Title	存在問題の再考察
Sub Title	The existence theorem revisited
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.2 (1977. 4) ,p.127(1)- 137(11)
JaLC DOI	10.14991/001.19770401-0001
Abstract	
Notes	千種義人教授退任記念特集号 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770401-0001

存在問題の再考察

福岡正夫

1　競争均衡の存在定理は，すでにドブリューその他の学者の手によって標準的な形態が確立されており，当該の問題のみに限ってみるかぎり，ほとんど議論を加える余地はないように思われる。(1) しかし，その後に進展した安定理論や比較静学分析の成果とあわせて考えてみるとき，われわれはなおつぎに述べるようなひとつの問題が若干の解決を要求しているのに気がつくであろう。それは，ドブリュー式の存在証明が価格シンプレックスの全域を舞台として行われ，したがってたんに非負の均衡価格の存在を証明しているのに対して，安定分析や比較分析が立脚しているある種の仮定，たとえば粗代替性の仮定のごとき，は厳密に正の均衡価格を含意している，という事情から生じてくる。すなわち，もしドブリューの定理によって存在が保証された均衡価格がたまたまシンプレックスの内部にではなくその境界上にあったとすれば，上記の理由から存在の議論と安定の議論とのあいだにはすき間ができ，われわれはそのギャップに何らかの架橋をほどこす必要に迫られるのである。

事実この種の問題は，久我清氏や二階堂副包氏によってかなり早い時期に注目され，いずれの場合も粗代替財の事例ないしは「一般化」された粗代替財の事例について標準的な不動点定理には依拠しない別個の存在証明がそれぞれ独立に企図されたのであった。(2) そのさい開発されたいわゆるExtremization Method はそれ自体ははなはだ魅力に富む新考案であるが，ではそれによってオーソドックスな手法による正の均衡価格の存在証明が破産を宣告されたかといえばかならずしもそうではなく，後者もまた興味を誘う open question たることを失わない。われわれは本稿においてはこの残された問題をとりあげることにし，むしろ不動点定理を用いてどれだけ問題に肉薄できるかという見地から，その可能性を探索してみたいと思う。

注(1)　G. Debreu, *Theory of Value*, 1959, esp. Ch. 5. 福岡正夫「競争均衡の存在」,『経済学年報』第14巻, 1970.

(2)　K. Kuga, "Variation Patterns of Excess Demand with Respect to Prices: A Consistency Problem", *Economic Studies Quarterly*, Vol. 15, No. 1, 1964, ditto, "Weak Gross Substitutability and the Existence of Competitive Equilibrium", *Econometrica*, July 1965, H. Nikaido, "Generalized Gross Substitutability and Extremization", in M. Dresher, L. S. Shapley and A. W. Tucker, ed., *Advances in Game Theory*, 1964, ditto, *Convex Structure and Economic Theory*, 1968, §18. 2.

2　まずドブリュー式のアプローチを復習することから始めよう。いま各消費者 r $(r=1, 2, \cdots, m)$ についてその消費可能集合 X^r への需要関数 $\varphi^r(p, m^r)$ が定義できるような価格・所得 (p, m^r) の集合を $S^{r\prime}$ で，また各生産者 s $(s=1, 2, \cdots, l)$ についてその生産可能集合 Y^s への供給関数 $\psi^s(p)$ が定義できるような価格 p の集合を $T^{s\prime}$ で書くことにしよう。すると，各生産者の利潤関数 $\pi^s(p)$ はそれぞれ $T^{s\prime}$ を定義域とし，したがって消費者の所得 $m^r=p\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}\pi^s(p)$（ここで $\bar{x}^r$ は初期保有量ベクトル，θ_{rs} は生産者 s からの利潤配当率）は $\bigcap_{s=1}^{l}T^{s\prime}$ を定義域とする p の関数となるわけであるから，$C^r\equiv\{p\mid p\in\bigcap_{s=1}^{l}T^{s\prime},\ (p, m^r(p))\in S^{r\prime}\}$ と定義すれば，消費者の需要関数 $\varphi^r(p, p\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}\pi^s(p))$ は C^r を定義域とする p のみの関数 $\hat{\varphi}^r(p)$ となる。そこでさらに $C\equiv\bigcap_{r=1}^{m}C^r$ と定義することによって，すべての消費者・生産者の需要関数・供給関数 $\hat{\varphi}^r(p)$，$\psi^s(p)$ が C から X^r, Y^s への関数として定義され，よって社会的な超過需要関数 $E(p)\equiv\sum_{r=1}^{m}\hat{\varphi}^r(p)-\sum_{s=1}^{l}\psi^s(p)-\{\bar{x}\}$ が同じく C から $Z\equiv\sum_{r=1}^{m}X^r-\sum_{s=1}^{l}Y^s-\{\bar{x}\}$ への関数として定義されることになる。ここで $\bar{x}$ が各消費者の初期保有量の総和をあらわしていることはいうまでもない。

