| Title | 所得分配の平等とその評価 |
|---|---|
| Sub Title | Inequality of income distribution and its evaluation |
| Author | 川又, 邦雄 |
| Publisher | 慶應義塾経済学会 |
| Publication year | 1977 |
| Jtitle | 三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.2 (1977. 4) ,p.193(67)- 208(82) |
| JaLC DOI | 10.14991/001.19770401-0067 |
| Abstract | |
| Notes | 千種義人教授退任記念特集号<br>論説 |
| Genre | Journal Article |
| URL | https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770401-0067 |

# 所得分配の平等とその評価

川又邦雄

## 一　序

所得分配の平等が資源配分の効率性とならんで経済厚生のもっとも重要な規定要因であり，経済政策の大きな目標であることは，いまさら多言を要さない。ピグー〔13〕がこの二つの厚生基準を提示して以来，経済学者は時には過大と思われる労力を効率的資源配分の分析に注ぎ，いわゆる『厚生経済学の基本定理』をはじめとする多くの興味深い命題を導くことに成功した。そこでは古典学派以来の価格機構の効率性の思想は，厳密な定理として定式化され論証されるとともに，その意義と限界が明確に把握されるに至ったのである。その理論体系こそはまさに現代厚生経済学の理論的な支柱をなすものであり，経済政策のきわめて多くの部分がそれによって正当化が試みられているといって過言でない。しかし経済厚生のもう一つの規定要因である所得分配の平等ないしは公正の問題に関しては，それに対比される規模と精緻度とを具えた理論は見いだすことができないというのが現状である。

いうまでもなく所得分配の問題についての最大の困難の一つは，効率性の場合におけるパレート有効性（最適性）のような比較的合意がえやすく，かつ有効な価値基準あるいは指標を見いだし難い点にある。そのために多くの場合，ある状態が他の状態に比べてより公平であるか否かについて意見の一致をみることができないのである。しかし当面の分析の目的いかんによっては，必ずしもあらゆる資源配分の比較を可能にするバーグソン流の社会的厚生関数を導入する必要はないし，たとえそれを用いるとしても，その具体的な形に依存しない（その意味で弱い）仮定に基づいて分配問題についてかなり有意義な発言をなしうる場合がある。

実際，本稿の前半においては分配問題について（陽表的に社会的厚生関数を用いずに主張される）比較的合意をえやすいと思われるいくつかの価値基準が導入され，それらの間の関係が明らかにされ，それと両立しうる社会的厚生関数がかなりの自由度をもちうることが示される。つづいて後半ではジニー係数を中心とする不平等度（不均等度）の指標の性質がさまざまな観点から考察される。

ここでの議論は，パレート〔15〕，ジニー〔9〕，ローレンツ〔13〕，リッチ〔18〕，ダルトン〔5〕らによる不平等度の尺度についての先駆的研究にもとづき，とりわけアトキンソン〔1〕，ダスグプタ＝セン＝スターレット〔6〕，ロスチャイルド＝スティグリッツ〔19〕，セン〔22，23〕らによって発展された理論を踏襲するものであり，主として各人の所得の分配のみが考察され，それがどのような機構をつうじてどんな方法で達成されるか（されるべきか）は分析の枠外におかれている。また所得以外の要因たとえば余暇（労働時間）や資産の分配，そして所得分配の問題と本来不可分な関係にある生産の問題もまったく捨象されている。これらの残された論点については最後の節で簡単にふれられている。(1)

## 二　最適所得分配の基準

いま$n$人の個人からなる経済を考え，第$i$個人の（貨幣）所得を$x_i$で示すと，所得分配の状態は$x=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$のようにあらわすことができる。それと同じ総所得（各個人の所得の総和）をもつもう一つの可能な分配の状態を$y=(y_1, \cdots\cdots, y_n)$で示せば

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

が成り立つ。ここで$x$と$y$のいずれが望ましいと判断するかについて，いくつかの価値基準を導入することができる。

バーグソン＝サミュエルソン流の伝統的な接近方法は，あらゆる所得分配（いまの場合は総所得が一定の場合に限定してもよい）について適当な条件をそなえた一つの社会的厚生関数

$$W=W(x)$$

が定義できると考える立場をとる。この場合には，$x$と$y$との良し悪しはこの関数の値の大小によって判定される。また総所得$\Sigma x_i$が一定に与えられれば（より一般に生産を含む経済においても），「最適」な所得分配はその制約の下で$W(x)$を最大にする$x$を求めることによって形式的には完全に決定される。しかしなぜ$x$の方が$y$より好ましいのか，すなわちどのような場合に$x$の社会的厚生関数の値が$y$のそれより高いのかについて，もうすこし掘り下げて考えることもできよう。

