamma_1 = 0$ という (null) ケースにおいて $c_{1_1, \dots, 1_s}$ の $p.d.f$ は簡単になる。この場合において $p.d.f$ は座標 $c_{1_1, \dots, 1_s} = 0$ をモードとする左右対称な一山分布であることが示せる。この性質は Marsaglia のグラフに見られる通りである。

8. $\{b_1, \dots, b_N\}$ の性質

個々の完全決定値の特性について考察してきた。完全決定法では N 個の完全決定値全体が問題となる。以下では、完全決定値ベクトル $[b_n, c'_n]$ の内特に b_n を取り、その全体、すなわち $\{b_1, \dots, b_N\}$ の確率的構造を調べる。⁽²³⁾

注 (21) 注 (16) を参照。

(22) Marsaglia 前掲論文, Fig. 1, p. 197.

(23) 以下の $\{b_1, \dots, b_N\}$ に関する分析は $\{c_{m_1}, \dots, c_{m_N}\}$ について、更には $\{[b_1, c'_1], \dots, [b_N, c'_N]\}$ についても同様におこなえるであろう。

8-1 制 約

もともとの確率変数 $E_{11} \dots E_{1T} E_{21} \dots E_{2T}$ は $E_{21} \dots E_{2T}$ から成り立っている, (2.10)。 $N(>T)$ 個の b_n は T 個の E_{2t} を変換したものである。従って $\{b_1 \dots b_N\}$ は本質的には T 個の確率変数から成り立っているはずである。

(6.3) で $b_n (\equiv b_{t_1 \dots t_5})$ を生じる場所の $d_{t_1 \dots t_5}^{(i)}$ を次のベクトルにする。

$$(8.1) \quad d'_n = [0 \dots 0 \ d_{t_1 \dots t_5}^{(1)} \ 0 \dots 0 \ d_{t_1 \dots t_5}^{(2)} \ 0 \dots 0 \ d_{t_1 \dots t_5}^{(5)} \ 0 \dots 0].$$

これは $1 \times T$ のベクトルで, $d_{t_1 \dots t_5}^{(i)}$ は i 番目の要素。 $b_1 \dots b_N$ に対応し $d_1 \dots d_N$ がある。すなわち, これにより (6.3) は,

$$(8.2) \quad d'_n E_2 = |Z_n| / |b_n + 1|$$

という記号で書かれる。

上の d_n を並べて次の行列をつくる。

$$(8.3) \quad D' = \begin{pmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_T \\ d'_{T+1} \\ \vdots \\ d'_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'_1 \\ D'_2 \end{pmatrix}.$$

ここで d_n をどのように並べても自由であるが, D_1 は非特異であるようにする。この D で次の変換をする。

$$(8.4) \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \\ x_{T+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'_1 E_2 \\ D'_2 E_2 \end{pmatrix}.$$

これは E_2 から X_1, X_2 への特異変換であるから, 確率 1 で,

$$(8.5) \quad X_2 = D'_2 D'_1^{-1} X_1 \equiv \begin{pmatrix} g_{T+1} \dots g_{T+1T} \\ \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ g_{N1} \quad \dots \quad g_{NT} \end{pmatrix} X_1$$

と書ける。そして (2.11) より

$$(8.6) \quad X_1 \sim N \left(D'_1 Z \pi_2 \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2} D'_1 D_1 \right).$$

(8.2), (8.5) より N 個の b_n 全体は次のように書ける。

$$(8.7) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{|Z_1|}{x_1} - 1, \\ &\dots \dots \dots \\ b_T &= \frac{|Z_T|}{x_T} - 1, \end{aligned}$$

$$b_{T+1} = \left(|Z_{T+1}| / \sum_{t=1}^T g_{T+1t} \frac{|Z_t|}{b_t + 1} \right) - 1,$$

