慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論：古典的二財モデル
Sub Title	Statistical theory of the "complete determination method" for measuring preference functions
Author	松野, 一彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.3 (1977. 6) ,p.309(55)- 333(79)
JaLC DOI	10.14991/001.19770601-0055
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770601-0055

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

選好パラメタ「完全決定法」についての統計理論*

——古典的二財モデル——

松　野　一　彦

1. 序

ベルヌーイ・ラプラス型の選好関数のパラメタを測定する方法を考察する。測定の方法は種々考えうるが，特に「完全決定法」(1)と呼ばれる方法が用いられることがある。

この方法は統計的推定問題に対する一般的原理——例えば最小二乗法とか最尤法——から導かれるところのものではなかった。むしろ，そういった標準的方法が役に立たないという現場において，実用の立場からあみ出されたのが完全決定法である。

従来の方法にとって代るこのような新しい方法が提出されたならば，その方法を統計理論的に吟味してみるという問題が生じる。この完全決定法が通常の推定原理に照し合わせてどのような考え方に基づいているのか，または通常の推定原理の枠外に位置しているのか，これらの点について完全決定法の考え方を整理しなければならない。

また，この方法がパラメタ推定の方法として適当な方法であるかをも明らかにしなければならない。すなわち，推定値として望ましい特性を持っているかどうかという問題である。この問題は，完全決定法による推定値の標本分布を導き，その分布の形状を調べるということによって解かれる。そして，この論文では完全決定法の標本分布論に関するいくつかの試みが提示される。(2)

---

* この研究は，辻村江太郎教授のセミナーで報告されたが，その機会を与えられたこと，また議論をして頂いたことについて辻村教授及びセミナーのメンバーの方々に御礼申し上げたい。
特に，小尾恵一郎教授からはこの論文ができ上がるまで，多くの指導をうけた。深く感謝したいと思う。
論文の中の誤り，不充分な点は，当然筆者の責任である。

注(1) 完全決定法は，辻村江太郎『消費者行動の理論』，有斐閣，昭和39年，第5，6章，及び K. Tsujimura and T. Sato "Irreversibility of Consumer Behavior in Terms of Numerical Preference Fields," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 46, (1964) pp. 305-319, に登場した。その後，辻村『消費構造と物価』勁草書房，1968年，辻村，黒田昌裕『日本経済の一般均衡分析』筑摩書房，1974年においても利用，言及されているところの選好関数測定法である。

(2) 完全決定法の統計理論的解明について，この論文では扱いきれない幾多の問題が残っている。しかし，この方法の良さについて今までなされてきた推測に対する答は提供できたと考えられる。また，完全決定法の含んでいる確率論的仕組みについての理解は深められたと思う。

§2では，計測の対象となる消費者選好の確率モデルが示される。それを推定するための完全決定法の手続きは§3で与えられる。分析の範囲がどの程度に及ぶかは§4で述べられる。§5，6，7では，完全決定値と呼ばれる統計量の性質が調べられる。§8，9では，完全決定法の手続きの中に登場する決定値のヒストグラムに関して分析がなされる。

2. モデル

2—1 構造方程式系，誘導型

完全決定法によって測定しようとしているのは，次の型の選好関数である。

$$(2.1)\qquad I=(\alpha_1+q_1)^{\beta_1}\ (\alpha_2+q_2)^{\beta_2}$$

これは2財モデルのベルヌーイ・ラプラス型選好関数であって，q_1, q_2は各財の消費量であり，β_1, β_2, α_1, α_2は未知パラメタ。消費主体を家計としてパラメタ α_1, α_2 は，世帯人員数mによって次のように動く。

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}\alpha_1&=\alpha_{11}+\alpha_{12}m,\\ \alpha_2&=\alpha_{21}+\alpha_{22}m.\end{aligned}$$

収支均等条件は次のように書ける。

$$(2.2.\mathrm{a})\qquad p_1q_1+p_2q_2=Y$$

ただし，p_1, p_2 は各財の価格，Yは支出総額である。制約（2.2.a）の下で効用Iの極大条件は，

$$(2.3)\qquad \beta_1/p_1(\alpha_{11}+\alpha_{12}m+q_1)=\beta_2/p_2(\alpha_{21}+\alpha_{22}m+q_2).$$

以上より，支出額，$E_g=p_gq_g$, 決定の構造方程式系は，(3)

$$(2.4)\qquad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\\ z_5\end{bmatrix}.$$

ここで

$$\beta=\frac{\beta_1}{\beta_2},$$

$$(2.5)\qquad \gamma'=[\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4]=[-\alpha_{11},\ \frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_{21},\ -\alpha_{12},\ \frac{\beta_1}{\beta_2}\alpha_{22}],$$

$$z'=[z_1z_2\cdots z_5]=[p_1\ p_2\ mp_1\ mp_2\ Y].$$

T期間に渡る時系列データ，$[E'_{\cdot t}\ z'_{\cdot t}]=[E_{1t},\ E_{2t},\ z_{1t},\ \cdots,\ z_{5t}]$, $t=1,\ \cdots,\ T$, を使い，パラメタ

注(3) 完全決定法は，(2.1)以外の型でより多くの財についての選好関数の測定にも用いられる。更に，習慣形成を考慮したモデルをも対象にしている。その点では，ここでのモデルは一番簡単なものである。(2.4)は『消費者行動の理論』第6章の古典的モデルである。

$\alpha'=[\beta\ \gamma']$ が完全決定法によって推定される。

完全決定法の標本特性を調べるためにデータ発生の確率的モデルを次のように定める。

$$(2.6)\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\beta\end{bmatrix}E_{\cdot t}=\begin{bmatrix}0' & 1\\ \gamma' & 0\end{bmatrix}z_{\cdot t}+\begin{bmatrix}0\\ u_t\end{bmatrix}.$$

すなわち，限界効用均等式に攪乱項 u_t を含んだショックモデルとする。[4]

$\beta\neq-1$であるならば，次の誘導型（需要関数）を得る。

$$(2.7)\quad \begin{bmatrix}E_{1t}\\ E_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma'/(\beta+1) & \beta/(\beta+1)\\ -\gamma'/(\beta+1) & 1/(\beta+1)\end{bmatrix}z_{\cdot t}+\begin{bmatrix}u_t/(\beta+1)\\ -u_t/(\beta+1)\end{bmatrix}$$

$$\equiv\begin{bmatrix}\pi'_1\\ \pi'_2\end{bmatrix}z_{\cdot t}+v_{\cdot t}\equiv\Pi z_{\cdot t}+v_{\cdot t}.$$

2—2 内生変数の分布

攪乱項 u_t と外生変数 $z_{\cdot t}$ の確率的性質を次のように設定する。

$$(2.8)\quad \begin{aligned}&u_t\sim N(0\ \sigma^2),\\ &u_t \text{ と } u_s \text{ は独立},\\ &z_{\cdot t} \text{ は繰り返される標本抽出で一定},\\ &Z=\begin{bmatrix}z'_{\cdot 1}\\ \vdots\\ z'_{\cdot T}\end{bmatrix}\text{は位数 5}.\end{aligned}$$

誘導型 (2.7) と仮定 (2.8) により，内生変数の分布を得る。

$$(2.9)\quad \begin{aligned}&E_{\cdot t}\sim N\left(\begin{bmatrix}\pi'_1\\ \pi'_2\end{bmatrix}z_{\cdot t}\ \begin{bmatrix}\omega & -\omega\\ -\omega & \omega\end{bmatrix}\right),\\ &E_{\cdot t} \text{ と } E_{\cdot s} \text{ は独立},\end{aligned}$$

ただし，$\omega=\sigma^2/(\beta+1)^2$.

以下で現われる種々の統計量は，$E_{\cdot t}$ の何らかの関数として表わされる。これら統計量の標本分布を導くには，もとの $E_{\cdot t}$ の分布 (2.9) が基本となる。[5]

分布 (2.9) の共分散行列は特異行列であり，E_{1t} は，確率 1 で，E_{2t} の線型関数（回帰式）として書ける。

$$(2.10)\quad \begin{aligned}E_{1t}&=\pi'_1z_{\cdot t}+\omega^{-1}(-\omega)(E_{2t}-\pi'_2z_{\cdot t})\\ &=z_{5t}-E_{2t}.\end{aligned}$$

すなわち，収支均等式にもどった。(2.9), (2.10) より，内生変数すべての分布を書き出すと，

注（4） 完全決定法の採用はより複雑な現実を前提としていると考えられるが，ここでは簡単なショックモデルを仮定する。

（5） 理論モデル (2.4) と同様に確率図式も静学的なものである。動学的確率図式にするには，習慣形成を含む理論モデルか，系列相関を含む攪乱項を考えればよい。そのような図式での標本分布論は，非常に難しいものとなろう。

$$(2.11)\quad \begin{bmatrix} E_{1\cdot} \\ E_{2\cdot} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} E_{11} \\ \vdots \\ E_{1T} \\ E_{21} \\ \vdots \\ E_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{5\cdot} - E_{2\cdot} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ N(Z\pi_2,\ \omega I_T) \end{bmatrix},$$

ただし，$z_{5\cdot}' = [z_{51} \cdots z_{5T}]$.