われわれは一定の総所得の分配の問題を考えているから，これは通常のパレート有効性の基準によっては一般に判定することができない。じっさい伝統的な厚生経済学はそれ以外の価値基準を導

注(1)　所得分配の平等とは何かについて，本稿で論じえなかったいくつかの興味深い論点が，フリードマン〔8〕の第10章に扱われている。かつて千種・福岡両教授の大学院の共同セミナーにおいて筆者が報告を担当した第10章をめぐる討論が，本稿作成の一つの遠因となっている。

入することを回避してきた面もあった。しかし$x$と$y$とがある特別な関係にあるならば，われわれはパレートの基準で判定きない場合にも適用可能なかなり合意をえやすい価値基準を見いだすことができると考える。以下でそのいくつかを導入するが，これらは総所得が一定である場合の分配について（任意の二つの対象の比較を許してはいないが，反射律と推移律を満たすという意味で）ある弱順序を定めるものである。これらの価値基準はまったく同等のものであり，しかもそれらの順序づけをさらに拡張することは，ある意味で困難であることを示すことができる。

(*L*)ローレンツ曲線による判定

ある所得分配の状態$x$に対応するローレンツ曲線が$y$のそれに比べてつねに上方にあるとき（ローレンツ曲線の定義については第五節を参照のこと），すなわち一般性を失うことなく

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n,$$

$$y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots\cdots \leqq y_n$$

であるものとし

$$x_1 + \cdots\cdots + x_k \geqq y_1 + \cdots\cdots + y_k \quad (k=1, \cdots, n-1)$$

$$x_1 + \cdots\cdots + x_n = y_1 + \cdots\cdots + y_n$$

が成立するとき，$x$は$y$以上に望ましい所得分配であるとするものである。$x$においてが$y$におけるより，より多くの所得が低所得者に（「低所得」をどの水準によって定義しても！）与えられているという意味で公平であると見なす立場である。最小の満足（所得）をうる個人の満足を可能な限り高めるのがよいというのがロールズ〔17〕の基準であるとすれば，上の価値基準は基本理念においてそれと同一のものであると考えることができる。

(*T*)富者から貧者への所得移転による判定

ある個人からより所得の低い（resp. 高い）個人へ正の所得移転を有限回（ゼロも含む）行うことによって$y$から$x$（resp. $y$から$x$）が到達可能であるとき，$x$は$y$以上に望ましい分配であると判定する。ここである個人$k$からより所得の低い個人$j$へ$t>0$だけの所得移転によって$x$から$x'$になるとは，形式的にはその成分の間に

$$\text{(i)} \quad x'_j = x_j + t$$

$$x'_k = x_k - t$$

$$0 \leqq t < \frac{x_k - x_j}{2}$$

かつ　(ii)　$x'_i = x_i \quad (i \neq j, k)$

という関係が成立することを意味するものとする（この場合には$x'_k \geqq x'_j$でもあることに注意)。

このように所得を富者からより所得の低い個人に移転することによって経済厚生が増大するとい

う考えは，ピグー〔16〕によって主張されたものであり，この意味で不平等度を何らかの指標で表現する場合には，このような移転によってその値は低下しなくてはならないと考えられる。これをピグー=ダルトンの基準という。この点については，また後にふれることがある。

〔W〕すべての平等主義者の評価が一致する場合の判定

いま各所得分配 $x$ に対して選好の大きさ（実数）を対応させる連続微分可能で単調増加な一つの評価関数（社会的厚生関数）$W(x)$ が定まるものとしよう。そして

(i)　（対称性）$x$ の成分の順序を入れかえたもの（置換）の任意の一つを $x'$ とするとき，つねに

$$W(x)=W(x')$$

となり，しかも

(ii)　（シュールの条件[(2)]）

$$(x_i-x_j)\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}-\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)\leqq 0$$

を満たすとき $W(x)$ は平等主義を反映するということにしよう。後述のように(ii)の条件は必ずしも微分可能性を仮定しない場合にも表現することができる。

(i)の対象性の条件は各個人を同等に評価するということの数学的表現である。また(ii)の条件はたとえば $x_i>x_j$ であれば $\frac{\partial W}{\partial x_i}\leqq\frac{\partial W}{\partial x_j}$ であること，つまり所得の高い個人についてほど所得一単位の増加のもたらす社会的評価が小さい（大きくない）ことを意味している。

この意味での平等主義を反映する**すべての** $W$ について $W(x)\geqq W(y)$ となるとき，$x$ は $y$ よりも望ましいと判断するのはかなりの説得性をもつものであろう。