(8.8)

$$b_N = \left(|Z_N| / \sum_{i=1}^T g_{Ni} \frac{|Z_i|}{b_i+1} \right) - 1.$$

このように $\{b_1 \dots b_N\}$ は, (8.6) に従う $x_1 \dots x_N$ の分布に支配されている。または, $\{b_1 \dots b_N\}$ のうち自由度のあるのは適当に選ばれた $\{b_1 \dots b_T\}$ だけである。⁽²⁴⁾

8-2 分布導出

‘独立’な T 個の決定値, 例えば $b_1 \dots b_T$, の分布は (8.6) に従う X_1 の分布から変換される。この時変換 (8.7) のヤコビアンは,

$$(8.9) \quad J[X_1; (b_1, \dots, b_T)] = \frac{|Z_1|}{(b_1+1)^2} \cdots \frac{|Z_T|}{(b_T+1)^2}, \quad b_n \neq -1.$$

この変換により $(b_1 \dots b_T)$ の *p.d.f* は,

$$(8.10) \quad f_T(b_1, \dots, b_T) = \pi^{-\frac{T}{2}} |M|^{-\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^T \frac{|\beta+1|}{(b_n+1)^2}$$

$$\exp - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^T \sum_{n'=1}^T M^{nn'} \left(\frac{\beta-b_n}{b_n+1} \right) \left(\frac{\beta-b_{n'}}{b_{n'}+1} \right), \quad b_n \neq -1, \quad (25)$$

ただし

$$(8.11) \quad [M^{nn'}] = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} |Z_1| & 0 \\ 0 & |Z_T| \end{bmatrix} (D_1' D_1)^{-1} \begin{bmatrix} |Z_1| & 0 \\ 0 & |Z_T| \end{bmatrix} = M^{-1}.$$

$\{b_1 \dots b_N\}$ の内 $b_1 \dots b_T$ は (8.10) に従って分布する。 $(D_1' D_1)^{-1}$ は対角行列でないから $b_1 \dots b_T$ は独立にならない。ただし完全決定値 b_n と $b_{n'}$ が共通の標本点を使っていないのなら, その二つに限っては独立である。この意味では独立なものが $\left[\frac{T}{5} \right]$ 個ある。(8.10) に従って $b_1 \dots b_T$ がその値を定めると, 残りの $b_{T+1} \dots b_N$ も (8.8) によって自動的に決まる。従って (8.10) は $\{b_1 \dots b_N\}$ 全体を支配する分布である。

9. $\{b_1 \dots b_N\}$ のヒストグラム

完全決定法においては, 完全決定値をヒストグラムに組む段階があった。§8 までには特定の決定値, b_n , 及び決定値の全体, $\{b_1 \dots b_n\}$, の性質を調べてきた。そして, これらの性質を使って,

注 (24) 従って, 完全決定法において N 個すべての決定値を使う必要があるかという問題が生じる。実際には N 個すべてを使った場合と, 一部だけを使った場合がある。後者の例としては, 5つの隣り合った標本点による決定値 (標本点 $t=1, \dots, T$ を circular なものと考えればこれは T 個ある) だけを使うということになる。

(25) いずれかの b_n が -1 の時, $f_T=0$.

決定値の作るヒストグラムの構造を調べるのが次の問題である。

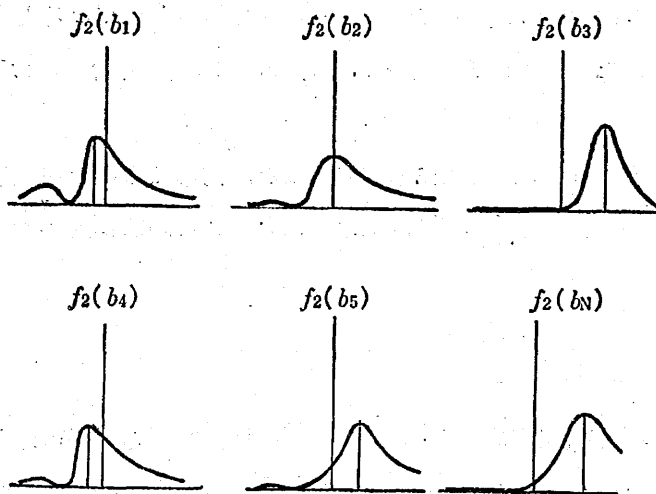
本来ここでのヒストグラムは N 個のベクトル $\{[b_1 c_1'] \dots [b_N c_N']\}$ で作られる多次元のものを考えるのであるが、以下の分析は一次元の $\{b_n\}$ についてのヒストグラムを対象とする。