さてこの段階で種々の仮定が活躍し始めることになるが，まずいわゆる欲望非飽和(non-satiation)の仮定と無料処分 (free disposal) の仮定から $p\geq0$ となり，また $\hat{\varphi}^r(p)$, $\psi^s(p)$ の p に関するゼロ次同次性によって p の規準化が可能となるところから，$p\in C$ の p についてはすべて閉半直線 $(0, p)$ が価格シンプレックス $P\equiv\{p\mid p\geq0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\}$ と交わる点のみを $n-1$ 次元の超平面上でとりあげていけばよいことになる。しかしこれは $\hat{\varphi}^r(p)$, $\psi^s(p)$ ならびに $E(p)$ を $C\cap P$ からそれぞれ X^r, Y^s および Z への関数と考えるということであって，$C\cap P$ を P そのものとすることはまだ許されない。というのは，たとえば p_i が0になるとき財 i の消費需要が $+\infty$ に漸近するとすれば，その財については需要関数が定義できないし，また生産の場合には $p>0$ であってさえ供給関数が定義できないことがありうるからである。そこでドブリューはしかるべき仮定（なかんずく消費可能集合の下への有界性と，生産の非可逆性ならびに「無何有郷」の不可能性）の下で，実現可能な X^r, Y^s すなわち $\hat{X}^r$, $\hat{Y}^s$ が有界となることを証明し，$\hat{X}^r$, $\hat{Y}^s$ をそれぞれ内部に含む超立方体 K について $\tilde{X}^r\equiv\hat{X}\cap K$, $\tilde{Y}^s\equiv\hat{Y}^s\cap K$ と定義することによって，これらコンパクトな $\tilde{X}^r$, $\tilde{Y}^s$ への需給関数 $\tilde{\varphi}^r(p)$, $\tilde{\psi}^s(p)$ を考えたのであった。

このような工夫を講ずれば，C に限定されないどんな $p\in P$ に対しても $\tilde{\psi}^s(p)$ が定まり，したがって $\tilde{\pi}^s(p)$ が定まって，$0\in Y^s$ の仮定の下では $\tilde{\pi}^s(p)\geqq0$, また $\bar{x}^r\in\operatorname{int}X^r$ の仮定から $p\dot{x}^r<p\bar{x}^r\leqq p\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}\tilde{\pi}^s(p)$ のような $\dot{x}^r$ が $\tilde{X}^r$ に含まれることになって，上と同様すべての $p\in P$ に対して $\tilde{\varphi}^r(p)$ が定義される。よって $\tilde{X}^r$, $\tilde{Y}^s$ への関数 $\tilde{\varphi}^r(p)$, $\tilde{\psi}^s(p)$ を考えるかぎり，それらの定義域は $C\cap P$ から P そのものに拡張される。そこで P と $\tilde{Z}\equiv\sum_{r=1}^{m}\tilde{X}^r-\sum_{s=1}^{l}\tilde{Y}^s-\{\bar{x}\}$ との直積集合 $P\times\tilde{Z}$ からそれ自体への写像を構成し，その不動点として均衡点が存在することを証明したのち，それが $\tilde{X}^r$, $\tilde{Y}^s$ をもとの X^r, Y^s に戻した場合にも均衡点たりつづけることを示す，というのがド

ブリューの存在証明の趣旨であった。

上記の推論はきわめて巧妙につくられていて，コンパクトな $\tilde{X}^r$, $\tilde{Y}^s$ への限定は，すべての $p\in P$ について $\tilde{\varphi}^r(p)$, $\tilde{\psi}^s(p)$ を定義する目的以外にも，なおつぎのような一石三鳥の狙いに叶っていたと解することができよう。

(1) X^r を $\tilde{X}^r$ に限定することによって，購入可能集合のコンパクト性が保証される。X^r のままでは，ある p_i が 0 になると購入可能集合の有界性が失われ，したがって最大値定理を用いて需要関数の上部半連続性を導くことができなくなる。

(2) $\tilde{\varphi}^r(p)$ のコンパクト性がいえないと，$E(p)$ が $\tilde{Z}$ のなかで閉集合となることを主張することができない。