## 三　所得分配の評価についての基本命題

前節の三つの基準によって順序づけられる所得分配の全体はすべての可能な所得分配の中のほんの一部に過ぎない。しかし，これらの三つの基準による判定が互いに同値であり，その順序をさらに拡張することはある自然な限定の下では不可能であることを示すことができることは，はなはだ興味深い。

以下では（$L$）の意味で $x$ のローレンツ曲線が $y$ のそれの上方にあることを

$$xLy,$$

($T$)の意味で，富者から貧者への有限回の所得移転によって $y$ から $x$ がえられることを

$$xTy,$$

注(2)　この条件はシュール〔21〕において考察されたものである。

$(W)$の意味ですべての平等主義を反映する社会的厚生関数$W$について $W(x) \geqq W(y)$ となることを

$$xWy$$

と記すことにする。このとき次の定理が成立する。

**定理1**[(2)]**：**ローレンツ曲線による判定$(xLy)$，富者から貧者への所得移転による判定$(xTy)$および平等主義を反映するすべての社会的厚生関数の評価の一致による判定$(xWy)$の三つは互いに同値である。

この定理の証明は (イ) $xLy \Longleftrightarrow xTy$，(ロ) $xLy \Longleftrightarrow xWy$ を示すことによって完了する。これらの証明は，いずれも必ずしも容易でないが，(イ)の証明にはハーディー=リットルウッド=ポリア〔10〕[(4)]にある結果がそのまま使用できる。

(ロ)の証明と$(W)$の中のシュールの条件の一般化を行うためには以下しばらく予備的考察が必要である。くわしい説明を必要とされない読者は，本節の証明の部分はとばして進んでもよい。

一般に$n \times n$次の非負正方行列$P$は，その行和と列和がすべて1であるとき，すなわちすべての成分が1である$n$次ベクトルを$\mathbf{1}$とするとき

$$P\mathbf{1}=\mathbf{1} \qquad P'\mathbf{1}=\mathbf{1}$$

が成立するならば，それを双確率行列 (bistchastic matrix) ということにする。

いま$D$を実数の区間とし，$D^n$でその$n$個の直積をあらわすことにする。もし$D^n$で定義された実数値関数$f$が，すべての $x \epsilon D^n$ とすべての$n$次の双確率行列について

$$f(Px) \geqq f(x)$$

となるとき$f$をシュール〔21〕の名を用いて $S$- 凹関数ということにしよう。このときつぎの補助定理が主張できる。

**補助定理1：**開領域 $\mathring{D}^n$ において微分可能で対称な関数 $f$；$\mathring{D}^n \rightarrow R$ が $S$- 凹関数であるための必要条件は，すべての $\mathring{D}^n$ についてシュールの条件

$$(x_i - x_j)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \leqq 0$$

が成立することである。

この命題は，オストウスキー〔14〕によるもので，その証明の一つは，ベルシュ〔3〕224頁に

注(3) この命題はアトキンソン〔1〕，ダスグプタ=セン=スターレット〔6〕，ロスチャイルド=スティッグリッツ〔19〕，セン〔23〕らによって導かれた結果を総合し，多少の改良を加えたものである。

(4) 同書47–48頁を参照。なおロスチャイルド=スティグリッツ〔19〕の191頁(l)の証明は $X(k) \geqslant_L Y$ を保証しないので不完全である。たとえば $X=(5, 10, 11, 13)$ $Y=(5, 6, 14, 14)$ としてみよ。

（$S$-凸関数の場合について）与えられている。

この補助定理にしたがえば，われわれがさきに($W$)として掲げた条件のうち(ii)のシュールの条件を

(ii)′ $W$ は $S$- 凹関数である

と書くことによって($W$)は$W$が微分可能でない場合についても適用可能となることが知られる。

さて$\phi$を実数の集合$R$の上で定義された凹関数とし，

$$f(x)=\phi(x_1)+\cdots\cdots+\phi(x_n)$$

とおけば，容易に示されるように $f(x)$ は $S$- 凹関数となる。したがって(ロ)の証明のためには，つぎの二つの補助定理を示せば十分である。

**補助定理 2**　$x=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$，$y=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n)$ は

$$x_1\leqq x_2\leqq\cdots\cdots\leqq x_n$$

$$y_1\leqq y_2\leqq\cdots\cdots\leqq y_n$$

を満たす$n$次元ベクトルであるとき，つぎの条件は同値である。

(i)　$x=Py$　となる双確率行列$P$が存在する

(ii)　実数の集合$R$で定義された任意の凹関数$\phi$について

$$\phi(x_1)+\phi(x_2)+\cdots\cdots+\phi(x_n)\geqq\phi(y_1)+\phi(y_2)+\cdots\cdots+\phi(y_n)$$

(iii)　$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k\geqq y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$　$(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$$