9-1 ヒストグラムの構成

$\{b_n\}$ のヒストグラムがどのような仕組みになっているかは、次のように説明できる。

個々の決定値 b_n のレベルで見ると、それは (6.9) の (周辺) $p.d.f$, $f_2(b_n)$, に従っている。その $p.d.f$ を特徴付けるパラメタ β, σ^2 は N 個の $f_2(b_n)$ について共通である。ただしパラメタ $l'(Z_n'Z_n)^{-1}$ は $f_2(b_1), \dots, f_2(b_N)$ 毎にすべて異なる。すなわち N 個の $p.d.f$, $f_2(b_n)$ は分布型は同一でも、そのパラメタは同一でない。そしてパラメタ $l'(Z_n'Z_n)^{-1}$ (または μ_n^2) の変化によって

図 6



$p.d.f$ の変わるさまは図4より読みとれる (§6-5で特に(イ)(ロ)を参照)。説明のために図6によって、 N 個の変化する $p.d.f$ を表わす。各 $p.d.f$, $f_2(b_n)$ は完全決定値 b_n を作るための5本の方程式に対応している。またはこの5本の方程式に関する外生変数に対応している。

β, σ^2 は母集団で固定されていても、各 $p.d.f$, $f_2(b_n)$ はパラメタ Z_n に従って (モードで見た) 分布の位置をかえる。完全決定法の途中段階でヒストグラムを作るといふことの背景には、 $\{b_1 \dots b_N\}$ が同一の分布からの「(独立な) 抽出」であるという推測があったと思われる。しかし図6, またはその元にある図4よりわかるように $\{b_1 \dots b_N\}$ は同一の分布からの抽出であるとはみなせなくなる。

b_n は $f_2(b_n)$ の (右山の) モードから抽出され易い。 $b_1 \dots b_N$ が独立であれば $(b_1 \dots b_N)$ の同時分布としてもこれが成り立つ (但し b_1, \dots, b_N が独立でないことは先に示した)。そして抽出された $\{b_1 \dots b_N\}$ が適当に区分けされた軸上でヒストグラムを作る。例えば図6の例で $N=6$ とし、更に区

分けを, $i_{11}=-\infty$ $i_{12}=0$ $i_{13}=\infty$ とする。この結果できる $\{b_1 \dots b_6\}$ のヒストグラムは図7である。

どんな値の $\{b_n\}$ が生じやすいか, そしてどんな型のヒストグラムができやすいかは, $\{f_2(b_1) \dots f_2(b_N)\}$ の各モードがいくつになるかに依存する。 $f_2(b_n)$ のモードは μ_n^2 (または Z_n) に依存していたから N 個のモードは N 個の Z_n によって決まる。従って, $\{Z_1 \dots Z_N\}$ の (観察結果としての) 散らばり状態がヒストグラムの形状を支配することになる。

右山のモードの位置は (6.12) より

$$(9.1) \quad -\left\{1 + \frac{1}{\mu_n^2}(\beta+1)\right\} + \frac{1}{2\mu_n^2} |\beta+1| \sqrt{1 + \frac{1}{8\mu_n^2}}$$

で与えられた。例えば $\{Z_1 \dots Z_N\}$ の内, 半分の Z_n が (9.1) を -0.5 近くにするようなもので残りの半分の Z_n が (9.1) を 0.6 近くにするようなものからなっているとすると、この結果できるヒストグラムは、区分けにも依存するが、 -0.5 と 0.6 に最頻値をもった二山分布となる (確率が高い)。⁽²⁶⁾

