Title	Convex analysisの二, 三の進展について
Sub Title	On some convexity theorems
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.1 (1977. 2) ,p.97- 119
JaLC DOI	10.14991/001.19770201-0097
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770201-0097

Convex Analysis の二, 三の進展について

丸 山 徹

序

凸集合に関する解析学的な諸成果のうち，とりわけ最近の経済分析に深くかかわりのあるものに焦点を絞って，これに解説と展望を与えることにしたい。そこで，以下の議論を大きくふたつに分け，まず第一の部分では線形位相空間の非空・コンパクト・凸集合から成る族を，他の線形空間に埋め込む問題をとりあげる。もしこの埋め込みが可能であるならば，非空・コンパクト・凸集合はある線形空間の点（つまりベクトル）とみなすことができるわけで，たとえば，非空・コンパクト・凸集合値の函数はベクトル値の一価函数として扱うことが許されるであろう。つぎに第二の部分では，既に数理経済学の進展途上で顕著な役割を果してきた Carathéodory の定理，Shapley-Folkman の定理，そして Ljapunov の凸性定理を論ずる。これらは一見散発的に見えるかもしれないが，実はひとつの基本原理から比較的容易な推論を通じて導出され，数学的には共通の理論構造を有するものと言うことができるのである。この基本原理と称するものはここで新しく得られた結果で，おそらくさらに多くの応用がありうるものと思われる。

本稿でとりあげられる諸定理が実際にどのように用いられるかについては，紙数の制約によって詳しく論ずることができないが，とりあえず，Debreu〔5〕, Hildenbrand〔10〕などを参照していただきたい。(1)

I

既に述べたごとく，本節では，線形位相空間における非空・コンパクト・凸集合の族を，いまひとつの線形空間の中に埋め込む問題を考察する。この主題に関する研究は，古くはBrunn〔4〕に

注(1) 本稿の一部は Keio Economic Research Project の研究会（1976年6月10日）で報告され，また火曜会セミナーではすべての内容を講義することができた。これらの機会にご意見を寄せられた諸氏に感謝したい。さらに，南雲道夫教授，G. Debreu 教授，W. Arveson 教授との討論にも，いくつかの点で負うところが大きい。

までさかのぼるように思われるが，完全な肯定的解決はスウェーデンの数学者 Rådström〔17〕によって与えられた。Artstein〔2〕，Debreu〔5〕による集合値函数の積分論は，この成果に立脚するひとつの重要な業績と言わねばならない。

以下，本稿において考察の対象となる線形空間はすべて実線形空間である。

Vを実線形空間，AおよびBをVの非空・凸部分集合，αを実数とすれば，

$$A+B,\quad \alpha A$$

はいずれも凸集合になる。ここで

$$A+B=\{x+y / x\in A,\ y\in B\}$$

$$\alpha A=\{\alpha x / x\in A\}$$

を意味することは言うまでもない。便宜上，Vのすべての非空・凸集合の族を $Conv\ V$と書けば，加法演算"＋"は，

$$+ : Conv V \times Conv V \longrightarrow Conv V$$

なる形式を満たし，またスカラー（実数）の乗法演算"・"は，

$$\cdot : \mathbf{R} \times Conv V \longrightarrow Conv V$$

なる形式を満たしているわけである。これらの代数演算について，次のような法則が成立することは容易に確かめることができるであろう。

1° $(A+B)+C=A+(B+C)$ （結合法則）

2° $A+B=B+A$ （交換法則）

3° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ （第1分配法則）

4° $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

5° $1\cdot A=A$

ここで，

$$A,\ B,\ C\in Conv V\ ;\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$$

である。1°，2° から，

***Conv V*は"＋"に関して可換半群を成す。**(2)

しかしながら，$Conv V$ は線形空間ではない。なぜなら，$Conv V$ が線形空間となるためには，さらに

(イ) "＋"に関する群の公理

(ロ) 第2分配法則 *i.e.* $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

注(2) 本稿で用いられる代数学上の諸概念，とりわけ群論上のそれについては，たとえば，浅野・永尾〔3〕あるいはポントリャーギン〔15〕第1章などを参照されるのが有益である。