**補助定理 3**　$x=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$，$y=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n)$ は，

$$x_1\leqq x_2\leqq\cdots\cdots\leqq x_n$$

$$y_1\leqq y_2\leqq\cdots\cdots\leqq y_n$$

を満たす$n$次元のベクトルであって，ある双確率行列$P$について

$$x=Py$$

が成立するものとする。そのとき任意の単調増加である $S$- 凹関数$f$について

$$f(x)\geqq f(y)$$

となる。

補助定理2はハーディ=リットルウッド=ポリヤ〔10〕によるものであり，とくに基本的なステップである(iii)⟹(ii)の証明は，カラマタ〔12〕によって与えられた。この補助定理についての簡潔な証明はベルジュ〔3〕183-187頁にある。また補助定理3については，ベルジュ〔3〕225頁を参照されたい。

（定理の証明終り）

つぎに補助定理2の(ii)$\Longrightarrow$(iii)の対偶を考慮することによってつぎの命題が成立することがわかる。

**定理2**　$x$と$y$のローレンツ曲線か交わる場合（$xLy$でも$yLx$でもない場合）には三つの凹関数$\phi$，$\psi$が存在して

$$\phi(x_1)+\phi(x_2)+\cdots\cdots+\phi(x_n)>\phi(y_1)+\phi(y_2)+\cdots\cdots+\phi(y_n)$$

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\cdots\cdots+\psi(x_n)<\psi(y_1)+\psi(y_2)+\cdots\cdots+\psi(y_n)$$

となる。

もし必要ならば$\phi$および$\psi$に適当な線型関数を加えることができるから，それらはいずれも正の値をとり，単調増加な凹関数であると考えてよい。したがってそれらを個人の所得の評価関数（効用関数）とみなせば，$x$と$y$の二つのうちいずれを望ましいと判定するかは評価関数についての個別の性質に依存することになる。この意味でローレンツ曲線が交わる場合については所得分配の良し悪しについて先験的な判定を下すことはできないといえる。さきに定理1の三つの基準にもづく順序をさらに拡張することが困難であると述べたのはこのためである。

次節では所得の不平等度（不均等度）についての指標を導入する。それらはすべての所得分配の状態について（とくにローレンツ曲線が交わる場合についても）定義されているから，一定額の総所得を分配した場合の不平等度が減少したといっても，すべての平等主義を反映した社会的厚生関数の値が（定理2におけるように各人の効用の和の形で書けるものに限定しても）増加することを意味するものではない。

## 四　所得の不平等度の測定

「$n$人の個人からなる経済を考え，第$i$個人の所得を$y_i$ ($i=1,$ ……, $n$) とし，それらの（相加）平均を

$$\mu=\sum_{i=1}^{n} y_i/n$$

で記す時，所得の分布の不平度（不均等度）を示す指標としていくつかのものが考えられる。

そのような指標の任意の一つを$y=(y_1,\cdots,y_n)$の関数として$I_n(y)$と記すとき，$I_n(y)$はその関数形の単調さ，連続性，計算の簡便さ等に加えて，しばしばつぎのような条件を満たすことが望ましいと考えられる（これらの条件はチャンパーノン〔4〕の条件とほぼ同じものである）。

(i)　$I_n(y)$は，任意のゼロでない$n$次元の非負ベクトル$y$について定義されており，0と1との

間をとる。

(ii) $y=(\mu, \cdots, \mu)$ の時は　$I_n(y)=0$,

$y=(0, \cdots 0, n\mu)$ の時は　$I_n(y)=1$

（すくなくとも$n$が十分大きい時には1に近づく）となり，その以外の$y$については $0<I_n(y)<1$ となる。

(iii) （対称性）$y$の成分の順序を任意に入れかえたもの（置換）を$y'$とする時，$I_n(y)=I_n(y')$ となる。

(iv) （同次性）任意の正の数$a$について $I_n(ay)=I_n(y)$ となる。

(v) （標本数からの独立性）任意の正の整数$m$について $I_n(y)=I_{nm}(y, y, \cdots\cdots, y)$ となる。

(vi) （ピグー＝ダルトンの基準）任意の個人$j$から，より所得の高い個人$k$への所得の移転は，不平等度を高める。また逆の移転は（個人$k$の移転後の所得が個人$j$の移転後の所得より大である限り）不平等度を低める。たとえば，$y=(y_1, \cdots\cdots, y_n)$, $t>0$とし，$y$の第$j$成分を$y_j-t$, 第$k$成分を $y_k+t$ で置き換え，その他の成分を不変としたベクトルを $y'$ とする時 $I_n(y)<I_n(y')$ となる。また $y_j-y_k<2t<0$ の場合には，$I_n(y)>I_n(y')$ となる。