(3) $\tilde{X}^r$, $\tilde{Y}^s$ がコンパクトであれば，当然 $\tilde{Z}$ がコンパクトとなって，角谷の不動点定理の場となる $P\times\tilde{Z}$ のコンパクト性が用意される。

ところが前節でも述べたごとく，粗代替性のような仮定が課せられるやいなや，ドブリューのアプローチにはつぎの点で不都合が生じてくる。すなわち粗代替性の仮定は厳密に正の均衡価格を必要とするが，上記の手法は均衡価格がゼロの成分を含む可能性を排除しえず，したがって均衡価格がシンプレックスの境界上にくる場合には，矛盾が生ぜざるをえない。そこでこの矛盾を解消するために，以下に掲げるいわゆる「境界条件」("boundary condition")を課し，均衡価格を正ならしめようとすれば，こんどは $\hat{X}^r$ を超立方体 K にはめ込む議論と矛盾を来たさざるをえなくなる。

われわれは以下本稿では，この困難をつぎの基本方針で克服することにしたいと思う。

（I）価格シンプレックス P の内点の集合を

$$P^0\equiv\{p\,|\,p>0,\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1\}$$

と記し，P の境界 $P\setminus P^0$ はすべて $\hat{\varphi}^r(p)$, $\psi^s(p)$ の定義域からは除いて考える。すなわち $\hat{\varphi}^r(p)$, $\psi^s(p)$ は P^0 の上でのみ考えていくことにする。

（II）P の境界上では境界条件として

（B） $P\setminus P^0$ 上の任意の一点 p^0 に収束するどんな点列 $\{p^\nu\}$ についても，各 $\hat{\varphi}^r(p^\nu)$ から任意に $x^{r\nu}$ を選んで点列 $\{x^{r\nu}\}$ をつくれば

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i^{r\nu}=+\infty$$

を仮定する。(3)

これらの構想の下で，$\hat{X}^r$, $\hat{Y}^s$ を K に含ましめる議論にはいっさい頼らず，厳密に正の均衡価格

注(3) このような境界条件の意義については H. Nikaido, *Convex Structure and Economic Theory*, 1968, pp. 323-324, K. J. Arrow and F. Hahn, *General Competitive Analysis*, 1971, pp. 29-30, および福岡正夫「市場均衡の安定性 I」,『三田学会雑誌』, 1973年2・3月号, pp. 14-15参照。

の存在を証明するというのが，次節以下のわれわれのプログラムである。

3　はじめに需要関数 $\hat{\varphi}^r(p)$ がどの $p \in C \cap P^0$ に対しても定義され，コンパクト値かつ上部半連続となることを示しておこう。

補助定理1　X^r が閉かつ下に有界であれば，$\hat{\varphi}^r(p)$ はどんな $p \in C \cap P^0$ に対しても，かならず非空，コンパクト値かつ上部半連続となる。

証明

まず購入可能集合を定める関数 $\gamma^r(p) \equiv \{x^r \mid px^r \leqq p\bar{x}^r + \sum_{s=1}^{l} \theta_{rs}\, \pi^s(p)\}$ が，すべての $p \in C \cap P^0$ に対してコンパクト値となることを示す。定義からすべての s について $p \in T^{s\prime}$ であるから，不等式 $px^r \leqq p\bar{x}^r + \sum_{s=1}^{l} \theta_{rs}\, \pi^s(p)$ の右辺は有限で一定である。そこで x^r を非負の成分のみから成るベクトル x_+^r と負の成分のみから成るベクトル x_-^r の二つの部分に分ち，p もまたそれに応じて p_+ と p_- に分割して，左辺の負の項はすべて右辺に移すとすれば，

$$p_+ \, x_+^r \leqq \text{constant} + |p_- \, x_-^r|$$

を得る。ところが X^r が下に有界という仮定から，ある b^r について $x^r \geqq b^r$ となるから，$|p_- \, x_-^r| \leqq |p_- \, b_-^r|$ となって，結局 $p_+ \, x_+^r$ は上から制約されることが知られ，$p > 0$ であることを考慮して，x_+^r は上に有界となることが分る。よって x^r は上にも下にも有界であり，したがって $\gamma^r(p)$ は当然有界。また $\gamma^r(p)$ が閉であることは自明である。

こうして購入可能集合 $\gamma^r(p)$ がコンパクトとなれば，選好の連続性から $\gamma^r(p)$ にはかならず最大元があり，かつそれが閉集合をなすことは明らかである。(4) よって $\hat{\varphi}^r(p)$ はコンパクト値となる。