2—3　識別性

確率構造方程式系（2.6）のパラメタ β, γ の識別性を考える。制約 i) $\beta \neq -1$, ii) 収支均等式には z_{5t} が係数1をもって入り，限界効用均等式には z_{5t} は入らない，の下でパラメタ β, γ は識別可能である。(6)

モデルは更に制約 iii) 収支均等式の攪乱項は恒等的にゼロ，iv) 収支均等式のゼロ制約，及び"1"制約，を含むが，i) ii) だけで $\beta\ \gamma$ の識別には充分である。(7)

3.　完全決定法

完全決定法と呼ばれる限界効用均等式の測定法を提示する。モデル（2.6）第二式の外生変数 $z_{1t} \cdots z_{4t}$ には高い相関が観察される。そしてこの多重共線性による最小二乗法の推定値の不精確さを避けるということが以下の方法を採用することの動機であった。(8)(9)

3—1　推定式

完全決定法の基礎になる完全決定値は攪乱項を含まない T 本の限界効用均等式を使う。

$$(3,1)\qquad E_{1t} = \beta E_{2t} + \gamma' z_{\cdot t},\quad t=1, \cdots, T,$$

ここで $z_{\cdot t}' = [z_{1t} \cdots z_{4t}]$. 観察値 E_{1t}, E_{2t}, z_t が与えられた時，未知パラメタは β, γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 の5

注（6）T. C. Koopmans, H. Rubin, and B. Leipnik, "Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics" Chapt 2 in T. C. Koopmans(ed.) *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, New York: John Wiley and Sons, Inc. (1950)による。この時，(2.5) より α_{ij} も識別可能であるが，β_1 β_2 個別には識別不能である。

（7）R. Stone "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *Economic Journal*, Vol. 64 (1954), pp. 511-527, では，制約 iv) も考慮した最尤法が試みられている。更に制約 iii) も使った最尤法については，R. W. Parks "Maximum Likelihood Estimation of the Linear Expenditure System," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66 (1971) pp. 900-903, を参照。

（8）この点については『理論』第5章又は『物価』第15章を参照されたい。また，観察誤差と多重共線性がある時の最小二乗法の標本分布は，K. Matsuno "Multicollinearity and the Exact Distribution of the Least Squares Estimators in the Error Model," *Keio Economic Studies* Vol. 13 (1976) pp. 53-68, で導かれている。

（9）古典的消費理論に対する習慣形成仮説の優位を確かめる，という統計学的手法にはのりにくい仮説検証を行ないたいということも大きな理由であろう。§3-4参照。

個であるから，(3,1) の中から5本の方程式を取り出し，それを β, γ について解く。T 本の内，t_1, ……, t_5 番目の方程式を取り，それによって解かれた β, γ' の完全決定値を $b_{t_1\cdots t_5}$, $c'_{t_1\cdots t_5}=[c_{1t_1\cdots t_5}\cdots c_{4t_1\cdots t_5}]$ と書く。これは線型方程式を解くこととなり，

$$(3.2)\qquad \begin{bmatrix} b_{t_1\cdots t_5} \\ c_{t_1\cdots t_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2t_1} \vdots & \\ E_{2t_2} \vdots & Z_{t_1\cdots t_5} \\ \vdots \vdots & \\ E_{2t_5} \vdots & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_{1t_1} \\ E_{1t_2} \\ \vdots \\ E_{1t_5} \end{bmatrix},$$

ただし

$$(3.3)\qquad \bar{Z}_{t_1\cdots t_5}=\begin{bmatrix} \bar{z}'_{\cdot t_1} \\ \vdots \\ \bar{z}'_{\cdot t_5} \end{bmatrix}.$$

ここで仮定 (2.8) により $\bar{Z}_{t_1\cdots t_5}$ は位数4を持つ。更に，確率変数 E_{2t_1}, …, E_{2t_5} は非特異正規分布に従うということから，(3.2) 右辺の逆行列の位数が落ちるのは確率ゼロでしか起らない。すなわち，仮定の下では完全決定値は確率1で存在する。

3—2 完全決定値の集まり

T 本の方程式から，非復元で，5本取り出す方法（組み合せ）は，

$$(3.4)\qquad N=\frac{T!}{5!\,(T-5)!}$$

通りある。従って完全決定値 $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ は N 個ある。N 個の決定値を $[b_1, c'_1]$, $[b_2, c'_2]$, ……, $[b_N, c'_N]$ と表わすこともある。特に N 個全体を考える時には $[b_n\ c'_n]$, $n=1$, ……, N, という添え字を用いる。

3—3 決定値のヒストグラム

N 個の決定値は5次元の直交座標空間に散らばるベクトルである。5次元の完全決定値空間における決定値 N 個の散らばり方は，ヒストグラムによって表示できる。

5次元空間のそれぞれの軸を $K_\kappa-1$, $\kappa=1$, …, 5, 個の区間に区切る分点を

$$(3.5)\qquad [i_{1k}\ i_{2k}\cdots\cdots i_{5k}],\ k=1,\ \cdots,\ K_\kappa$$

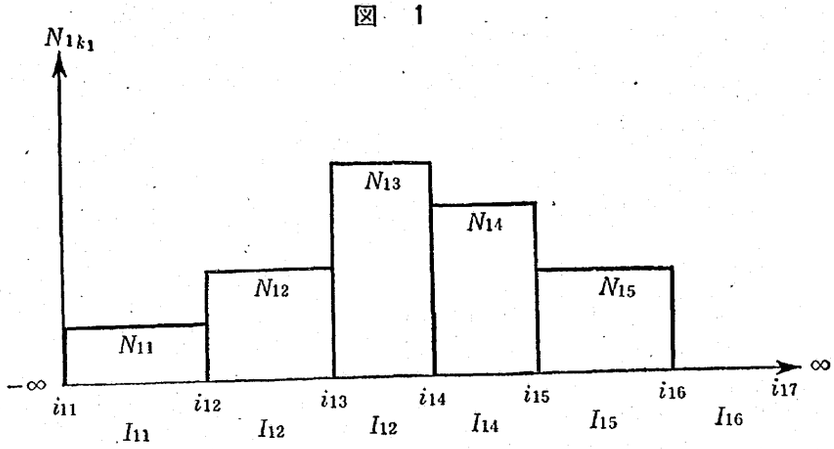
とする。これによって作られる各軸の区間を $I_{1k}=[i_{1k}, i_{1k+1})$, $I_{2k}=[i_{2k}, i_{2k+1})$, …, $I_{5k}=[i_{5k}, i_{5k+1})$, $k=1$, ……, $K_\kappa-1$, とする。I_{1k_1}, …, I_{5k_5} の直積を $J_{k_1\cdots k_5}$ とする。これは全部で $K\equiv\prod_1^5(K_\kappa-1)$ 個ある。

'矩形' $J_{k_1\cdots k_5}$ に落ちる，すなわち，

$$(3.5.a)\qquad i_{1k_1}\leq b_n<i_{1k_1+1};\ i_{2k_2}\leq c_{1n}<i_{2k_2+1},\ \cdots\cdots,\ i_{5k_5}\leq c_{4n}<i_{5k_5+1}$$

となる $[b_n\ c_{1n}\cdots c_{4n}]$ の個数を $N_{k_1\cdots k_5}$ とする。矩形 $J_{k_1\cdots k_5}$ 上に高さ $N_{k_1\cdots k_5}$ を取り棒柱図を描けば，それは N 個の決定値の散らばりを示すヒストグラム H となる。

図 1



5つの軸の内特定の一軸，例えば b_n に関するもの，をとってこのヒストグラムを描けば図1のようになる。一次元だけのヒストグラム，今は H_1 と書く，は完全決定値の marginal な散らばりを表わす。

区間分けの中で特に定めておきたいのは，決定値を正・負に分ける方法である。すなわちヒストグラムHを作るのに，

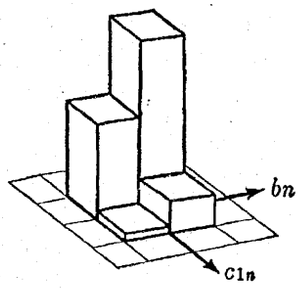
$$
\begin{aligned}
&[i_{11}\ i_{21}\cdots i_{51}]=[-\infty,\ -\infty,\ \cdots,\ -\infty]\\
(3.6)\quad &[i_{12}\ i_{22}\cdots i_{52}]=[0,\ 0,\ \cdots,\ 0]\\
&[i_{13}\ i_{23}\cdots i_{53}]=[\infty,\ \infty,\ \cdots,\ \infty]
\end{aligned}
$$

と定める。その結果できるヒストグラムは，決定値 $[b_n\ c'_n]$ をその個々の要素が正であるか負であるかによって仕分けした状態を表わすことになる。例えば2次元について描けば図2のごとくになる。4つの棒柱の高さは $(b_n\ c_{1n})$ が $(+,+)$, $(+,-)$, $(-\ +)$, $(-\ -)$ である決定値の個数を表わす。

3—4 決定値による検定[10]

§2に提示した古典的仮説との比較において“習慣形成仮説”が考えられる。習慣形成仮説に基づいても，そこに含まれるパラメタの完全決定値が数組得られるわけである。両仮説によるそれぞれの完全決定値の安定性（集中度）を比較してみる。両者の安定性をくらべて，より安定度の高い決定値を生む仮説の方を採択するという検定の方法が考えられる。この時，安定度とは直感的な

図 2



注 (10) 『理論』の第5・6章及び“Irreversibility～” section V を参照。

ものであるが，§3—3に述べたヒストグラムの集中度であるとも解される。

ヒストグラムの作り方は，矩形 $J_{k_1\cdots k_5}$ の取り方に依存する。前述二つの仮説の比較においては，完全決定値の符号による安定度が重視されていた。これは，ヒストグラムを作る時に (3.6) の意味する区分で，$J_{k_1\cdots k_5}$ を作ったことになる。

3—5 決定値による推定

N個の決定値を，何らかの方法によって一つに縮約することによって，最終的なβ γの推定値が得られる。例えば $b_1\cdots b_n$ の単純平均 (grouped または ungrouped)，中央値，最頻値をとればよい。

実際の分析では，次の方法が取られている。[11] まず，上述の符号による安定度を吟味した上で，一番集中した符号，例えば $(b_n\ c_{1n}\cdots c_{4n})=(++---)$，を満たす決定値を選びグループを作る。このグループに属す決定値の個々の要素，例えば b_n，を見，グループ内でのヒストグラムを作る。このヒストグラムの最頻値級[12]に属す決定値をもってβの最終的推定値とする。$\gamma_1\cdots\gamma_4$ についても同様である。

4. 問　題

以上で，理論モデルとそれを計測する方法としての完全決定法を提示した。この完全決定法の統計理論的な性質を吟味するのであるが，以下の分析は，次のような範囲において行なわれる。

度々ふれてきたが，完全決定法は古典的仮説と習慣形成仮説を比較するという目的をもっている。しかし，ここでは古典的仮説のパラメタ推定方法としての完全決定法を考える。従って，習慣形成仮説モデルとの関連は取り扱わない。また，検定法としての考察はしない。