実際には $b_1 \dots b_N$ は確率的にも関数的にも独立でない。従ってこの非独立性のもとで、どの型のヒストグラムが生じやすいかを調べなければならない。これが次に述べる“ヒストグラムの標本分布”の問題である。

9-2 ヒストグラムの標本分布

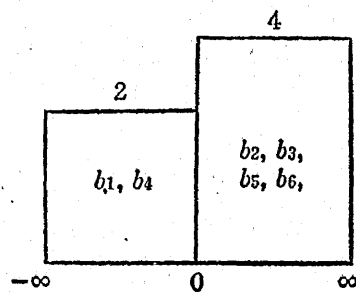
一般の球入れ実験を考える。区別ができる A 個の箱と区別できる B 個の球がある。そして球を箱に投げ入れる実験を行なう。その結果として生じる球の区別できる分配方法が R 通りあるとすると、

$$(9.2) \quad R = \binom{A+B-1}{B} = \frac{(A+B-1)!}{B!(A-1)!}$$

である。⁽²⁷⁾

完全決定法に関して言えば、箱は $\{b_n\}$ のヒストグラムの階級区間 I_{1k} に、球は完全決定値 b_n に

図 7



注 (26) ここでのモデルよりも拡張された習慣形成モデルに関して、完全決定値ヒストグラムが二山になる場合が報告されている。慶應義塾大学産業研究所『最近における消費財の需要関数の推論』昭和51年、補論3参照。なお、個々の完全決定値が二山分布になることを §6 で示してある。しかし、ここでの議論で明らかなように、個々の決定値の p, d, f の二山性と決定値 N 個のヒストグラムの二山性とは直接関係がない。決定値の p, d, f がたとえ一山分布であってもヒストグラムは二山にも三山にもなりうる。

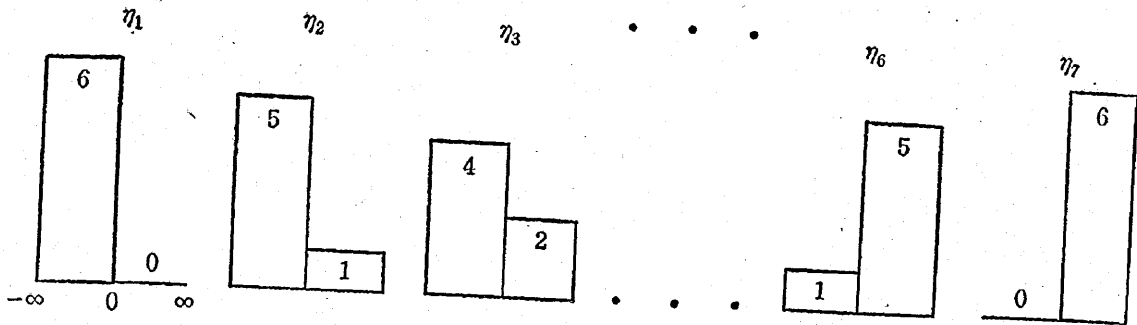
(27) William Feller, "An Introduction to Probability Theory and Its Applications," Vol. I, John Wiley and Sons, New York, 邦訳 (紀伊国屋書店) p. 55 参照。

選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論

(28) 対応する。そして $A=K_1-1, B=N$.