つぎに $\bar{x}^r \in \text{int}\ X^r$ の仮定によっていわゆるアローの反例が除かれるかぎり，$\gamma^r(p)$ の連続性が導かれることは，すでにドブリューによって証明されているとおりである。(5) そこで著名な最大値定理が使えて $\hat{\varphi}^r(p)$ は上部半連続となる。(6)

以上の帰結を考慮すれば，その目的のために $\hat{X}^r$ を K にはめ込む議論は不要となり，$C \cap P^0$ を P^0 に拡張してよいかに見えるが，実はそれが許されるためにはさらにもう一つのステップが必要である。

それは C したがって $T^{s\prime}$ のなかに含まれる p でなければ利潤関数 $\pi^s(p)$ が有限値に確定すると

注(4)　その証明については，たとえば W. Hildenbrand and A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis*, 1976, p. 43 参照。

(5)　Debreu, *Theory of Value*, pp. 63-65, Theorem (1) 参照。

(6)　最大値定理については W. Hildenbrand, *Core and Equilibrium of a Large Economy*, 1974, pp. 29-30, Theorem 3 および Corollary 参照。

はかぎらず，したがって購入可能集合 $\Gamma^r(p)$ が定義されるとはかぎらないという一点である。そこでこの点を解決するためには，生産可能集合 Y^s に何らかの仮定を課し，P^0 に含まれるすべての p に対して利潤が確定するような方便を講ずるのでなくてはならない。

実は $C\cap P^0$ に含まれる p についてさえ，$\phi^s(p)$ と $\pi^s(p)$ は定義されるものの，$\phi^s(p)$ がコンパクト値になる保証は何ら存在していないのである。

われわれはこれらの点を，端的につぎのきわめて簡単な仮定によって処理してしまおうと思う。

（U）生産可能集合は上に有界

この仮定は規模に関する収穫不変性さえ除いてしまう点できわめて強い仮定といわざるをえないが，解釈のいかんによっては自然であるとも考えられる。なぜなら一期間あたりの生産で無限の産出を行うことは到底可能とは考えられないからである。

ひとたび上記の仮定を課すれば，供給関数 $\phi^s(p)$ がどの $p\in P^0$ に対しても定義され，かつコンパクト値となることはほとんど自明であるが，念のためその上部半連続性の導出をもかねてつぎにその証明を与えておくことにしよう。

補助定理 2　Y^s が閉かつ上に有界であれば，$\phi^s(p)$ はどんな $p\in P^0$ に対してもかならず非空，コンパクト値かつ上部半連続となる。

証明

ある $p\in P^0$ について $\phi^s(p)$ が定義されないとすれば，矛盾が起こることをまず示す。

事実いまある $p\in P^0$ について，どんな $y^s\in Y^s$ を選んでも $py^{s\prime}>py^s$ となるような $y^{s\prime}$ が Y^s のなかにあったと仮定してみよう。Y^s は閉で上に有界であるから，それはかならずどの $y^s\in Y^s$ についても $y^s\leqq\bar{y}^s$ となるような $\bar{y}^s$ をみずからのうちに含んでいる。そこでこの $\bar{y}^s$ を用いて上記の y^s をつぎのような $\tilde{y}^s$ に特定化することにし，ここで $\tilde{y}^s$ の非負の成分についてはそれらはすべて $\bar{y}^s$ の非負成分にひとしく，また負の成分については上記の非負成分とともに生産可能性を満たす y^s のうちそれぞれ絶対値において最小なものを選ぶとする。これを分りやすいように $y_+{}^s$, $y_-{}^s$ にまとめて書けば，

$$\tilde{y}_+{}^s=\bar{y}_+{}^s$$

$$\tilde{y}_-{}^s\geqq y_-{}^s \text{ for all } y_-{}^s \text{ such that } (\tilde{y}_+{}^s,\ y_-{}^s)\in Y^s$$

のようである。すると Y^s が閉であるところから，かならず

$$\tilde{y}^s\in Y^s$$

となるが，そのような $\tilde{y}^s$ について利潤を計算してみると，つくり方から明らかに

$$py^{s\prime}>p\tilde{y}^s$$

を満たすような $y^{s\prime}$ は Y^s のなかには存在しない。これはもちろん不合理であり，よって $\psi^s(p)$ がすべての $p\in P^0$ について定義されるのでなくてはならない。