なお上の条件で不平等度を高める（resp. 低める）を低めない（resp. 高めない）とすればこれよりやや弱い基準がえられる。

たとえば，分散を

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2}{n}$$

で示す時，変動係数

$$\text{（イ）}\quad C=\frac{V^{\frac{1}{2}}}{\mu}$$

は，(iii), (iv), (v), (vi) を満たすが，(i), (ii) を満たさない。実際(iii)および(iv), (v)を満たすことは明らかであり，(vi)については，さきに定義した $y$, $y'$ について

$$\sum_{i=1}^{n}(y'_i-\mu)^2-\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2$$

$$=[(y_j-t-\mu)^2+(y_k+t-\mu)^2]-[(y_j-\mu)^2+(y_k-\mu)^2]$$

$$=2t((y_k-y_j)+t)$$

であることより知られる。また(i), (ii)を満たさないことは，

$y=(0, 0\cdots 0, n\mu)$

の時のCの値が $(n-1)/\sqrt{n}$ となることから明らかである。

これらの基準のすべてを満たすものの例の一つは，相加平均$\mu$と相乗平均$g$の差の$\mu$に対する比率

(ロ) $R=\frac{\mu-g}{\mu}$

によって与えられる。実際$R$が(i)(ii)を満たすことは，相加平均および相乗平均についての著名な性質であり(たとえば，ハーディ=リットルウッド=ポリア〔10〕，あるいは，ベッケンバッハ=ベルマン〔2〕を見よ)，その他の条件を満たすことは明らかである。

この指標の欠陥は，不平等度としての意味づけが必ずしも容易でないのと，$y$の成分のどれか一つをゼロに近づけると他の成分がどのような水準に固定されていても1に近い値を与えることである。

前掲の条件のすべてを満たす尺度の中で，不平等の指標としてよく知られたものにローレンツ曲線を用いて定義されたジニー係数がある。これについては経済厚生との関連で定義された指標のいくつかとともに以下にやや詳しい説明を与えることにしよう。また(前掲の条件の必ずしもすべてを満たすとは限らないが)，その他の所得の不平等度の指標(パレート係数，タイルのエントロピー尺度〔24〕)とその性質については，セン〔23〕およびチャンパーノン〔4〕などを参照されたい。

なお後述のようにジニー係数は

(vii) (凹性) $x$と$y$との平均が等しいなら，すべての $0<\alpha<1$ について

$$I_n((1-\alpha)x+\alpha y)\leqq(1-\alpha)I_n(x)+\alpha I_n(y)$$

を満たすことが示される。(iv)同次性の仮定の下では(vii)は明らかに

(viii) (劣加法性) $x$と$y$ との平均が等しいなら

$$I_n(x+y)\leqq I_n(x)+I_n(y)$$

と同値である。

なお (iii) と (vii) の下では $I_n$ は $S$－凹性を満たす(ベルジュ〔3〕220頁)ので (vi) の弱い方の条件を満たすことが知られる。

## 五 ジニー係数について

所得分配の不平等度の重要な尺度の一つにジニー係数がある。文献ではその定義はまちまちであるが，その代表的なものの一つにローレンツ曲線を用いる方法がある。いま個人$i$の所得を$y_i(i=1, \cdots, n)$とし，一般性を失うことなく

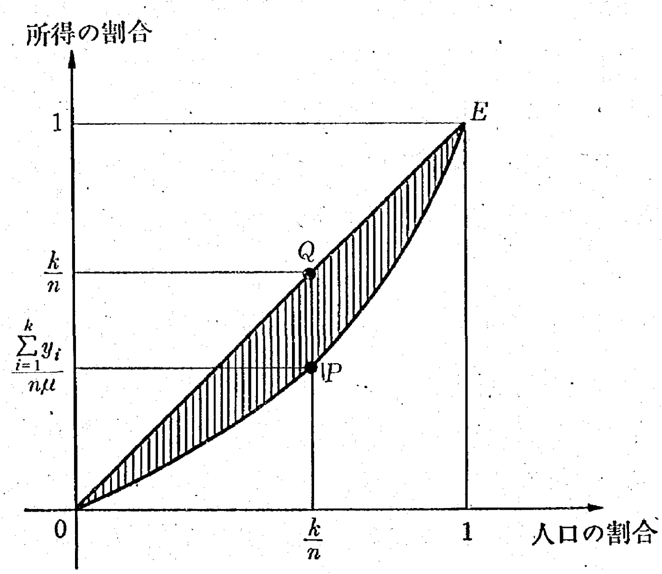
$$0\leqq y_1\leqq y_2\leqq\cdots\leqq y_n,\ y_n>0$$