今、 $K_1-1=2, i_{11}=-\infty, i_{12}=0, i_{13}=\infty, T=6$, 従って $N=6$ とすると、描き得る (生じ得る) ヒストグラム H_1 の型は図 8 の 7 種類, $\eta_1 \dots \eta_7$, すなわち (9.2) を使い,

図 8

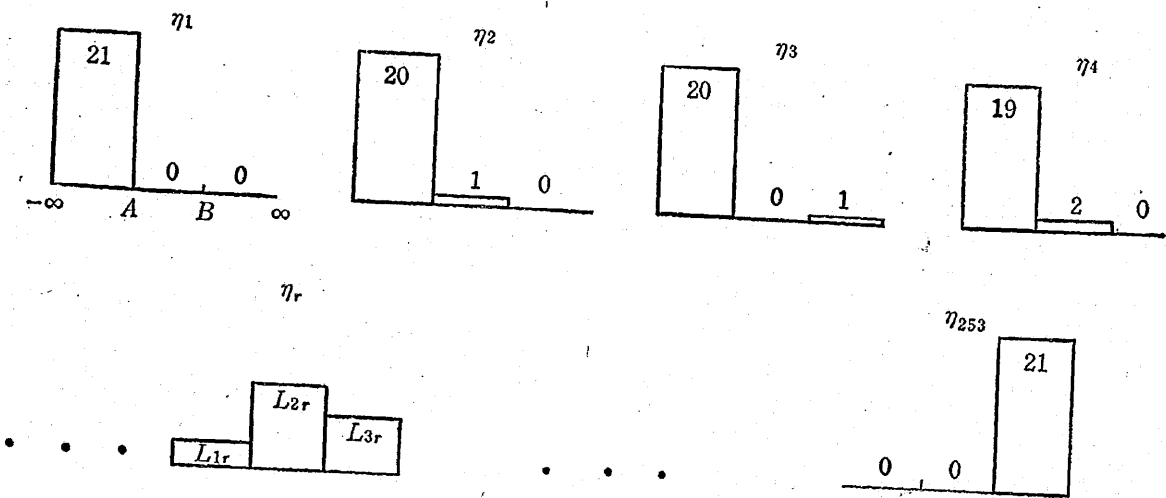


$$(9.3) \quad R = \binom{K_1-1+N-1}{N}$$

$= \binom{7}{6} = 7$ が H_1 の取りうる “値” η_r の個数を示す。図 7 は η_5 と見なせばよい。

$K_1-1=3, i_{11}=-\infty, i_{12}=A, i_{13}=B, i_{14}=\infty, T=7, N=21$, ならば描き得るヒストグラムの型は図 9 の $\eta_1 \dots \eta_{253}$ である。

図 9



一般に H_1 は R 個の値 $\eta_1 \dots \eta_R$ を取りうる。現実の一回限りの抽出では $\{\eta_1 \dots \eta_R\}$ の内の一つが得られる。そして各 η_r が得られる (又は $H_1 = \eta_r$ となる) 確率

注 (28) ここでは $(b_1 \dots b_N)$ のヒストグラムを考えている。 $((b_1, c_1) \dots (b_N, c_N))$ のヒストグラムならば “多次元の球入れ実験” を扱わなければならない。

$$(9.4) \quad P_r\{H_1=\eta_r\}, r=1, \dots, R, \sum_{r=1}^R P_r\{H_1=\eta_r\}=1$$

が問題となる。このように確率‘変数’ H_1 の離散型標本空間 $\{\eta_1 \dots \eta_R\}$ 上に定義される確率分布 (9.4) が“ヒストグラム H_1 の標本分布”である。

9-3 ヒストグラムの分解

$\{b_1 \dots b_N\}$ は、自由度のある $\{b_1 \dots b_T\}$ と、それらの関数として書ける $\{b_{T+1} \dots b_N\}$ から成っていた。そして $\{b_1 \dots b_N\}$ の作るヒストグラム H_1 は $\{b_1 \dots b_T\}$ のヒストグラム Φ と $\{b_{T+1} \dots b_T\}$ のヒストグラム Ψ の合成にならている。それは、以下に述べる意味での‘合成’である。