完全決定値から最終的な推定値に至るまでは幾つかの段階がある。そのつど，種々の統計量が登場する。分析は，それら統計量の内の幾つかに限られる。そして，次のように大別できる。

i) 個々の完全決定値の標本分布を導く。例えば特定の $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ の同時分布，$b_{t_1\cdots t_5}$ の周辺分布，$c_{1t_1\cdots t_5}$ の周辺分布を導びく。そしてこれら標本分布の特性を調べる。

ii) N個全体の決定値 $[b_1\ c_1']\cdots[b_n\ c_n']$ の中に含まれる確率的仕組みを検討する。最終的な推定値に至る過程でN個の完全決定値を一つのヒストグラム集約させたが，このヒストグラムの性質が考察される。

注 (11) 『理論』第5章 p. 141 を参照。

(12) 最少頻度級に属す決定値が使われてもいる。このように，選ばれた最終的推定値は，さらにモデルの予測能力のテストに用いられる。そしてテストは，古典的仮説単独のテストではなく，古典的仮説と習慣形成仮説の対比という枠組みで行なわれる。すなわち，習慣形成仮説にも，最多及び最少頻度による最終的推定値がえられ，その推定値による予測力が古典的仮説によるものと比較される。この意味で，最多頻度に関する推定値と最少頻度に関する推定値両者を使い，種々の角度から両仮説を対比させようというのが『理論』その他の文献における分析方法である。

5. $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ の標本分布

一つの決定値 $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ の標本分布を導く。$[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$は，(3.2) で定義される。その中の内生変数についての制約 (2.10) を使えば，次を得る。

$$(5.1)\qquad \begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} = Z_{t_1\cdots t_5} \begin{bmatrix} -c_{t_1\cdots t_5} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{b_{t_1\cdots t_5}+1},$$

ただし

$$(5.2)\qquad Z_{t_1\cdots t_5} = \begin{bmatrix} z'_{\cdot t_1} \\ \vdots \\ z'_{\cdot t_5} \end{bmatrix}.$$

ここで $[E_{2t_1}\cdots E_{2t_5}]$ の分布は (2.11) より

$$(5.3)\qquad \begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} \sim N\left(Z_{t_1\cdots t_5}\pi_2,\ \frac{\sigma_2}{(\beta+1)^2} I_5\right).$$

(5.1) より $[E_{2t_1}\cdots E_{2t_5}]$ から $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ への変換のヤコビアンは，

$$(5.4)\qquad J\left([E_{2t_1}\cdots E_{2t_5}]:[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]\right) = (b_{t_1\cdots t_5}+1)^{-6}\,|\,Z_{t_1\cdots t_5}\,|,\ b_{t_1\cdots t_5} \neq -1.$$

(5.3) と (5.4) から $[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$ の標本分布の確率密度関数 ($p.\ d.\ f$) を得る。整理した結果をかくと，

$$(5.5)\qquad f_1(b,\ c') = (2\pi)^{-\frac{5}{2}} \left| \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2}(Z'Z)^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(b+1)^6}$$

$$exp-\frac{1}{2}\left\{[c'\ -1]-\frac{b+1}{\beta+1}[\gamma'\ -1]\right\}\left\{\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}(Z'Z)^{-1}\right\}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} c \\ -1 \end{bmatrix}-\frac{b+1}{\beta+1}\begin{bmatrix} \gamma \\ -1 \end{bmatrix}\right\},\ b \neq -1.$$ (13)

上の導出は任意の $(t_1\cdots t_5)$ について成り立つ。(5.5) 式は $c_{t_1\cdots t_5}$ の要素の周辺分布を導くのに利用される。

6. $b_{t_1\cdots t_5}$ の標本分布

特定の完全決定値ベクトルの要素である $b_{t_1\cdots t_5}$ の標本分布を導き，その特性を吟味する。

6—1 分布導出

完全決定値の定義 (3.2) より $b_{t_1\cdots t_5}$ について解くと（クラメルの公式），

$$(6.2)\qquad b_{t_1\cdots t_5} = \frac{\sum_{i=1}^{5} d^{(t_i)}_{t_1\cdots t_5} E_{1t_i}}{\sum_{i=1}^{5} d^{(t_i)}_{t_1\cdots t_5} E_{2t_i}}.$$

注 (13) この式では，$b,\ c,\ Z$ の添え字 $t_1\cdots t_5$ を省略してある。また $f_1(b,\ c)=0,\ b=-1$.

ここで $d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)}$は，行列$\begin{bmatrix} E_{2t_1} \\ \vdots \\ E_{2t_5} \end{bmatrix} \bar{Z}_{t_1\cdots t_5}$の E_{2t_t} に関する余因子で，例えば次のように書ける。

$$(6.2)\qquad d_{t_1\cdots t_5}^{(t_2)} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \bar{z}'_{\cdot t_1} \\ \bar{z}'_{\cdot t_3} \\ \bar{z}'_{\cdot t_4} \\ \bar{z}'_{\cdot t_5} \end{vmatrix}.$$

(2.10) により (6.1) を書きかえると，

$$(6.3)\qquad \sum_1^5 d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} E_{2t_t} = \sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} z_{5t_t}/(b_{t_1\cdots t_5}+1)$$

$$= |Z_{t_1\cdots t_5}| / (b_{t_1\cdots t_5}+1)$$

ここで (5.3) より

$$(6.4)\qquad \sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} E_{2t_t} \sim N\left(\sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} z'_{t_t}\pi_2,\ \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2}\sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)2}\right).$$

行列式の性質を使うと次のように書き改められる。

$$(6.5)\qquad \sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} z'_{t_t}\pi_2 = \frac{1}{\beta+1}|Z_{t_1\cdots t_5}|.$$

さらに行列の性質より，$l'=[0\ 0\ 0\ 0\ 1]$として，

$$(6.6)\qquad \sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)2} = l'(Z'_{t_1\cdots t_5} Z_{t_1\cdots t_5})^{-1} l\,|Z_{t_1\cdots t_5}|^2.$$

故に

$$(6.7)\qquad \sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} E_{2t_t} \sim N\left(\frac{1}{\beta+1}|Z_{t_1\cdots t_5}|,\ \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2}|Z_{t_1\cdots t_5}|^2 l'(Z'_{t_1\cdots t_5}Z_{t_1\cdots t_5})^{-1} l\right).$$

(6.3) の変換のヤコビアンは，

$$(6.8)\qquad J(\sum d_{t_1\cdots t_5}^{(t_t)} E_{2t_t} : b_{t_1\cdots t_5}) = |Z_{t_1\cdots t_5}|/(b+1)^2,\ b_{t_1\cdots t_5} \neq -1.$$

であるから (6.7) より $b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ を得る。整理した結果は，

$$(6.9)\qquad f_2(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{|\beta+1|}{(b+1)^2}(\sigma^2 l'(Z'Z)^{-1}l)^{-\frac{1}{2}}$$

$$exp - \frac{1}{2\sigma^2 l'(Z'Z)^{-1}l}\left(\frac{\beta-b}{b+1}\right)^2,\ b \neq -1.$$ (14)

この $p.d.f$ はγと独立であり，βと $\mu^2_{t_1\cdots t_5} \equiv \sigma^2 l'(Z'_{t_1\cdots t_5} Z_{t_1\cdots t_5})^{-1} l$ に依存する。(15) 以下でこ

注 (14) この式では b, Z の添え字を落してある。以下，注書きせずに添え字を落すことがある。また $f_2(b)=0$, $b=-1$.

(15) 分布を書きかえるならば，$(\beta+1)$ と $\mu^2_{t_1\cdots t_5}/(\beta+1)^2$ に依存すると言ってもよい。その時 $\mu^2_{t_1\cdots t_5}/(\beta+1)^2$ は誘導型 (2.7) に対する最小二乗推定値の（要素の）標本分散でもある。

分布 (6.9) は，サンプルサイズが5の時の直接最小二乗法の標本分布でもあるし，またその時の間接最小二乗法の標本分布でもある。サンプルサイズが5の時は，両推定量は恒等的に等しいためである。

サンプルサイズが，一般の大きさの時にも間接最小二乗法の標本分布として (6.9) と同型のものが得られる時がある。その点については，A. R. Bergstrom, "The Exact Sampling Distributions of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume," *Econometrica*, Vol. 30 (1962) 480-489, 及び，佐和隆光「直接最小2乗推定量と誤差分散との関係について」『季刊理論経済学』Vol. 17(1967) 65-69 を参照。

の分布の性質を調べる。

6—2　分布のモメント

分布 f_2 の ν 次のモメントを求めるには，

$$(6.10)\quad \left\{\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-1}^{\infty}\right\}\frac{b^{\nu}}{(b+1)^2}\,exp-\frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\beta+1}{b+1}-1\right)^2db$$

が存在しなければならない。しかし，この積分は $\nu\geqq 1$ に対し存在しないところのものである。[16]

従って，完全決定値 $b_{t_1\cdots t_5}$ の標本分布はいかなる次数のモメントも持たない。

6—3　分布のモード

上のように，分布はそのモメントで特徴付けられないから，他の特性をみる。

方程式

$$(6.11)\quad \frac{df_2}{db}=0$$

は解

$$(6.12)\quad b=-\left\{1+\frac{1}{4\mu^2}(\beta+1)\right\}\pm\frac{1}{2\mu^2}\,|\beta+1|\sqrt{1+\frac{1}{8\mu^2}}$$

をもつ。右辺第二項は，一般にゼロでないから $b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ は二山分布である。また二つのモードの距離，$\frac{1}{\mu^2}|\beta+1|\sqrt{1+\frac{1}{8\mu^2}}$，は $\mu^2{}_{t_1\cdots t_5}$ の減少関数，（σ^2 の減少関数）$\beta\,(>-1)$ の増加関数であることもわかる。

6—4　分布のメディアン

$b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$, f_2, のメディアンを $\lambda_{t_1\cdots t_5}$（または λ と省略）とすると，それは次の方程式を満たす。[17]

$$(6.13)\quad \int_{\lambda}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{(\beta+1)}{(b+1)^2\mu}exp-\frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\beta-b}{b+1}\right)^2db=\frac{1}{2}.$$

これは次の条件に変換される。

$$(6.14)\quad \int_{-\frac{1}{\mu}}^{-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}\frac{|\beta+1|}{\lambda+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{2}.$$

注 (16)　これはコーシーの積分定理による（例えばスミルノフ『高等数学教程』邦訳Ⅱ巻 p. 246参照）。コーシー分布のモメントが存在しないことを示すのもこの定理による。