と想定する。ローレンツ曲線とは，個人の所得を低い方から順にならべた時，第$k$ ($k=1, 2, \cdots,$

$n$）までの個人が人口において社会に占める割合 $k/n$ に所得において社会に占める割合

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i}{n\mu}$$

（$\mu$は所得の平均）を対応させたものである。ただし $k$ が整数でない場合には，その前後の整数の




第1図

時の点（1より小さな正の数の場合は原点と1の時の点）を結んで近似するものとする。第1図では簡単のためにその関係をなめらかな曲線として描いてある。

ローレンツ曲線は一般に $OPE$ で示されるように右上りで線分 $OE$ の下方にある曲線となる。また所得の割合が $\frac{k}{n}$ である点における曲線の（左方の）傾斜は，$y_k/\mu$であるから右にいくほど傾斜は大（ローレンツ曲線は下に凸）であり，その傾斜が1のところは平均所得を示すことがわかる。また容易に知られるように，すべての$y_i$ が等しい完全平等の場合には，ローレンツ曲線は$OE$に一致し，個人 $n$ がすべての所得を得ている完全不平等の場合には（$n$が十分大きい時には），0と座標（1, 0）の点および $OE$ を結ぶ線分によって近似される。後者の場合には斜線部の面積は $^1/_2$ と考えてよいから，その2倍すなわち

$G_1$=45°線とローレンツ曲線の間の面積の2倍

をもって不平等度を定義することは自然である。これがジニー係数とよばれるものである。

つぎにこれとは外見上異なるいくつかの不平等度の尺度を定義しよう。以下では $y_i(i=1, \cdots, n)$ は小さなものから順にならんでいるものと仮定し，$\mu$ で平均所得を示すものとする。

まず

$$G_2=\frac{1}{2n^2\mu}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i-y_j|,$$

はすべての二人の間の所得の差の絶対値 $|y_i-y_j|$ と平均所得の2倍との比の平均を示すものであり，しばしばジニー係数の定義として用いられることがある。つぎに

$$G_3=1-\frac{1}{n^2\mu}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\min\ (y_i,\ y_j)$$

はすべての二人の間の所得のうち，小さい値と平均所得との比の平均を1から引いたものである。また

$$G_4=\frac{1}{n^2\mu}[(ny_n+(n-1)y_{n-1}+\cdots+y_1)-(ny_1+(n-1)y_2+\cdots y_n)]$$
$$=\frac{1}{n^2\mu}[(n-1)y_n+(n-3)y_{n-1}+\cdots-(n-3)y_2-(n-1)y_1]$$

は，最大所得と最小所得の差 $y_n-y_1$ に $(n-1)$ つぎに差の大きい二組の所得の差 $y_{n-1}-y_2$ に $(n-3)$ という具合にウェイトをつけて加え，それと平均所得との比を用いて定義したものである。筆者はこの表現がこれまで文献に表われた例を知らないが，後に示すようにこれはジニー係数を与えるから数値計算にも便利である。これとやや類似した表現

$$G_5=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2\mu}[ny_1+(n-1)y_2+\cdots+y_n]$$

は以下に示すように $G_1$ と関係を知るのに都合がよい。

さて第1図の斜線の部分の面積が

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i}{n\mu}\right)$$

(のように各 $k$ について，横が $\frac{1}{n}$，高さが上式のかっこの中で示されるような $n$ 個の長方形の和) に等しいと見なせば ($n$ が十分大きく曲線がなめらか (積分可能) な場合には，誤差は事実上無視しうる大きさとなる)，さきの五つの不平等度の指標はすべて等しいことを証明することができる。

**定理3** $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$ はすべて等しい値を与える。したがって，このうちの任意の一つによってジニー係数を定義することができる。

**証明** $G_1=G_5=G_3=G_2$, $G_3=G_4$ を左の等式から順に示すことにする。

(i) $G_1=G_5$

$$G_1=2A$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{k}y_i}{n\mu}\right)$$
$$=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{2}{n^2\mu}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}y_i$$

$$=1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2\mu}[ny_1+(n-1)y_2+\cdots+y_n]$$

この右辺は，$G_5$ に等しい。

(ii)　$G_5=G_3$

$y$ の成分が小さな順にならんでいることから

$$\sum_{j=1}\sum_{i=1}\min(y_i,\ y_j)$$
$$=(2n-1)y_1+(2n-3)y_2+\cdots+y_n$$
$$=2[ny_1+(n-1)y_2+\cdots+y_n]-n\mu$$