が満たされねばならないからである。ただし，次の事実に注意しよう。

α，β が同符号であれば，

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$A\in ConvV;\ \alpha,\ \beta\in\mathbf{R}$$

が成り立つ。

（その理由）仮に α，$\beta>0$ であるとしよう（$\alpha,\beta<0$ の場合にも同様にすればよい。）すると任意の $w\in(\alpha+\beta)A$ に対して

$$w=(\alpha+\beta)x$$

を満足する $x\in A$ が存在する。V は線形空間であるから，もちろん

$$w=\alpha x+\beta x\in\alpha A+\beta A$$

$$\therefore\ (\alpha+\beta)A\subset\alpha A+\beta A \qquad \text{(i)}$$

逆に，$\alpha A+\beta A$ の任意の元を v とすれば，

$$v=\alpha x+\beta y$$

を満たすような $x, y\in A$ が存在する。α，$\beta>0$ であるから，$\alpha+\beta\neq0$。ゆえに

$$\alpha x+\beta y=(\alpha+\beta)\left\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x+\frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right\}。$$

A は凸集合であるから，

$$v=\alpha x+\beta y\in(\alpha+\beta)A$$

$$\therefore\ \alpha A+\beta A\subset(\alpha+\beta)A \qquad \text{(ii)}$$

(i)，(ii)を併せて所望の帰結を得る。　以上。

α，β が異符号のとき，上記の関係が一般には成り立たないことは明らかであろう。（たとえば $\alpha=1$, $\beta=-1$ として読者自ら確かめられたい。）

そこで自然に生じてくる問題は次のようである：すなわち，**加法演算と正数の乗法演算を保存する仕方で *Conv V* をある線形空間の中に埋め込むことが可能であるや否や。**

この問に対して，本質的に重要なすべての鍵を握る Rådström の定理を述べよう。証明の中で，細かな計算を確認する箇所については，< > つきの番号を付し，すべて証明のあとにまわすこととした。蓋し証明の道筋を見失なうような煩雑を嫌うためである。

定理 1 (Rådström)[(3)]　i)　$(M,+)$ を可換半群とし，簡約法則

$$A+C=B+C\Longrightarrow A=B\ ;\ A,\ B,\ C\in M$$

注(3)　Rådström〔17〕。

が成り立つものとする。[4] このとき，ある群Gと，

$\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$；$A, B\in M$

φは injective

を満たす写像$\varphi: M\longrightarrow G$とが存在し，$\varphi$によって，$M$を$G$の中に埋め込むことができる。

ii）M上に非負実数の乗法が定義されており，それが次の諸条件を満たすものとする。すなわち，任意のα，$\beta\geqq 0$，任意の$A, B\in M$について

a. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c. $\alpha(\beta A)=\alpha\beta\cdot A$

d. $1\cdot A=A$

このとき，G上にスカラー乗法を定めて，Gを実線形空間とし，任意の$\alpha\geqq 0$，任意の$A\in M$について

$\varphi(\alpha A)=\alpha\varphi(A)$

とすることができる。ただし$\varphi: M\longrightarrow G$は i）で得られた埋め込み写像である。

iii）さらにM上に距離δが定義されており，それが次のような諸条件を満たすものとする。すなわち，任意の$\alpha\geqq 0$，任意の$A, B, C\in M$について