§6-2 と同様に Φ は、

$$(9.5) \quad P = \binom{K_1-1+T-1}{T}$$

通りの型 $\phi_1 \dots \phi_P$ を取り得る。 Ψ は、

$$(9.6) \quad Q = \binom{K_1-1+(N-T)-1}{N-T}$$

通りの型 $\varphi_1 \dots \varphi_Q$ を取り得る。図9の例でいえば、 $\{\phi_1 \dots \phi_P\}$ と $\{\varphi_1 \dots \varphi_Q\}$ はそれぞれ、図10, 11のように書ける。この例によって説明を進める。

図 10

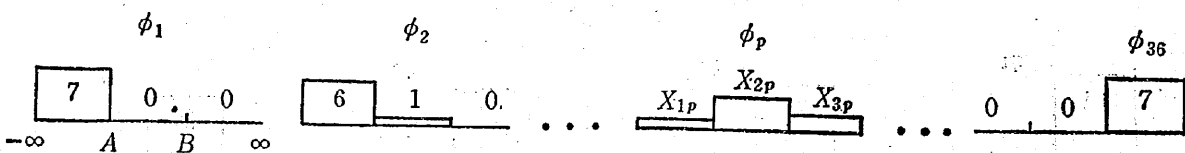
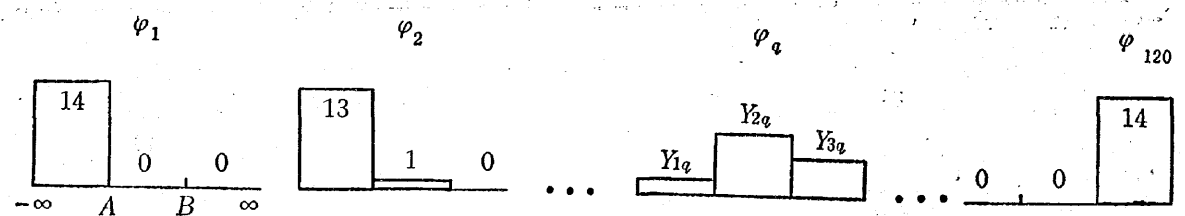


図 11



$b_1 \dots b_T$ が ϕ_1 を生じるような値であるとする。すなわち、

$$(9.7) \quad -\infty < b_1, \dots, b_T < A$$

であると、この時 $b_8 \dots b_{21}$ は (8.8) に従ってある数値を取る。(9.7) が満たされて ϕ_1 が得られたとしても、 $b_8 \dots b_{21}$ がどの領域に落ちるか一概にいうことはできない。すなわち、例えば、 $b_1=0$ で $b_1 > A$ の時と $b_1=1$ で $b_1 < A$ の時では b_8 の対応する値は代わる。そして、 $-\infty < b_1 < A$ という条件だけでは $b_8 < A$ になるか、 $A \leq b_8 < B$, 等々、になるか不明である。従って ϕ_1 が与えら

れたという条件だけでは、 Ψ は $\varphi_1 \cdots \varphi_{12}$ になるか不明である（確率的である）。

上の議論より、 $\Phi = \phi_p$ が与えられた下での条件付きヒストグラム $\Psi | \phi_p$ が定義できる。そして $\Psi | \phi_p$ は $\varphi_1 \cdots \varphi_{120}$ という値をとり、その条件付き確率

$$(9.8) \quad P_r\{\Psi | \phi_p = \varphi_q\} = P_r\{\Psi = \varphi_q | \Phi = \phi_p\}, \quad q=1 \cdots Q, p=1, \dots, P$$

が定義される。同様に Φ は周辺確率

$$(9.8) \quad P_r\{\Phi = \phi_p\}, \quad p=1, \dots, P$$

を持つ。

そして図9において η_1 は ϕ_1 を作る $b_1 \cdots b_7$ と φ_1 を作る $b_8 \cdots b_{21}$ とから成り立っている。これを