である。したがって $G_3=G_5$ が成立することは明らかである

(iii)　$G_3=G_2$

$$|y_i-y_j|=(y_i+y_j)-2\min(y_i,\ y_j)$$

から容易に導かれる。

(iv)　$G_2=G_5$

(1)　の仮定より

$$n^2\mu-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(y_i,\ y_j)$$
$$=n(y_1+\cdots+y_n)-[(2n-1)y_1+(2n-3)y_2+\cdots+y_n]$$
$$=(n-1)y_n+(n-3)y_{n-1}+\cdots-(n-3)y_2-(n-1)y_1$$

である。この両辺を $n^2\mu$ で割ることによって，求める関係が導かれる。

（定理の証明終り）

$G_4$（あるいは $G_5$）より，ジニー係数がピグー＝ダルトンの基準（前節の(vi)）を満たすことは明らかである。またその他の基準（前節の(i)—(v)および(vii)(viii)）を満たすことは $G_2$ より明らかである。

## 六　不平等度と経済厚生

ジニー係数その他第四節で考察した不平等度の指標は，現実の経済厚生を適切に評価するように定義されたものではない。しかし特定の社会的厚生関数が与えられれば，それを反映するような(不)平等度の指標を考えることができる。

各人の所得の効用関数を $U$ で示すとき，

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}U(y_i)}{nU(\mu)}$$

は，ダルトンの所得平等度の指標（$1-D$ は不平等度の指標）として知られるもので，

$U>0,\ U'>0,\ U''<0$ の仮定の下では，

$$0 \leqq D \leqq 1$$

となることが容易に知られる。

ダルトンの尺度は効用指標についての正の線型交換によっても変化しうるという難点をもつが，その難点を回避したものにつぎに述べるアトキンソン［1］の尺度がある。

まず $y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ が与られたとき

$$U(y_e)=\frac{\sum_{i=1}^{n} U(y_i)}{n}$$

の意味で平均の満足を与える所得を $y_e$ とすれば，$U$ がさきと同じ仮定を満たす凹関数 である場合には

$$0 \leqq y_e \leqq \mu$$

となる。したがってアトキンソの尺度を

$$A=1-y_e/\mu$$

によって定義すれば

$$0 \leqq A \leqq 1$$

となることが知られる。

この指標の定義に用いられた「厚生関数」は各人の効用関数の和であったが，これを一般化して厚生関数を

$$W=W(y)$$

とし，$W$ が単調増加で擬凹かつ対称な関数であるとしても，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ が与えられたとき

$$W(y_e,\ \cdots,\ y_e)=W(y_1,\ \cdots,\ y_n)$$

によって $y_e$ を定義すると

$$0 \leqq y_e \leqq \mu$$

となる。これを用いて

$$S=1-y_e/\mu$$

としたのが，セン〔23〕の不平等尺度である。

このセン指標ときわめて密接な関係にあるが，必ずしも $W(y)$ の対称性を必要としない不平等度の指標を，ドブリュー〔7〕が資源の不効率度を測定するのに用いた考えにしたがって，つぎのように定義することができる。まず $y$ が与えられたとき

$$\sum_{i=1}^{n} y_i'=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

を満たす $y'$ の中で $W(y)$ を最大にするものの一つを $\hat{y}$ とする。そして

$$W(\hat{y})=W(ky)$$

によって $k$ を定義すると，最大値の定義から $k\geqq 1$ となるので

$$S^*=1-\frac{1}{k}$$

によって不平等度を定義することができる。この尺度が $\hat{y}$ の選び方から独立であることは，$k$ の定義式から明らかである。

$S^*$ がある意味で $S$ の一般化であることは，つぎの命題によって示されている。

**命題2**：$W$ が相似的（homothetic）つまり，すべての正の数 $\lambda$ と所得分配 $x$, $y$ について

$$W(\lambda x)\geqq W(\lambda y) \Longleftrightarrow W(x)\geqq W(y)$$

であり，しかも対称的な擬凹関数である場合には $S$ と $S^*$ とは等しい。

**証明**：$W$ が対称的擬凹関数の場合には $S^*$ の定義における $\hat{y}$ としては，$(\mu, \cdots, \mu)$ をとることができる。また $W$ が相似的であるならば

$$W(\mu, \cdots, \mu)=W(ky_1, \cdots, ky_n)$$

$$\Longleftrightarrow W\left(\frac{\mu}{k}, \cdots, \frac{\mu}{k}\right)=W(y_1, \cdots, y_n)$$