(17)　以下，$\beta>-1$ として話をすすめる。選好関数が凸であるために，$\beta_1>0$, $\beta_2>0$ 従って $\beta>0$ と限ってもよい。

すなわち，基準化された正規分布についての積分に帰着する。積分の下限，$-\frac{1}{\mu}$，は負であるから，(6.14) を満たす上限についての制約を得る。

$$(6.15)\quad 0<\frac{1}{\mu}\left(\frac{|\beta+1|}{\lambda+1}-1\right)<\infty$$

または，

$$(6.16)\quad -1<\lambda_{t_1\cdots t_5}<\beta$$

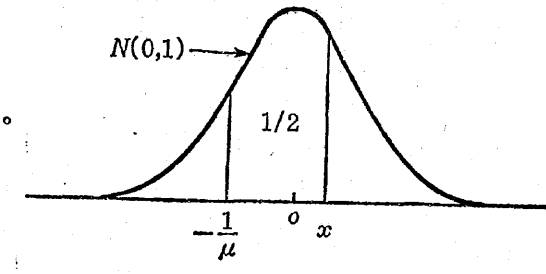
これより，個々の完全決定値 $b_{t_1\cdots t_5}$ は一般には β についてのメディアン不偏推定値とはならない。

$b_{t_1\cdots t_5}$ がメディアン不偏推定値，$\lambda_{t_1\cdots t_5}=\beta$，であるためには，(6.14) より

$$(6.17)\quad \int_{-\frac{1}{\mu}}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\frac{1}{2}$$

でなければならない。これが成り立つのは $-\frac{1}{\mu}=-\infty$ 又は $\mu^2=0$ の時に限る。すなわち，$\sigma^2=0$ という自明な時のみに限り $b_{t_1\cdots t_5}$ は β のメディアン不偏推定値となる。

図 3



$\mu^2{}_{t_1\cdots t_5}$ が与えられた時にメディアン $\lambda_{t_1\cdots t_5}$ と β の関係がどうなっているかを見ることができる。(6.14) の積分の上限を x とする。従って，

$$(6.18)\quad \lambda=\frac{1}{1+\mu x}\beta-\frac{\mu x}{1+\mu x}$$

$Z_{t_1\cdots t_5}$ は既知パラメタであるから未知パラメタ σ^2 を決めると μ が決まる。μ を与えることにより正規分布表より x の値がわかる（図3参照）。そして (6.18) より $b_{t_1\cdots t_5}$ の分布のメディアン $\lambda_{t_1\cdots t_5}$ と β の関係が読みとれる。それを表1にのせる。

表—1

$\mu_{t_1\cdots t_5}$	$\lambda_{t_1\cdots t_5}$
4	$0.162\beta-0.838$
3	$0.229\beta-0.771$
2	$0.364\beta-0.636$
1	$0.710\beta-0.290$
$^1/_2$	$0.972\beta-0.028$
$^1/_3$	$0.999\beta-0.001$
$^1/_4$	$(\approx)\beta$

6—5 分布のグラフ

完全決定値 $b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ のグラフを図4，図5に描く。この $p.d.f$ はパラメタ β と $\mu^2{}_{t_1\cdots t_5}$ に依存するから，β, μ^2 を種々に与え分布の図を得る。パラメタの与え方は表2に示す。8つの分布 $f^{(1)}\cdots\cdots f^{(8)}$，が描かれているが，例えば $f^{(1)}$ は $\beta=0.67$, $\mu^2={}^1/_{18}$ の時の完全決定値の $p.d.f$ である。

表—2

β \ μ^2	$^1/_{18}$	$^1/_8$	$^1/_2$	2	$^9/_2$
0.67	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$f^{(4)}$	$f^{(5)}$
0.3	—	—	$f^{(6)}$	—	—
0	—	—	$f^{(7)}$	—	—
−0.4	—	—	$f^{(8)}$	—	—

図4には，$f^{(1)}$ から $f^{(5)}$ があり，β を一定として μ^2 の

図 4

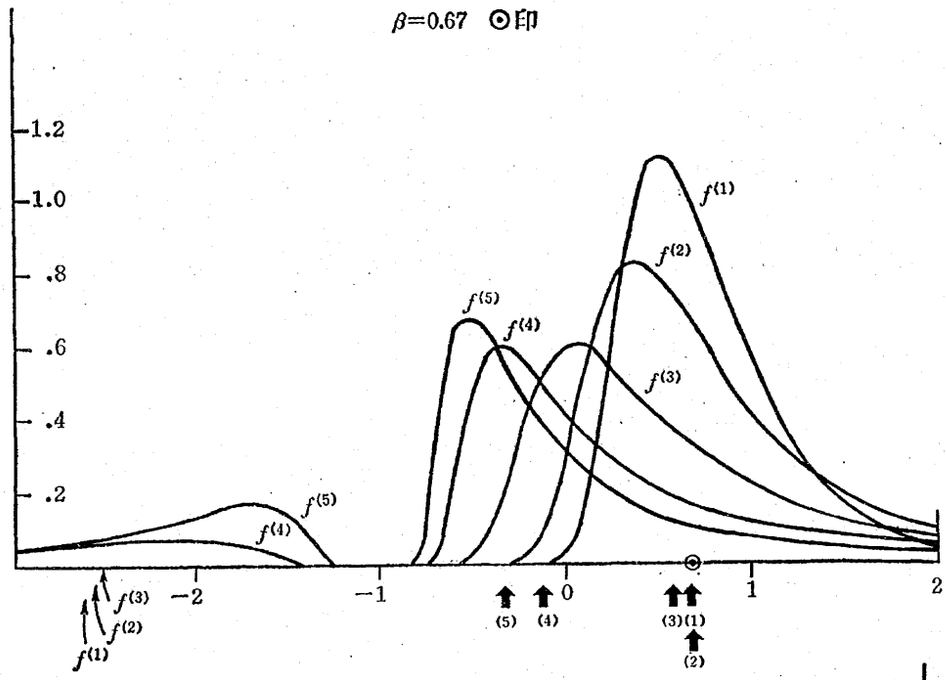
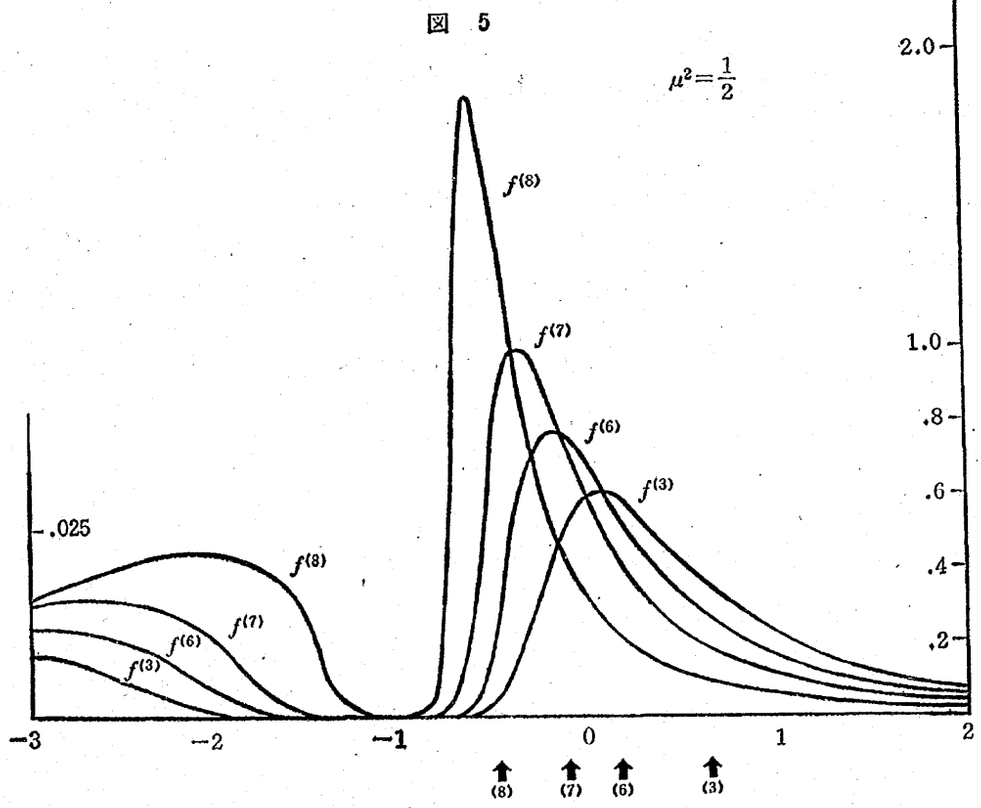

β=0.67 ⊙印
1.2
1.0
.8
.6
.4
.2
f(1)
f(2)
f(3)
f(4)
f(5)
−2
−1
0
1
2
(5) (4)
(3)(1)
(2)

図 5


μ²=1/2
2.0
1.0
.8
.6
.4
.2
.025
f(8)
f(7)
f(6)
f(3)
−3
−2
−1
0
1
2
(8) (7) (6) (3)

値と $p.d.f$ の変化の関係が読める。$\mu^2=\sigma^2\ l'(Z'_{t_1\cdots t_5}\ Z_{t_1\cdots t_5})^{-1}l$ であったから，図4は，i) β, $Z_{t_1\cdots t_5}$ を一定として $p.d.f$ と σ^2 の関係を示すと同時に ii) β, σ^2 を一定として $p.d.f$ と $Z_{t_1\cdots t_5}$ の関係を示すものでもある。横軸下の矢印 (j)は $f^{(j)}$ のメディアンの位置を示す。

次の事柄は図から読み取れる通りである。

(イ)二つの山の内，μ^2（または σ^2 または $l'(Z'Z)^{-1}l$）が小さくなるにつれ左の山は消えて行き，右側の山に確率があつまる。

(ロ) μ^2 が小さくなるにつれ，左山のモードはより左へ行き，右山のモードはより右へ行く。

(ハ)右山のモードの高さは μ^2 が小さくなるにつれ，一度小さくなり，そして再び大きくなる。すなわち $f^{(1)}\cdots f^{(5)}$ の右の頂上を結んだ線を引くならU字型をしている。