$$(9.9) \quad \eta_1 = \phi_1 \times \varphi_1$$

と書き、 η_1 は ϕ_1 と φ_1 の合成と呼ぶ。同様に η_2 は ϕ_1 と φ_2 の合成であるか、または ϕ_2 と φ_1 の合成である。これを

$$(9.10) \quad \eta_2 = (\phi_1 \times \varphi_2) + (\phi_2 \times \varphi_1)$$

と書く。以下これを繰り返えし最後は、

$$(9.11) \quad \eta_{253} = \phi_{30} \times \varphi_{120}.$$

各 η_r がどんな合成であるかは、一つ一つ吟味しなければならない。

このようにヒストグラム H_1 を分解した結果、その標本分布 $P_r\{H_1 = \eta_r\}$ は簡単な場合について、次のように書ける。

$$(9.12) \quad \begin{aligned} P_r\{H_1 = \eta_1\} &= P_r\{\Phi = \phi_1\} \cdot P_r\{\Psi | \phi_1 = \varphi_1\}, \\ P_r\{H_1 = \eta_2\} &= P_r\{\Phi = \phi_1\} \cdot P_r\{\Psi | \phi_1 = \varphi_2\} + P_r\{\Phi = \phi_2\} \cdot P_r\{\Psi | \phi_2 = \varphi_1\}, \\ P_r\{H_1 = \eta_{253}\} &= P_r\{\Phi = \phi_{30}\} \cdot P_r\{\Psi | \phi_{30} = \varphi_{120}\}. \end{aligned}$$

以上のような意味でヒストグラム H_1 は Φ と Ψ の合成である。そして H_1 の標本分布を得るには Φ の標本分布と $\Psi | \phi_1$ の標本分布を得る必要がある。今のところ、次のように Φ の分布を形式的に導びくことができる。

9-4 $\{b_1 \cdots b_T\}$ のヒストグラムの分布⁽²⁹⁾

$\{b_1 \cdots b_T\}$ のヒストグラム Φ は、 P 個の値 $\phi_1 \cdots \phi_P$ を取るが、特定の ϕ_p は各区間の棒柱の高さ、 $X_{1p}, X_{2p}, \dots, X_{K_1 p}$ で特徴付けられる（ $K_1=3$ のケースについては図10を参照）。すなわち、

$$(9.13) \quad \begin{aligned} -\infty &= i_{11} < b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jX_{1p}} < i_{12} \\ i_{12} &\leq b_{jX_{1p}+1}, \dots, b_{jX_{1p}+X_{2p}} < i_{13} \end{aligned}$$

注(29) ヒストグラムを作るのに（関数的に）独立な $\{b_1 \cdots b_T\}$ だけを使うのであれば（脚注(24)），ここでの議論でこと足りる。そして Ψ の分布の議論は必要なくなる。

$$i_{1k_1-1} \leq b_{j_{X_{1p}+\dots+X_{K_1-1p}}}, \dots, b_{j_T} < i_{1k_1} = \infty$$

であるような T 個の決定値が得られた時、これはヒストグラム ϕ_p が得られたことを意味する。

(9.13) が生じる確率は、 $(b_1 \dots b_T)$ の同時分布 $f_T(b_1, \dots, b_T)$, (8.10), より

$$(9.14) \quad \int_{I_{11}} \dots \int_{I_{11}} \int_{I_{12}} \dots \int_{I_{12}} \dots \int_{I_{1K_1-1}} \dots \int_{I_{1K_1-1}} f_T(b_{j_1} \dots b_{j_T}) db_{j_1} \dots db_{j_T} \\ \equiv \text{prob} (I_{11} \dots I_{1K_1-1}; j_1 \dots j_T),$$

ただし I_{1k} は区間 $[i_{1k}, i_{1k+1}]$.