つぎは $\psi^s(p)$ の有界性であるが，それは仮定（U）により上に有界であるから，下に有界となることを示しさえすればよい。

いま $\psi^s(p)$ のなかから任意の一点 y^s を選んで，それをふたたび非負の成分と負の成分の二部分に分割する。もし $\psi^s(p)$ が下に有界でないとすれば，そのなかから点列 $\{y^{s\nu}\}$ を選んで $\{y_-^{s\nu}\}$ が $-\infty$ に向う成分をもつようにすることができる。すると p は厳密に正であるから，$p_+y_+^{s\nu}\leqq p_+\bar{y}_+^{s\nu}$，$p_-y_-^{s\nu}\to-\infty$ で，結局 $py^{s\nu}\to-\infty$ となり，これは $py^{s\nu}$ が有界の一定値という事実に牴触せざるをえない。

利潤関数 py^s は線型したがって連続であるから，$\psi^s(p)$ が閉となることは明白である。

最後に $\psi^s(p)$ の上部半連続性をいうためには，P^0 から点列 $\{p^\nu\}$ を選んで点 p^0 に収束させたとき，$\psi^s(p^\nu)$ から任意に $y^{s\nu}$ を選んでつくった $\{y^{s\nu}\}$ について適当な部分列が選べて，それが $\psi^s(p^0)$ のある点に収束することが示されればよい。(7) 事実 $\{y^{s\nu}\}$ は明らかに有界点列であるから，収束する部分列がとれ，したがって便宜上それを $\{y^{s\nu}\}$ として，その極限を y^{s0} とすれば，この y^{s0} がかならず $\psi^s(p^0)$ の元となることがいえる。すなわちいまかりにそうでないとすれば，ある $y^s\in Y^s$ について $p^0y^s>p^0y^{s0}$ となるから，十分に大きな ν については $p^\nu y^s>p^\nu y^{s\nu}$ となり，他方 $y^{s\nu}$ は $\psi^s(p^\nu)$ の最大元であるから，これは矛盾である。

4　前節までのところで $\hat{\varphi}^r(p)$ および $\psi^s(p)$ が P^0 のすべての点について定義され，かつコンパクト値となること，そして P^0 から X^r，Y^s へのその写像がそれぞれ上部半連続となることが確立された。加えてそれらが凸値となることも，X^r，Y^s の凸性と選好の凸性が仮定されれば，通常の議論とまったく同様に導かれるから，あえて立入るには及ばないであろう。そしていうまでもなくこれらの性質は $E(p)$ についてもそのまま成立し，したがってあとは Z をコンパクトにする工夫さえ除けば，角谷の不動点定理を適用するための条件がことごとく出揃ったと考えてよいわけである。

そこで Z をコンパクトにする考案であるが，それについてはさいきんグランドモンが「貨幣経済の短期均衡」について採用した手法をいささか修正して準用するのがもっとも便利である。(8)

まず P^0 の非空，コンパクト，凸の部分集合列 $\{P^\nu\}$ をとって，それらは非減少すなわち

$$P^1\subset P^2\subset\cdots\cdots\subset P^\nu\subset\cdots\cdots$$

注(7)　Hildenbrand, *op. cit.*, pp. 24-25, Theorem 1 参照。

(8)　Jean-Michel Grandmont, "On the Short-Run Equilibrium in a Monetary Economy", in J. H. Drèze ed., *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality*, 1974, pp. 225-226, Appendix, Theorem 1. また Hildenbrand and Kirman, *op. cit.*, pp. 162-164 をも参照せよ。

で，かつ

$$P^0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P^\nu$$

であるとする。以下ではこれらの P^ν の上でそれぞれ超過需要関数 $E(p)$ を考えるわけであるが，そのつくり方から $P^\nu \subset P^0$ であるから，いうまでもなく $E(p)$ の諸性質はそれらについてはすべて満たされている。こうして，像が写されるZについては，$E(p)$ が P^ν 上でコンパクト値であり，かつその写像が上部半連続であること，また P^ν がコンパクト集合であることから，$E(P^\nu)$ がコンパクト集合となるから，[9] これをコンパクトかつ凸の集合のなかに含ましめて，後者を Z^ν とすればよい。[10]

すると $M(z)$ を，所与の $z \in Z^\nu$ に対して p^z を最大にする P^ν の元の集合と定義することによって，$Q(p, z) = M(z) \times E(p)$ による $P^\nu \times Z^\nu$ からそれ自体への写像を構成することができ，ここでQは角谷の不動点定理の条件をことごとく満たしていることが分る。よってこの写像には不動点 $(p^\nu, z^\nu) \in Q(p^\nu, z^\nu)$ が存在し，したがって $p^\nu \in M(z^\nu)$, $z^\nu \in E(p^\nu)$ が成立する。