図5には，$f^{(3)}$, $f^{(6)}$ から $f^{(8)}$ があり μ^2 を一定にした時の β と $p.d.f$ の関係が読める。但し，右山と左山のたて軸のスケールは異なる。次が読みとれる。

(ニ)β が（-1 へ向って）小さくなるにつれ，二つの山も -1 へ向って行く。そして山の高さも高くなって行く。

(ホ)メディアンと右山のモードは共に β と -1 の間にある。

(ヘ)β が大きい程，β とメディアンの差は大きい。

7. $c_{mt_1\cdots t_5}$ の標本分布

§5で完全決定値(ベクトル)，$[b_{t_1\cdots t_5}\ c'_{t_1\cdots t_5}]$，の $p.d.f$ を得た。§6ではその要素である $b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ を得た。次に $c'_{t_1\cdots t_5}=[c_{1t_1\cdots t_5}\cdots c_{4t_1\cdots t_5}]$ の要素，例えば $c_{1t_1\cdots t_5}$，の標本分布を導く。

7—1 分布導出

$b_{t_1\cdots t_5}$, $c_{t_1\cdots t_5}$ の（同時）$p.d.f$, f_3，である (5.5) と $b_{t_1\cdots t_5}$ の（周辺）$p.d.f$, f_2，である (6.9) を使うと，$b_{t_1\cdots t_5}$ が与えられた時の $c_{t_1\cdots t_5}$ の条件付き分布の $p.d.f$ を得る。まず f_2 を書き変えて，

$$(7.1)\quad f_2(b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2}l'(Z'Z)^{-1}l\right)^{-\frac{1}{2}}(b+1)^2$$

$$exp-\frac{1}{2}\left(l'-\frac{b+1}{\beta+1}l'\right)\left\{\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}\ (Z'Z)^{-1}\right\}^{-1}\left(l-\frac{b+1}{\beta+1}l\right).$$ [18]

問題の条件付き分布は，(5.5) と (7.1)より

$$(7.2)\quad f_3\ (c\mid b)=\frac{f_1}{f_2}=(2\pi)^{-2}\left(\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}\right)^{-2}\left(\frac{|(Z'Z)^{-1}|}{l'(Z'Z)^{-1}l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

注(18) この節でも，b, c, Z の添え字 $t_1\cdots t_5$ をかってに省略することがある。

$$exp-\frac{1}{2}\left(c'-\frac{b+1}{\beta+1}\gamma\right)\left\{\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}(\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}\right\}^{-1}\left(c-\frac{b+1}{\beta+1}\gamma\right),\ b\neq-1.$$

ただし $\overline{Z}\equiv\overline{Z}_{t_1\cdots t_5}$ (3.3). ここで行列式の性質

$$(7.3)\qquad |Z'Z|=|\overline{Z}'\overline{Z}|l'(Z'Z)^{-1}l$$

を使えば，

$$(7.4)\qquad f_3=(2\pi)^{-2}\left|\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}(\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}\right|^{-\frac{1}{2}}$$

$$exp-\frac{1}{2}\left(c'-\frac{b+1}{\beta+1}\gamma'\right)\left\{\frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}(\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}\right\}^{-1}\left\{c-\frac{b+1}{\beta+1}\gamma\right\}$$

$$=N\left(\frac{b+1}{\beta+1}\gamma,\ \frac{\sigma^2(b+1)^2}{(\beta+1)^2}(\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}\right)$$

$c'_{t_1\cdots t_5}$ の要素，例えば $c_{1t_1\cdots t_5}$ の（周辺）条件付き $p.d.f$ は (7.4) から

$$(7.5)\qquad f_4(c_1\mid b)=N\left(\frac{b+1}{\beta+1}\gamma_1,\ \frac{(b+1)^2}{(\beta+1)^2\varphi_1^2}\right)$$

ただし

$$(7.6)\qquad \varphi_1^2\equiv\varphi^2_{1t_1\cdots t_5}=\sigma^2[\,1\ 0\ 0\ 0\,](\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

次にこの条件付き $p.d.f$ と $b_{t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ を使えば $(b_{t_1\cdots t_5}\ c_{1t_1\cdots t_5})$ の（同時）$p.d.f$ に戻すことができる。後の利用に都合が良いように整理した結果，

$$(7.7)\qquad f_5(b,\ c_1)=f_2\cdot f_4=\frac{exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)\cdot(\beta+1)^2}{2\pi\ (\varphi_1^2\mu^2)^{\frac{1}{2}}}(b+1)^{-3}$$

$$\cdot\ exp-\frac{(\beta+1)^2}{2}\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)\left(\frac{1}{b+1}\right)^2$$

$$\cdot\ exp\ (\beta+1)\left(\frac{\gamma_1c_1}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)\left(\frac{1}{b+1}\right)$$

$$\equiv C\left(\frac{1}{b+1}\right)^3e^{-A\left(\frac{1}{b+1}\right)^2}e^{B\left(\frac{1}{b+1}\right)},\ b\neq-1.$$

ここで最後の式は定義式で C は f_5 の定数項，A と B が何を示すかは明らか。この同時分布から b を積分で消せば目的の c_1 の標本分布が得られる。

b についての積分[19]をした結果 $c_{1t_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ は

注(19) $f_0(c_1)=\left\{\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-1}^{\infty}\right\}C\left(\frac{1}{b+1}\right)^3 exp-A\left(\frac{1}{b+1}\right)^2 expB\left(\frac{1}{b+1}\right)db$

$=\left\{\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right\}C\,t^{-3}\ exp-A\left(\frac{1}{t^2}\right)exp\ B\left(\frac{1}{t}\right)dt$

$=\left\{\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right\}C\ s\ exp-As^2\ exp\ B\ s\ ds$

$$(7.8)\qquad f_6(c_1)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)}}{\pi}\ (\varphi_1^2\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{-1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+i)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\right)i!}\left[\frac{\left(\frac{\gamma_1c_1}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)^2}{2\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)}\right]^i \text{(20)}$$

導出過程からわかるように，一般に $c_{mt_1\cdots t_5}$ の $p.d.f$ は (7.8) のパラメタ γ_1, φ_1^2 をそれぞれ γ_m, $\varphi_m^2=\sigma^2\times[(\overline{Z}'\overline{Z})^{-1}$ の $m\times m$ の要素] で置き換えることによって得られる。γ_1, σ^2, $Z_{t_1\cdots t_5}$に依存して$\beta\gamma_2\cdots\gamma_4$ とは独立な $p.d.f$ (7.8) の性質を次に調べる。

7—2 分布のモメント

分布 f_6 の ν 次のモメントを求めるには，項別積分の各項について次の型の積分を計算しなければならない。

$$(7.9)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1^{\nu}\left(\frac{\gamma_1c_1}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{2i}}{\left(\frac{c_1^2}{\varphi_1^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{i+1}}dc_1.$$

$$=\int_{\infty}^{0}C(-s)exp-A(-s)^2expB(-s)ds+\int_0^{\infty}C\ s\ exp-As^2\ exp\ B\ s\ ds$$

$$=\int_0^{\infty}C\ s\ e^{-As^2}\{e^{-Bs}+e^{Bs}\}\ ds$$

$$=2C\sum_{i=0}^{\infty}\frac{B^{2i}}{(2i)!}\int_0^{\infty}s^{2i+1}e^{-As^2}ds$$

$$=C\sum\frac{B^{2i}}{(2i)!}\ \frac{\Gamma(i+1)}{A^{i+1}}$$

$$=CA^{-1}\sum\frac{\Gamma(1+i)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2}+i)i!}\left(\frac{\left(\frac{B}{2}\right)^2}{A}\right)^i.$$

注(20) この $p.d.f$ は，一般に，確率変数XとYが

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{bmatrix}\gamma_1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1^2 & 0\\0 & \mu^2\end{bmatrix}\right)$$

に従う時の $c_1=\frac{X}{Y}$ の $p.d.f$ としても導びける。

このように（期待値がゼロでない）二つの正規変数の比の分布を議論したものには次の文献がある。R. C. Geary, "The Frequency Distribution of the Quotient of Two Normal Variates," *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 93 (1930) 442-446. E. C. Fieller, "The Distribution of the Index in a Normal Bivariate Population," *Biometrika* Vol. 24 (1932) 428-440. G. Marsaglia "Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of Uniform Variables," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 60 (1965) 193-204.

間接最小二乗法との関係で，これら比の分布に注目，整理したものには R. C. Basmann, "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Overidentified Cases," *Journal of the American Statistical Association* Vol. 56 (1961) 619-636. 及び Basmann "Exact Finite Sample Distributions for Some Econometric Estimators and Test Statistics: A Survey and Appraisal," Chapt. 4, *Frontiers of Quantative Economics*. Vol II. Intriligator and Kendric (ed.) (1974) North Holland.

しかし，$\nu \geqq 1$ に対しこの無限積分は存在しない。[21]

故に，完全決定値 $c_{mt_1 \cdots t_5}$ の標本分布はいかなる次数のモメントも持たない。

7—3 分布のグラフ

$p.d.f$ (7.8) 自体は，x, y が

$$(7.10) \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

に従う時の

$$(7.11) \quad c_1 = \frac{\varphi_1}{\mu}\left(\frac{\frac{\gamma_1}{\varphi_1}+x}{\frac{1}{\mu}+y}\right)$$

の分布としても導びける。そして $t \equiv \left(\frac{\gamma_1}{\varphi_1}+x\right) \Big/ \left(\frac{1}{\mu}+y\right)$ の分布のグラフが Marsaglia[22] によって与えられている c_1 は t の定数倍であるから，Marsaglia のグラフの縦横軸のスケールを別とすれば，t の分布図はそのまま，c_1 の分布図と読める。

その図によれば次が観察される。

(イ)パラメタの値によって分布の対称性，非対称性が現われる。

(ロ)パラメタの値によって分布の一山性，二山性が生じる。

7—4 その他

$\gamma_1=0$ という (null) ケースにおいて $c_{1t_1 \cdots t_5}$ の $p.d.f$ は簡単になる。この場合において $p.d.f$ は座標 $c_{1t_1 \cdots t_5}=0$ をモードとする左右対称な一山分布であることが示せる。この性質はMarsaglia のグラフに見られる通りである。

8. $\{b_1 \ldots b_N\}$ の性質

個々の完全決定値の特性について考察してきた。完全決定法では N 個の完全決定値全体が問題となる。以下では，完全決定値ベクトル $[b_n\, c'_n]$ の内特に b_n を取り[23]，その全体，すなわち $\{b_1 \cdots b_N\}$，の確率的構造を調べる。

注 (21) 注 (16) を参照。

(22) Marsaglia 前掲論文，Fig. 1. p. 197.