となり，これより $S$ の定義における $y_e$ は $\frac{\mu}{k}$ となることがわかる。したがって

$$S=1-\frac{1}{k}=S^*$$

である。

われわれの定義した $k$ の逆数（$=1-S^*$）は所得の平等度を示す指標と考えられる。$W$ が相似的である場合には，この $1/k$ は第四節の指標 $I_n(y)$ の条件の一つとして同次性を満たしており，$W$ が同次的でない場合にはその条件を満たさないことは明らかである。すなわち $1/k$ がその条件を満たす「良い」指標である場合には（そのような $W$ が採択された場合には）$S^*$ は $S$ に一致することになり，その意味で $S^*$ は $S$（および $A$）の自然な拡張であるとみなすことができるのである。

## 結　び

現実の所得分配の問題は，多くの複雑な側面をもっている。一口に平等主義といってもその内容が所得の分布の形や所得の不平等度のみによって適切に表現つくされない場合のあることはいうまでもない。賃金所得と利潤所得の区別はもとより，同じ賃金所得でも職種によって労働の質が異なるから，それらにしたがって平等な所得の分布の形が影響をうけることも明らかである。また労働

の質が均一であるとしても提供した労働の量（能力差）に応じてどの程度の所得の格差を与え，どの程度の満足を与えるのがよいかについてもさまざまな議論ができよう（これに関しては，サドカ〔20〕が一つの分析を行っている)。さらに期間ごとの変動や不確実性の存在を考慮すれば，所得を一つの数として把えることにも無理はともなう。またホックマン＝ロヂャース〔11〕の問題にした個人間に外部経済効果が作用する場合（利他的な効用関数の場合）も考慮の外におかれている。

本稿の分析は，この意味できわめて限られた範囲の問題についての一つの試論にすぎないといえるかも知れない。しかし，所得分配の平等とは何かという素朴で根源的な問題について，そしてその計測については，この段階においてもなお多くの（外見上あるいは本質的に）異なった立場が可能であり，それらの関連を理解することがあらゆる所得分配の公正の議論についての前提条件であるということが，われわれの立場からの一つの弁明である。より現実的な仮定の下で，本稿の議論がどのように発展させられるかについては，また別の機会に論ずるつもりである。

## 引用文献


〔1〕 Atkinson, A. B., "On the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory,* September, 1970 Vol. 2.

〔2〕 Beckenbach, E. F. and Bellman, R., *Inequality*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1965.

〔3〕 Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1963.

〔4〕 Champernowne, D., "A Comparison of Measures of Inequality of Income Distribution," *Economic Journal*, Vol. 84 December, 1974.

〔5〕 Dalton, H., "The Measurement of the Inequality of Incomes," *Economic Journal*, Vol. 30, 1920.

〔6〕 Dasgupta, P., Sen, A. K. and Starrett, D., "Notes on the Measurement of Inequality, "*Journal of Economic Theory*, Vol. 6 April, 1973.

〔7〕 Debreu, G., "The Coefficient of Resource Utilization," *Econometrica* Vol. 19 July, 1951.

〔8〕 Friedman, M., *Capitalism and Freedom* The University of Chicago Press, 1962.

〔9〕 Gini, C., *Variabilità e mutabilità* Bologna, 1912.

〔10〕 Hardy, G., Littlewood, J. and Polya, G., *Inequalities*. Cambridge U. Press, London 1934.

〔11〕 Hochmann, H. M. and J. D. Rodgers, "Pareto Optimal Redistribution," *American Economic Review* Vol. 59 September, 1969.

〔12〕 Karamata, J., *Sur une inégatité relative aux functions convexes*, Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade Vol. 1, 1932.

〔13〕 Lorenz, M. O., "Methods for Measuring Concentration of Wealth" *Journal of the American Statistical Association* Vol. 9, 1905.

〔14〕 Ostrowski, A., Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sen de I. Schur, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* Vol. 31, 1952.

〔15〕 Pareto, V., *Cours d'E'conomie Politique* Rouge, Lausanne, 1897.

〔16〕 Pigou, A. C., *The Economics of Welfare* Macmillan, London 1953. 気賀，千種，鈴木，福岡，大熊訳『ピグウ・厚生経済学』東洋経済新報社 1953.

〔17〕 Rawls, J., *A Theory of Justice*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1971.

〔18〕 Ricci, U., *L'indice di variabilita e la curve dei redditi*, Rome 1916.

〔19〕 Rothschild, M. and Stiglitz, J. E., "Some Further Results on the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory*, Vol. 6 April, 1973.

〔20〕 Sadka, E., "Social Welfare and Income Distribution," *Econometrica* Vol. 44, November, 1976.

〔21〕 Schur, I., Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendungen auf die Determinantentheorie. *Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*. 22, 1923.

〔22〕 Sen, A. K., *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day San-Francisco, 1970.

〔23〕 Sen, A. K., *On Economic Inequality* W. W. Norton & Company Inc. New York 1973.

〔24〕 Theil, H., *Economics and Information Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1967.

（経済学部助教授）