ϕ_p が得られる一つのケースが (9.13) で示され、この中の $j_1 \dots j_T$ は数 $\{1, \dots, T\}$ の中を動く。 $\{1, \dots, T\}$ を K_1 個のグループに分け第一グループには X_{1p} の数 $j_1 \dots j_{X_{1p}}$, 第二グループには X_{2p} の数 $j_{X_{1p}+1} \dots j_{X_{1p}+X_{2p}}$, 等々、が入るようにする。この時、この分割の仕方は、

$$(9.15) \quad \frac{T!}{X_{1p}! \dots X_{K_1p}!}$$

通りある。⁽³⁰⁾ この $T! / X_{1p}! \dots X_{K_1p}!$ 通りの分割に対応した添え字 $j_1 \dots j_T$ を持つ (9.13) は、すべて ϕ_p をもたらす。従って、

$$(7.16) \quad P_r\{\Phi = \phi_p\} = \sum_{(j_1 \dots j_T)} \text{prob} (I_{11} \dots I_{1K_1-1}; j_1 \dots j_T).$$

ここで総和 $\sum_{(j_1 \dots j_T)}$ は $T! / X_{1p}! \dots X_{K_1p}!$ 通りの $\{1, \dots, T\}$ の分割すべてを尽す。

例えば、図10の例を扱うと、

$$(9.17) \quad P_r\{\Phi = \phi_1\} = \int_{-\infty}^A \dots \int_{-\infty}^A f_T(b_1, \dots, b_T) db_1 \dots db_T, \\ P_r\{\Phi = \phi_2\} = \left\{ \int_{-\infty}^A \dots \int_{-\infty}^A \int_A^B + \int_{-\infty}^A \int_{-\infty}^A \int_A^B \int_A^A + \dots + \int_A^B \int_{-\infty}^A \dots \int_{-\infty}^A \right\} \\ \times f_T(b_1, \dots, b_T) db_1 \dots db_T,$$

$$P_r\{\Phi = \phi_{30}\} = \int_B^\infty \dots \int_B^\infty f_T(b_1, \dots, b_T) db_1 \dots db_T.$$

以上 Φ の標本分布導出の道すじを示した。但しこれを実際に行ない、例えば (9.17) を計算し、 Φ の標本分布の特性を吟味するには、大きな困難があるように思われる。さしあたり数値計算の方法によって吟味すること等が課題となろう。

10. 結 語

ここでの課題は、選好パラメタ計測のための「完全決定法」について統計学的解析を行なうこと

注(30) Feller 前掲書, 邦訳 p. 53 参照。

であった。

その内容を要約しておく。

(i)完全決定値 $[b_{t_1 \dots t_5} \ c_{1t_1 \dots t_5} \ \dots \ c_{4t_1 \dots t_5}]$ に関してその同時標本分布を導いた。

(ii)完全決定値 $b_{t_1 \dots t_5}$ の標本分布を導びきその分布特性を吟味した。 $b_{t_1 \dots t_5}$ 個々のレベルでは β の適切な推定値として考えるには無理があることを示した。

(iii)完全決定値 $c_{mt_1 \dots t_5}$ の標本分布を導き、その特性を調べた結果、決定値個々のものは γ_m の適切な推定値とは考えられないことを示した。

以上は個々の決定値に関する吟味である。完全決定法では N 個の決定値をヒストグラムにする手続きがある。それに関する分析は次のようである。

(iv) $\{b_1 \dots b_N\}$ には独立なものが T 個しかない。従って N 個すべてを利用する必要があるかという問題が指摘された。

(v)ヒストグラムの標本分布という概念を提示し、この分布を導くということを指針として、ヒストグラムの確率的構造を考察した。

(vi)従来、完全決定法による最終的推定値は個々の決定値の標本分布特性を受け継ぐであろうという推測があった。しかしながら以上の考察に関する限り、この推測は成り立ち難いように思える。少なくとも、個々の決定値から最終的推定値に移る過程にはこのような推測を許さない複雑な確率的メカニズムが存在することが解った。

<追記>

本稿は、第15回六甲計量経済学会議で報告された。その際、雨宮健スタンフォード大学教授、太田誠都立大学教授より有益なコメントを得ることができ、厚く御礼申し上げたい。現報告に取り入れることはできなかったが、今後の研究の指針としたい。

(慶應義塾大学大学院経済学研究科研究生)