(23) 以下の $\{b_1 \cdots b_N\}$ に関する分析は $\{c_{m1} \cdots c_{mN}\}$ について，更には $\{[b_1 c'_1] \cdots [b_N c'_N]\}$ についても同様におこなえるであろう。

8—1 制　約

もともとの確率変数 $E_{11}\cdots E_{1T}$ $E_{21}\cdots E_{2T}$ は $E_{21}\cdots E_{2T}$ から成り立っている，(2.10)。$N(>T)$ 個の b_n はT 個の E_{2t} を変換したものである。従って $\{b_1\cdots b_N\}$ は本質的には T 個の確率変数から成り立っているはずである。

(6.3) で b_n $(\equiv b_{t_1\cdots t_5})$ を生じるところの $d^{(t)}_{t_1\cdots t_5}$ を次のベクトルにする。

$$(8.1)\qquad d'_n=[0\cdots0\ d^{(t1)}_{t_1\cdots t_5}\ \ 0\cdots0\ d^{(t2)}_{t_1\cdots t_5}\ \ 0\cdots0\ d^{(t5)}_{t_1\cdots t_5}0\cdots0].$$

これは $1\times T$ のベクトルで，$d^{(t)}_{t_1\cdots t_5}$は i 番目の要素。$b_1\cdots b_N$ に対応し $d_1\cdots d_N$ がある。すなわち，これにより (6.3) は，

$$(8.2)\qquad d'_n\ E_{2\cdot}=|Z_n|/b_n+1$$

という記号で書かれる。

上の d_n を並べて次の行列をつくる。

$$(8.3)\qquad D'=\begin{pmatrix} d'_1 \\ \vdots \\ d'_T \\ d'_{T+1} \\ \vdots \\ d'_N \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} D'_1 \\ D'_2 \end{bmatrix}.$$

ここで d_n をどのように並べても自由であるが，D_1は非特異であるようにする。このDで次の変換をする。

$$(8.4)\qquad \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\equiv\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \\ x_{T+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} D'_1E_{2\cdot} \\ D'_2E_{2\cdot} \end{bmatrix}.$$

これは $E_{2\cdot}$ から X_1, X_2 への特異変換であるから，確率 1 で，

$$(8.5)\qquad X_2=D'_2D'^{-1}_1X_1\equiv\begin{bmatrix} g_{T+1}\cdots g_{T+1T} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ g_{N1}\ \cdots\ g_{NT} \end{bmatrix}X_1$$

と書ける。そして (2.11) より

$$(8.6)\qquad X_1\sim N\left(D'_1Z\pi_2\ \ \frac{\sigma^2}{(\beta+1)^2}D'_1D_1\right).$$

(8.2), (8.5) よりN個の b_n 全体は次のように書ける。

$$(8.7)\qquad \begin{aligned} b_1&=\frac{|Z_1|}{x_1}-1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_T&=\frac{|Z_T|}{x_T}-1, \\ b_{T+1}&=\left(|Z_{T+1}|\Big/\sum_{t=1}^{T}g_{T+1t}\frac{|Z_t|}{b_t+1}\right)-1, \end{aligned}$$

(8.8)

$$b_N=\left(|Z_N|\Big/\sum_{t=1}^{T}{}^{n}g_{Nt}\frac{|Z_t|}{b_t+1}\right)-1.$$

このように$\{b_1\cdots b_N\}$は，(8.6) に従う $x_1\cdots x_N$ の分布に支配されている。または，$\{b_1\cdots b_N\}$のうち自由度のあるのは適当に選ばれた $\{b_1\cdots b_T\}$ だけである。[24]

8—2 分布導出

'独立' なT個の決定値，例えば $b_1\cdots b_T$，の分布は (8.6) に従う X_1 の分布から変換される。この時変換 (8.7) のヤコビアンは，

$$(8.9)\quad J[X_1:(b_1,\cdots,b_T)]=\frac{|Z_1|}{(b_1+1)^2}\cdot\cdots\cdot\frac{|Z_T|}{(b_T+1)^2},\ b_n\neq 1.$$

この変換により $(b_1\cdots b_T)$ の $p.d.f$ は，

$$(8.10)\quad f_7(b_1,\cdots,b_T)=\pi^{-\frac{T}{2}}|M|^{-\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{T}\frac{|\beta+1|}{(b_n+1)^2}$$

$$exp-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{T}\sum_{n'=1}^{T}M^{nn'}\left(\frac{\beta-b_n}{b_n+1}\right)\left(\frac{\beta-b_n'}{b_n'+1}\right),\ b_n\neq -1,$$ [25]

ただし

$$(8.11)\quad [M^{nn'}]=\frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix}|Z_1| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |Z_T|\end{bmatrix}(D_1'D_1)^{-1}\begin{bmatrix}|Z_1| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |Z_T|\end{bmatrix}=M^{-1}.$$

$\{b_1\cdots b_N\}$ の内 $b_1\cdots b_T$ は (8.10) に従って分布する。$(D_1'D_1)^{-1}$ は対角行列でないから $b_1\cdots b_T$ は独立にならない。ただし完全決定値 b_n と b_n' が共通の標本点を使っていないのなら，その二つに限っては独立である。この意味では独立なものが$\left[\frac{T}{5}\right]$個ある。(8.10) に従って $b_1\cdots b_T$ がその値を定めると，残りの $b_{T+1}\cdots b_N$ も (8.8) によって自動的に決まる。従って (8.10) は $\{b_1\cdots b_N\}$ 全体を支配する分布である。

9. $\{b_1\ldots b_N\}$ のヒストグラム

完全決定法においては，完全決定値をヒストグラムに組む段階があった。§8 までには特定の決定値，b_n，及び決定値の全体，$\{b_1\cdots b_n\}$，の性質を調べてきた。そして，これらの性質を使って，

注 (24) 従って，完全決定法においてN個すべての決定値を使う必要があるかという問題が生じる。実際にはN個すべてを使った場合と，一部だけを使った場合がある。後者の例としては，5つの隣り合った標本点による決定値（標本点 $t=1,\cdots,T$ を circular なものと考えればこれはT個ある）だけを使うということになる。

(25) いずれかの b_n が-1 の時，$f_7=0$.

決定値の作るヒストグラムの構造を調べるのが次の問題である。

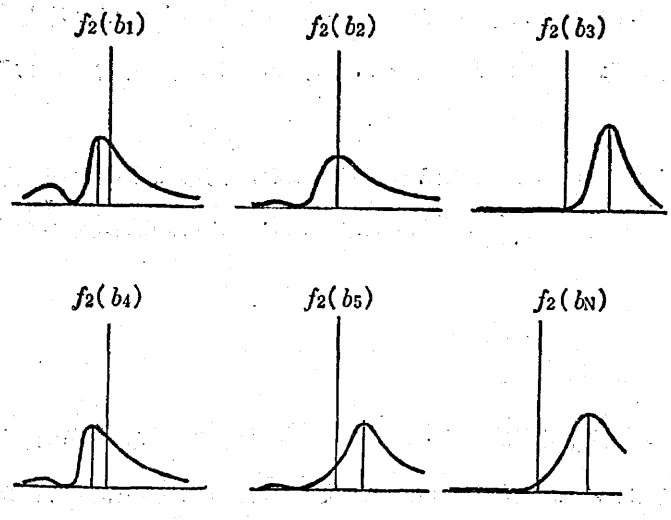
本来ここでのヒストグラムはN個のベクトル $\{[b_1\, c_1']\cdots[b_N\, c_N']\}$ で作られる多次元のものを考えるのであるが，以下の分析は一次元の $\{b_n\}$ についてのヒストグラムを対象とする。

9—1 ヒストグラムの構成

$\{b_n\}$ のヒストグラムがどのような仕組みになっているかは，次のように説明できる。

個々の決定値 b_n のレベルで見ると，それは (6.9) の (周辺) $p.d.f$, $f_2(b_n)$, に従っている。その $p.d.f$ を特徴付けるパラメタ β, σ^2 は N 個の $f_2(b_n)$ について共通である。ただしパラメタ $l'(Z_n'Z_n)^{-1}l$ は $f_2(b_1)$, …, $f_2(b_N)$ 毎にすべて異なる。すなわち N 個の $p.d.f$, $f_2(b_n)$ は分布型は同一でも，そのパラメタは同一でない。そしてパラメタ$l'(Z_n'Z_n)^{-1}l$ (または μ_n^2) の変化によって

図 6



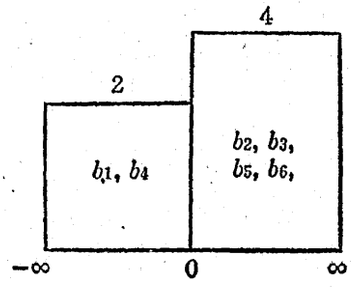
$p.d.f$ の変わるさまは図4より読みとれる (§6—5で特に(イ)(ロ)(ハ)を参照)。説明のために図6によって，N個の変化する $p.d.f$ を表わす。各 $p.d.f$, $f_2(b_n)$ は完全決定値 b_n を作るための5本の方程式に対応している。またはこの5本の方程式に関する外生変数に対応している。

β, σ^2 は母集団で固定されていても，各 $p.d.f$, $f_2(b_n)$ はパラメタZ_nに従って (モードで見た) 分布の位置をかえる。完全決定法の途中段階でヒストグラムを作るということの背景には，$\{b_1\cdots b_N\}$ が同一の分布からの‘(独立な) 抽出’であるという推測があったと思われる。しかし図6，またはその元にある図4よりわかるように $\{b_1\cdots b_N\}$ は同一の分布からの抽出であるとはみなせなくなる。

b_n は $f_2(b_n)$ の (右山の) モードから抽出され易い。$b_1\cdots b_N$ が独立であれば $(b_1\cdots b_N)$ の同時分布としてもこれが成り立つ (但し b_1, …, b_N が独立でないことは先に示した)。そして抽出された $\{b_1\cdots b_N\}$ が適当に区分けされた軸上でヒストグラムを作る。例えば図6の例で$N=6$とし，更に区