ところが $p^\nu \in M(z^\nu)$ は，定義からすべての $p \in P^\nu$ について $pz^\nu \leqq p^\nu z^\nu$ となることを意味し，他方 $z^\nu \in E(p^\nu)$ は弱いワルラス法則 $p^\nu z^\nu \leqq 0$ が満たされることを意味するから，結局以上の議論からわれわれは

(1)　すべての $p \in P^\nu$ について $pz^\nu \leqq 0$

という帰結を得たことになる。[11]

さてここでνを大きくするときに，列$\{p^\nu, z^\nu\}$が有界となることを示しておこう。まず$\{z^\nu\}$については，$\{z^\nu\} \in Z$ であるから，それは仮定から明らかに下に有界である。またその上への有界性も，つぎのような推論をつうじてただちに明らかとなる。事実いまpとしてn個の成分がすべて $1/n$ にひとしいベクトルを考えれば，$p \in P^0 \subset P$ であるが，つくり方から $\{P^\nu\}$ は非減少列で，しかも $P^0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P^\nu$ であるから，十分大きなすべてのνについては $p \in P^\nu$ となり，したがって前記の結果から$pz^\nu \leqq 0$となる。そこで，もしz^ν が$+\infty$になる成分を含むとすれば，ほかにかならず$-\infty$になる成分をも含むのでなくてはならず，これは上記の下への有界性と矛盾する。

$\{p^\nu\}$ の有界性は P^ν のつくり方から明らかである。

こうして$\{p^\nu, z^\nu\}$は有界点列であることが明らかになったから，われわれはそれから収束する部分列を選ぶことができ，したがって一般性を失うことなく$\{p^\nu, z^\nu\}$そのものを当該の部分列として

注(9)　この定理については，たとえば Hildenbrand, *op. cit.*, p. 24 の Proposition 3 参照。なおベルジュも同じ定理を証明しているが，E がコンパクト値という条件が脱落しているので，要注意。

(10)　$E(p)$ は凸であるが，$E(P^\nu)$ は凸になるとはかぎらないことに注意すべきである。Z^ν のもっとも簡単なつくり方としては $E(P^\nu)$ の凸包をとればよい。

(11)　これらの議論については G. Debreu, "Market Equilibrium" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, Vol. XLII, 1956, p. 877 参照。

(2) $\lim_{\nu\to\infty} z^\nu = z^*$, $\lim_{\nu\to\infty} p^\nu = p^*$

と書くことができる。

以下ではこの (p^*, z^*) が均衡点となることを示すことにしよう。まず P（境界を含む）を考えて，それから任意に一点 p をとれば，その p について $\lim_{\nu\to\infty} \pi^\nu = p$ で，しかも $\pi^\nu \in P^\nu$ となるような点列 $\{\pi^\nu\}$ が存在する。事実，当該の p を中心として任意の ε 近傍を選べば，P は P^0 の閉包であるから，この ε 近傍にはかならず P^0 の点 p' が含まれる。そして P^0 は $P^0 \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} P^\nu$ の条件を満たすから，かならず $p' \in P^0$ に収束するような点列 $\{\pi^{\nu\prime}\}$ があり，$\pi^{\nu\prime} \in P^0$ とすることができる。ところが ε のとり方は任意であったから，$\varepsilon \to 0$ として上の命題が成立する。

すると前の議論から $\pi^\nu z^\nu \leqq 0$ となるから，極限においても

(3) $pz^* \leqq 0$

となり，ここで p としては P からどんな p を選んでもよかったのであるから，順次に単位ベクトルを選ぶことによって

(4) $z^* \leqq 0$

を得る。

つぎに p^* がかならず P^0 に含まれることを示すことにしよう。いま $p^* \in P \diagdown P^0$ であったとすれば，境界条件(B)から $z \in E(p^*)$ については

(5) $\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{n} z_i^\nu = +\infty$

となる。ところが z^* はつくり方からこれらの z^ν の極限点であったから，(5)は不合理である。なぜなら(4)と下への有界性とを考えあわせれば，z^* はいずれの方向にも有界とならねばならないからである。よって p^* はかならず P の内点となっているのでなくてはならない。

最後に p^* が均衡価格であることは，$p^* = \lim_{\nu\to\infty} p^\nu$, $z^* = \lim_{\nu\to\infty} z^\nu$, $z^\nu \in E(p^\nu)$ で，かつ E のグラフが $P^0 \times Z$ のなかで閉じていることから，

(6) $z^* \in E(p^*)$

となることによって明らかであろう。

5 以上のところで，われわれはつぎの存在定理を確立したことになる。

定理 通常の仮定

X^r は閉かつ凸で，下に有界

すべての $x^{r\prime} \in X^r$ に対して $\{x^r \in X^r \mid x^{r\prime} R^r x^r\}$ および $\{x^r \in X^r \mid x^r R^r x^{r\prime}\}$ は閉集合

X^r は飽和点をもたない

$x^r P^r x^{r\prime}$ なら $\alpha x^r + (1-\alpha) x^{r\prime} P^r x^{r\prime}$, $0<\alpha<1$

$\bar{x}^r \in \operatorname{int} X^r$

Y^s は閉かつ凸で，$0 \in Y^s$

$Y \cap (-Y) = \{0\}$，$(Y \equiv \sum_{s=1}^{l} Y^s)$

$Y \supset (-\Omega)$（Ωは非負象限）

にさらに加えて

(B) $P \setminus P^0$ の点に収束するどんな点列$\{p^\nu\}$についても，各 $\hat{\varphi}^r(p^\nu)$ から任意に $x^{r\nu}$ を選んで点列 $\{x^{r\nu}\}$ をつくれば

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^{r\nu} = +\infty$$

(U) Y^s は上に有界

を仮定するならば，厳密に正の均衡価格をもつ競争均衡点が存在する。

この定理の証明が前節で立脚した（p^ν, z^ν）の存在定理は，基本的にドブリューのつぎの定理[12]

TをR^Nにおいて0の頂点をもつ閉凸錐とし（ただしTは線型部分空間ではないものとする），Γをその極錐とするとき，$T \cap P$ からZへの写像 $E(p)$ が

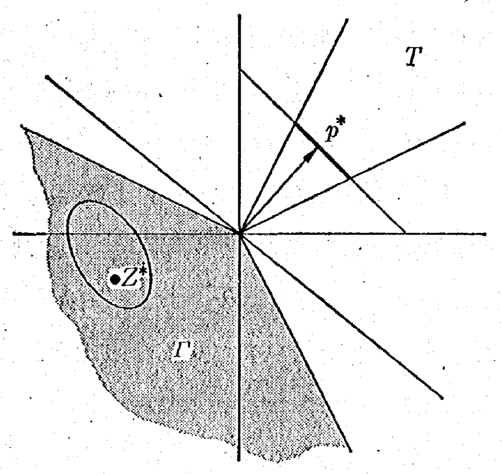
(i) 非空，コンパクトかつ凸の像をもつ

(ii) 上部半連続

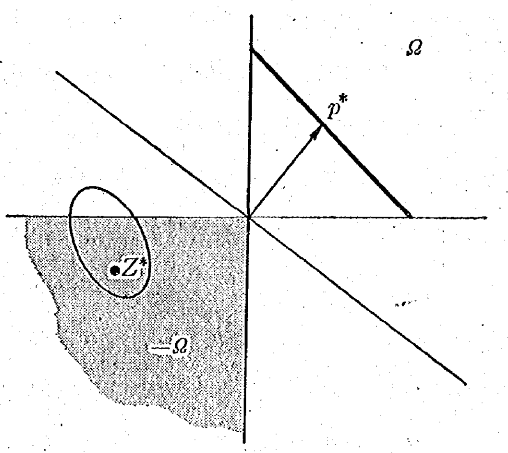
(iii) $z \in E(p)$ のようなすべての z について $pz \leqq 0$

の三条件を満たすとすれば，かならず $\Gamma \cap E(p^*) \neq \emptyset$となるような $p^* \in T \cap P$ が存在する

に負うものであるが，ドブリューのこの定理は，よく知られたゲール＝二階堂の定理を一般化したものであり，後者は前者のTをΩに，したがってΓを$-\Omega$に特殊化したものにほかならない。これを分りやすく2次元の場合について図示したものが第1図，第2図であるが，要するに前節でのド



第1図　ドブリュー



第2図　ゲール＝二階堂

注(12)　Debreu, *op. cit.*, p. 877, Theorem.