分けを，$i_{11}=-\infty$ $i_{12}=0$ $i_{13}=\infty$ とする。この結果できる $\{b_1\cdots b_5\}$ のヒストグラムは図7である。

図 7



どんな値の $\{b_n\}$ が生じやすいか，そしてどんな型のヒストグラムができやすいかは，$\{f_2(b_1)\cdots f_2(b_N)\}$ の各モードがいくつになるかに依存する。$f_2(b_n)$ のモードは μ_n^2（または Z_n）に依存していたからN個のモードはN個の Z_n によって決まる。従って，$\{Z_1\cdots Z_N\}$ の（観察結果としての）散らばり状態がヒストグラムの形状を支配することになる。

右山のモードの位置は（6.12）より

$$(9.1)\qquad -\left\{1+\frac{1}{\mu_n^2}(\beta+1)\right\}+\frac{1}{2\mu_n^2}\,|\beta+1|\sqrt{1+\frac{1}{8\mu_n^2}}$$

で与えられた。例えば $\{Z_1\cdots Z_N\}$ の内，半分の Z_n が（9.1）を -0.5 近くにするようなもので残りの半分の Z_n が（9.1）を 0.6 近くにするようなものからなっているとする。この結果できるヒストグラムは，区分けにも依存するが，-0.5 と 0.6 に最頻値をもった二山分布となる（確率が高い）[26]。

実際には $b_1\cdots b_N$ は確率的にも関数的にも独立でない。従ってこの非独立性のもとで，どの型のヒストグラムが生起しやすいかを調べなければならない。これが次に述べる“ヒストグラムの標本分布”の問題である。

9—2 ヒストグラムの標本分布

一般の球入れ実験を考える。区別ができるA個の箱と区別できるB個の球がある。そして球を箱に投け入れる実験を行なう。その結果として生じる球の区別できる分配方法がR通りあるとすると，

$$(9.2)\qquad R=\binom{A+B-1}{B}=\frac{(A+B-1)!}{B!(A-1)!}$$

である[27]。

完全決定法に関して言えば，箱は$\{b_n\}$のヒストグラムの階級区間 I_{1k} に，球は完全決定値 b_n に

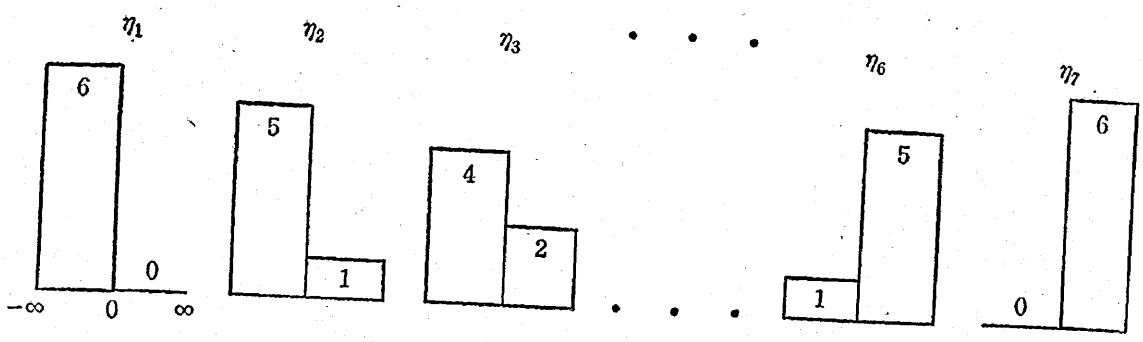
注（26） ここでのモデルよりも拡張された習慣形成モデルに関して，完全決定値ヒストグラムが二山になる場合が報告されている。慶應義塾大学産業研究所『最近における消費財の需要関数の推論』昭和51年，補論3参照。なお，個々の完全決定値が二山分布になることを§6で示してある。しかし，ここでの議論で明らかなように，個々の決定値の $p.\ d.\ f$ の二山性と決定値N個のヒストグラムの二山性とは直接関係がない。決定値の $p.\ d.\ f$ がたとえ一山分布であってもヒストグラムは二山にも三山にもなりうる。

（27） William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,*" Vol. I, John Wiley and Sons, New York, 邦訳（紀伊国屋書店）p. 55 参照。

対応する[28]。そして $A=K_1-1$, $B=N$.

今，$K_1-1=2$, $i_{11}=-\infty$, $i_{12}=0$, $i_{13}=\infty$, $T=6$, 従って $N=6$ とすると，描き得る（生じ得る）ヒストグラム H_1 の型は図8の7種類，$\eta_1 \cdots \eta_7$，すなわち (9.2) を使い，

図 8

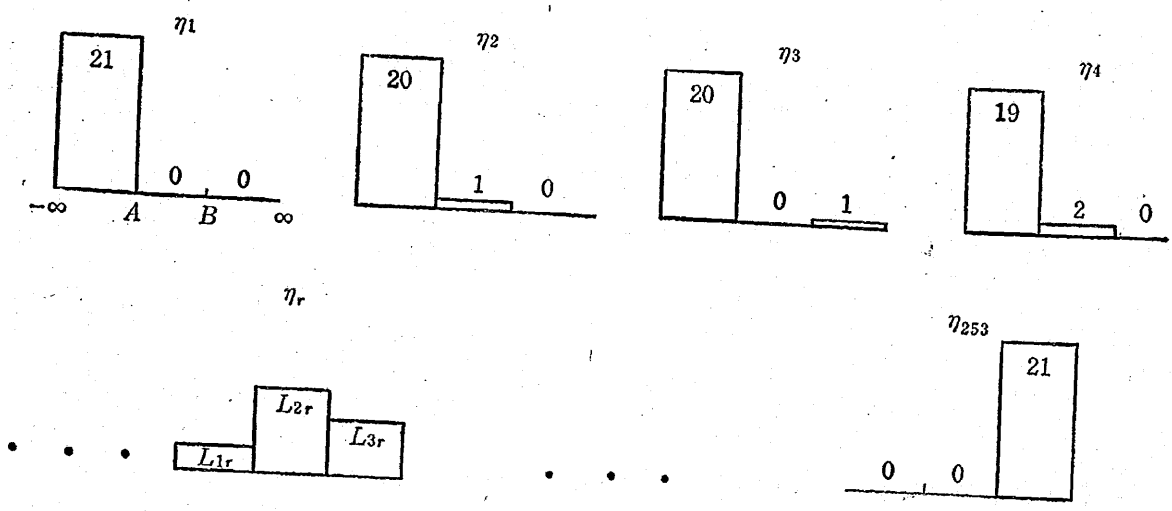


$$(9.3) \qquad R=\binom{K_1-1+N-1}{N}$$

$=\binom{7}{6}=7$ が H_1 の取りうる“値” η_r の個数を示す。図7は η_5 と見なせばよい。

$K_1-1=3$, $i_{11}=-\infty$, $i_{12}=A$, $i_{13}=B$, $i_{14}=\infty$, $T=7$, $N=21$, ならば描き得るヒストグラムの型は図9の $\eta_1 \cdots \eta_{253}$ である。

図 9



一般に H_1 は R 個の値 $\eta_1 \cdots \eta_R$ を取りうる。現実の一回限りの抽出では $\{\eta_1 \cdots \eta_R\}$ の内の一つが得られる。そして各 η_r が得られる（又は $H_1=\eta_r$ となる）確率

注 (28) ここでは $\{b_1 \cdots b_N\}$ のヒストグラムを考えている。$\{(b_1 c_1) \cdots (b_N c_N)\}$ のヒストグラムならば“多次元の球入れ実験”を扱わなければならない。

(9.4)　$P_r\{H_1=\eta_r\},\ r=1,\ \cdots,\ R,\ \sum_{r=1}^{R} P_r\{H_1=\eta_r\}=1$

が問題となる。このように確率‘変数’H_1 の離散型標本空間 $\{\eta_1\cdots\eta_R\}$ 上に定義される確率分布 (9.4) が“ヒストグラム H_1 の標本分布”である。

9—3　ヒストグラムの分解

$\{b_1\cdots b_N\}$ は，自由度のある $\{b_1\cdots b_T\}$ と，それらの関数として書ける $\{b_{T+1}\cdots b_N\}$ から成っていた。そして $\{b_1\cdots b_N\}$ の作るヒストグラム H_1 は $\{b_1\cdots b_T\}$ のヒストグラム Φ と $\{b_{T+1}\cdots b_T\}$ のヒストグラム Ψ の合成になっいる。それは，以下に述べる意味での‘合成’である。

§6—2 と同様に Φ は，

(9.5)　$P=\binom{K_1-1+T-1}{T}$

通りの型 $\phi_1\cdots\phi_P$ を取り得る。Ψ は，

(9.6)　$Q=\binom{K_1-1+(N-T)-1}{N-T}$

通りの型 $\varphi_1\cdots\varphi_Q$ を取り得る。図9の例でいえば，$\{\phi_1\cdots\phi_P\}$ と $\{\varphi_1\cdots\varphi_Q\}$ はそれぞれ，図 10, 11 のように書ける。この例によって説明を進める。

図　10

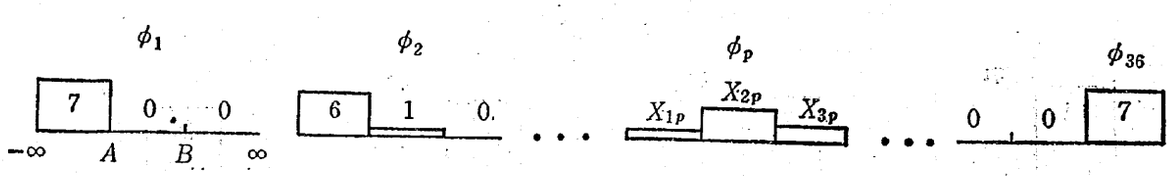
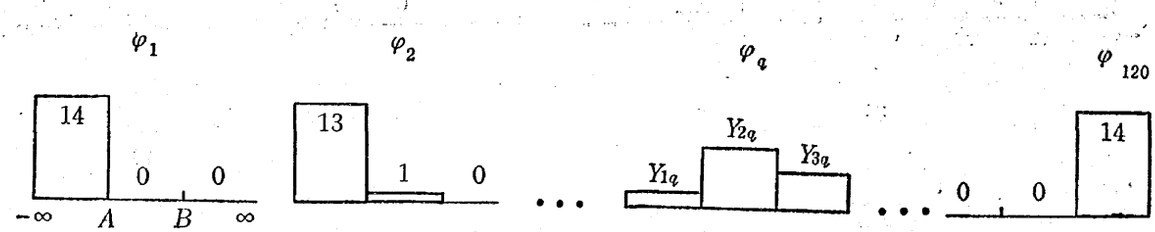