ブリュー＝グランドモン流の証明の骨子は，ここでTを $T^1\subset T^2\subset\cdots\cdots\subset T^\nu\subset\cdots\cdots$と拡大していき，それに応じて$\Gamma$を$\Gamma^1\supset\Gamma^2\supset\cdots\cdots\supset\Gamma^\nu\supset\cdots\cdots$と縮小していって，その極限において後者を非正の象限に限定する手続きのうちに見出されるのである。このような手続きに対応して，価格調節関数としては所与の $z\in Z^\nu$ の下で p^z を最大化するタイプのものが採用されるが，他方同じ目的にしばしば用いられる $p_i+\max\ (kz_i,\ 0)\ /\ \sum_{j=1}^{n}[p_j+\max\ (kz_j,\ 0)]$ タイプのものは，写される p を P^ν に含ましめるとはかぎらないことから，このさいは使用できないことに注意すべきであろう。

6　最後に選好の単調性の仮定をつけ加えれば，境界条件(B)そのものが帰結として導かれることを示しておこう。[(13)]

いま $P\setminus P^0$ 上の一点 p^0 に収束する点列 $\{p^\nu\}$ に対し各 $\hat{\varphi}^r(p^\nu)$ から選んでつくられる点列$\{x^{r\nu}\}$のなかに，無限大に発散しないものがあったとしてみよう。すると，それを同じく$\{x^{r\nu}\}$と記すことによって，十分大きなコンパクト集合Bをとれば，当該の$\{x^{r\nu}\}$をBのなかに含ましめることが可能となろう。ゆえに$\{x^{r\nu}\}$は収束する部分列をもち，後者を便宜上やはり$\{x^{r\nu}\}$と書くことによって，$\lim_{\nu\to\infty}\{x^{r\nu}\}=x^{r0}$とすることができる。そのとき，もし $x^{r0}\in\hat{\varphi}^r(p^0)$ となっているとすれば，不合理が生じるから，明らかに証明は終了する。なぜなら選好の単調性の仮定の下では，もしある p_i^0 がゼロとなれば $\hat{\varphi}_i^r(p^0)$ は存在しえず，したがって $\hat{\varphi}^r(p^0)$ は空集合とならざるをえないからである。

ゆえにあと議論が残るのは，$x^{r0}\in\hat{\varphi}^r(p^0)$ となることの証明のみであり，これを示すには，$\gamma^r(p^0)$ から任意の x^r を選んだときに $u^r(x^{r0})\geqq u^r(x^r)$ となることを示しさえすればよいわけである。そこでいま $m^{r0}=p^0\bar{x}^r+\Sigma_s\theta_{rs}\pi^s(p^0)$ と定義して，$p^0x^r<m^{r0}$ の場合と $p^0x^r=m^{r0}$ の場合とを分けて考察する。まず $p^0x^r<m^{r0}$ の場合には，十分大きなνについては $p^\nu x^r<m^{r\nu}$ が成立つから，そのようなνについては $x^r\in\gamma^r(p^\nu)$ とならねばならないが，他方定義から $x^{r\nu}$ は $\gamma^r(p^\nu)$ の最大元であるから $u^r(x^{r\nu})\geqq u^r(x^\nu)$。ゆえに選好の連続性によって $u^r(x^{r0})\geqq u^r(x^r)$ となる。つぎに $p^0x^r=m^{r0}$ の場合については，$\bar{x}^r\in\operatorname{int}X^r$ の仮定から $p^0\bar{x}^r<m^{r0}$ となるような $\bar{x}^r$ を X^rのなかからとることができるから，当該の x^r とこの $\bar{x}^r$ との凸結合を $x_a^r=\alpha x^r+(1-\alpha)\bar{x}^r,\ 0<\alpha<1$ とし，αを1に近づけることによって，$p^0x_a^r<m^{r0}$ を満たしつつ x^r に収束する点列 $\{x_a^r\}$をつくることができる。ゆえに十分大きなνについては $p^\nu x_a^r<m^{r\nu}$ すなわち $x_a^r\in\gamma^r(p^\nu)$ となり，定義からどのαについても $u^r(x^{r\nu})\geqq u^r(x_a^r)$ となる。そこでνとαについて極限をとれば，ふたたび選好の連続性の仮定から $u^r(x^{r0})\geqq u^r(x^r)$ となるのでなくてはならない。

よっていずれの場合も $x^{r0}\in\hat{\varphi}^r(p^0)$ が成立ったことになり，証明は完了する。

注(13)　Hildenbrand and Kirman, *op. cit.*, pp. 151–152.

なお粗代替性を結果としてもたらす事例としては，従来コブ=ダグラス型の効用関数の事例が知られているが，その場合に境界条件が成立つことは，当該の事例が選好の単調性の事例のスペシャル・ケースに当たっているところからただちに理解されるであろう。

（経済学部教授）