図　11



$b_1\cdots b_7$ が ϕ_1 を生じるような値であるとする。すなわち，

(9.7)　$-\infty<b_1,\ \cdots,\ b_7<A$

であると，この時 $b_8\cdots b_{21}$ は (8.8) に従ってある数値を取る。(9.7) が満たされて ϕ_1 が得られたとしても，$b_8\cdots b_{21}$ がどの領域に落ちるか一概にいうことはできない。すなわち，例えば，$b_1=0$ で $b_1>A$ の時と $b_1=1$ で $b_1<A$ の時では b_8 の対応する値は代わる。そして，$-\infty<b_1<A$ という条件だけでは $b_8<A$ になるか，$A\leqq b_8<B$，等々，になるか不明である。従って ϕ_1 が与えら

れたという条件だけでは，Ψ は $\varphi_1 \cdots \varphi_{12}$ になるか不明である（確率的である）。

上の議論より，$\Phi=\phi_p$ が与えられた下での条件付きヒストグラム $\Psi|\phi_p$ が定義できる。そして $\Psi|\phi_p$ は $\varphi_1 \cdots \varphi_{120}$ という値をとり，その条件付き確率

(9.8) $P_r\{\Psi|\phi_p=\varphi_q\}=P_r\{\Psi=\varphi_q \mid \Phi=\phi_p\},\ q=1 \cdots Q,\ p=1,\ \cdots,\ P$

が定義される。同様にΦは周辺確率

(9.8) $P_r\{\Phi=\phi_p\},\ p=1,\ \cdots,\ P$

を持つ。

そして図9において η_1 は ϕ_1 を作る $b_1 \cdots b_7$ と φ_1 を作る $b_8 \cdots b_{21}$ とから成り立っている。これを

(9.9) $\eta_1=\phi_1 \times \varphi_1$

と書き，η_1 は ϕ_1 と ϕ_2 の合成と呼ぶ。同様に η_2 は ϕ_1 と φ_2 の合成であるか，または ϕ_2 と φ_1 の合成である。これを

(9.10) $\eta_2=(\phi_1 \times \varphi_2)+(\phi_2 \times \varphi_1)$

と書く。以下これを繰り返えし最後は，

(9.11) $\eta_{253}=\phi_{36} \times \varphi_{120}.$

各 η_r がどんな合成であるかは，一つ一つ吟味しなければならない。

このようにヒストグラム H_1 を分解した結果，その標本分布 $P_r\{H_1=\eta_r\}$ は簡単な場合について，次のように書ける。

$$P_r\{H_1=\eta_1\}=P_r\{\Phi=\phi_1\} \cdot P_r\{\Psi|\phi_1=\varphi_1\},$$

(9.12) $$P_r\{H_1=\eta_2\}=P_r\{\Phi=\phi_1\} \cdot P_r\{\Psi|\phi_1=\varphi_2\}+P_r\{\Phi=\phi_2\} \cdot P_r\{\Psi|\phi_2=\varphi_1\},$$

$$P_r\{H_1=\eta_{253}\}=P_r\{\Phi=\phi_{36}\} \cdot P_r\{\Psi|\phi_1=\varphi_{120}\}.$$

以上のような意味でヒストグラム H_1 はΦとΨの合成である。そしてH_1の標本分布を得るにはΦの標本分布と $\Psi|\phi_1$ の標本分布を得る必要がある。今のところ，次のようにΦの分布を形式的に導びくことができる。

9—4 $\{b_1 \cdots b_T\}$のヒストグラムの分布[29]

$\{b_1 \cdots b_T\}$ のヒストグラムΦは，P個の値 $\phi_1 \cdots \phi_P$ を取るが，特定の ϕ_p は各区間の棒柱の高さ，$X_{1p},\ X_{2p},\ \cdots X_{k_1p}$ で特徴付けられる（$K_1=3$ のケースについては図10を参照）。すなわち，

(9.13) $-\infty=i_{11}<b_{j_1},\ b_{j_2},\ \cdots\cdots,\ b_{jX_{1p}}<i_{12}$

$i_{12} \leqq b_{jX_{1p}+1},\ \cdots\cdots,\ b_{jX_{1p}+X_{2p}}<i_{13}$

注(29) ヒストグラムを作るのに（関数的に）独立な $\{b_1 \cdots b_T\}$ だけを使うのであれば（脚注 (24)），ここでの議論でこと足りる。そしてΨの分布の議論は必要なくなる。

……

$$i_{1k_1-1} \leqq b_{jX_{1p}+\cdots+XK_1-1p}, \ \cdots\cdots, \ b_{j_T} < i_{1K_1} = \infty$$

であるようなT個の決定値が得られた時，これはヒストグラム ϕ_p が得られたことを意味する。

(9.13) が生じる確率は，$(b_1 \cdots b_T)$ の同時分布 $f_7(b_1, \cdots, b_T)$，(8.10)，より

$$(9.14) \quad \int_{I_{11}} \cdots \int_{I_{11}} \int_{I_{12}} \cdots \int_{I_{12}} \cdots \int_{I_{1K_1-1}} \cdots \int_{I_{1K_1-1}} f_7(b_{j_1} \cdots b_{j_T}) db_{j_1} \cdots db_{j_T}$$

$$\equiv \text{prob} \ (I_{11} \cdots I_{1K_1-1}; j_1 \cdots j_T),$$

ただし I_{1k} は区間 $[i_{1k}, i_{1k+1}]$.

ϕ_p が得られる一つのケースが (9.13) で示され，この中の $j_1 \cdots j_T$ は数 $\{1, \cdots, T\}$ の中を動く。$\{1, \cdots, T\}$ を K_1 個のグループに分け第一グループには X_{1p}の数 $j_1 \cdots j_{X1p}$，第二グループには X_{2p} の数 $j_{X1p+1} \cdots j_{X1p+X2p}$，等々，が入るようにする。この時，この分割の仕方は，

$$(9.15) \quad \frac{T!}{X_{1p}! \cdots X_{K1p}!}$$

通りある。[30] この $T!/X_{1p}! \cdots X_{K1p}!$ 通りの分割に対応した添え字 $j_1 \cdots j_T$ を持つ (9.13) は，すべて ϕ_p をもたらす。従って，

$$(7.16) \quad P_r\{\Phi = \phi_p\} = \sum_{(j_1 \cdots j_T)} \text{prob} \ (I_{11} \cdots I_{1K_1-1}; j_1 \cdots j_T).$$

ここで総和 $\sum_{(j_1 \cdots j_T)}$ は $T!/X_{1p}! \cdots X_{K1p}!$ 通りの $\{1, \cdots, T\}$ の分割すべてを尽す。

例えば，図10の例を扱うと，

$$(9.17) \quad P_r\{\Phi = \phi_1\} = \int_{-\infty}^{A} \cdots \int_{-\infty}^{A} f_7(b_1, \cdots, b_7) \ db_1 \cdots db_7,$$

$$P_r\{\Phi = \phi_2\} = \left\{ \int_{-\infty}^{A} \cdots \int_{-\infty}^{A} \int_{A}^{B} + \int_{-\infty}^{A} \int_{-\infty}^{A} \int_{A}^{B} \int_{-\infty}^{A} + \cdots + \int_{A}^{B} \int_{-\infty}^{A} \cdots \int_{-\infty}^{A} \right\}$$

$$\times f_7(b_1, \cdots, b_7) \ db_1 \cdots db_7,$$

……

$$P_r\{\Phi = \phi_{36}\} = \int_{B}^{\infty} \cdots \int_{B}^{\infty} f_7(b_1, \cdots, b_7) \ db_1 \cdots db_7.$$

以上 Φ の標本分布導出の道すじを示した。但しこれを実際に行ない，例えば (9.17) を計算し，Φ の標本分布の特性を吟味するには，大きな困難があるように思われる。さしあたり数値計算の方法によって吟味すること等が課題となろう。

10. 結　語

ここでの課題は，選好パラメタ計測のための「完全決定法」について統計学的解析を行なうこと

注(30)　Feller 前掲書，邦訳 p. 53 参照。

であった。

その内容を要約しておく。

(i)完全決定値 $[b_{t_1\cdots t_5}\ c_{1t_1\cdots t_5}\ \cdots\ c_{4t_1\cdots t_5}]$ に関してその同時標本分布を導いた。

(ii)完全決定値 $b_{t_1\cdots t_5}$ の標本分布を導びきその分布特性を吟味した。$b_{t_1\cdots t_5}$ 個々のレベルでは β の適切な推定値として考えるには無理があることを示した。

(iii)完全決定値 $c_{mt_1\cdots t_5}$ の標本分布を導き，その特性を調べた結果，決定値個々のものは γ_m の適切な推定値とは考えられないことを示した。

以上は個々の決定値に関する吟味である。完全決定法ではN個の決定値をヒストグラムにする手続きがある。それに関する分析は次のようである。

(iv) $\{b_1\cdots b_N\}$ には独立なものがT個しかない。従ってN個すべてを利用する必要があるかという問題が指摘された。

(v)ヒストグラムの標本分布という概念を提示し，この分布を導くということを指針として，ヒストグラムの確率的構造を考察した。

(vi)従来，完全決定法による最終的推定値は個々の決定値の標本分布特性を受け継ぐであろうという推測があった。しかしながら以上の考察に関する限り，この推測は成り立ち難いように思える。少なくとも，個々の決定値から最終的推定値に移る過程にはこのような推測を許さない複雑な確率的メカニズムが存在することが解った。

<追記>

本稿は，第15回六甲計量経済学会議で報告された。その際，雨宮健スタンフォード大学教授，太田誠都立大学教授より有益なコメントを得ることができ，厚く御礼申し上げたい。現報告に取り入れることはできなかったが，今後の研究の指針としたい。

(慶應義塾大学大学院経済学研究科研究生)