e. $\delta(A+C, B+C)=\delta(A, B)$

f. $\delta(\alpha A, \alpha B)=\alpha\delta(A, B)$

g. 加法演算$(A+B)$，非負実数の乗法(αA)はδによって定まるMの位相に関して連続である。

このとき，G上にノルム$\|\cdot\|_G$を定め，任意の$A, B\in M$について

$\delta(A, B)=\|\varphi(A)-\varphi(B)\|_G$

とすることができる。

証明）i）Mの元の pair (A, B), (C, D)の間に，

$$A+D=B+C$$

なる関係の成り立つとき，かつそのときに限って

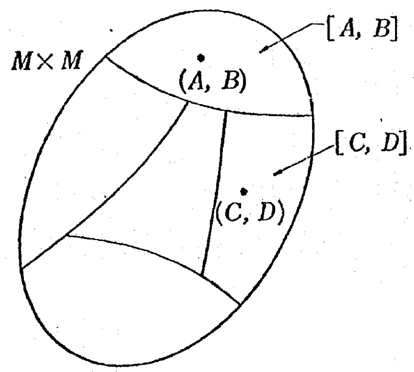
$$(A, B)\sim(C, D)$$

と書くことにすれば，二項関係"$\sim$"は同値関係になる。そこで集合$M\times M$を，この"$\sim$"によって定まる同値クラスに分割し，たとえば(A, B)を含む同値クラスを

$$[A, B]$$

注(4) ただし，M が有限半群で簡約法則を満たす場合には，実は M が群になる。この点については，浅野・永尾〔3〕p. 10を見よ。

と書くことにしよう（図1を参照)。そして，このような同値クラスの総体をGとする。すなわち，



〈図1〉

$G=\{[A, B]/A, B\in M\}$。

次にGの二元 $[A, B]$，$[C, D]$ の間に加法演算"＋"を

$[A, B]+[C, D]=[A+C, B+D]$

で定義すれば，これは well-defined で，〈1〉 $(G, +)$ は可換群となる。(単位元は $[0, 0]$; $[A, B]$ の逆元は $[B, A]$ である。)

そこで写像$\varphi : M\longrightarrow G$を

$\varphi : A \longmapsto [A+P, P]$

ここで P は任意に固定された M の元

と定義すれば，明らかに，$A, B\in M$ について

$\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B)$

が満たされ，またこの写像φは injective である。〈2〉 したがって M は φの下に加法演算を保存してGの中に埋め込まれる。

ii) 次にG上のスカラー（実数）乗法を以下のごとく定める。

$\alpha[A, B]=[\alpha A, \alpha B]$ if $\alpha\geqq 0$

$\alpha[A, B]=[|\alpha| B, |\alpha| A]$ if $\alpha<0$

この演算が well-defined であることも容易に確認することができる。

G上の加法演算については既に i) で定めたが，これと上のスカラー乗法の演算規則の下に，Gは線形空間になる。〈3〉

そこで，$\alpha\geqq 0$ について

$\varphi(\alpha A)=\alpha\,\varphi(A)$ for $A\in M$

を示そう。

$\alpha\varphi(A)$

$=\alpha[A+P, P]$ （定義より）

$=[\alpha A+\alpha P, \alpha P]$

$$=[\alpha A+P,\ P]$$
$$=\varphi(\alpha A)$$

かくして，φは非負の実数乗法を保存する。

iii)　最後にG上の距離δを

$$\rho([A,\ B],\ [C,\ D])=\delta(A+D,\ B+C)$$

と定義すれば，これは well-defined である。〈4〉 そこで記号を単純化して

$$[A,\ B]=x,\ [C,\ D]=y$$

とおき，

$$\|x-y\|_G=\rho(x,\ y)$$

と定義すれば，$\|\cdot\|_G$は線形空間G上のノルムである。〈5〉 条件gによって，G上の代数演算は$\|\cdot\|_G$について連続となり，したがって，$(G,\ \|\cdot\|_G)$は線形ノルム空間である。このように定義された$\|\cdot\|_G$について

$$\delta(A,\ B)=\|\varphi(A)-\varphi(B)\|_G$$

の成り立つことを示そう。

$$\|\varphi(A)-\varphi(B)\|_G$$
$$=\rho([A+P,\ P],\ [B+P,\ P])\quad \text{(定義より)}$$
$$=\delta(A+P+P,\ B+P+P)$$
$$=\delta(A,\ B)\quad (e\text{による})$$

以上で定理は完全に証明された。　（証了）

＜1＞　$(A,B)\sim(A',B')$, $(C,D)\sim(C',D')$ としよう。すると定義によって，

$$[A,B]+[C,D]=[A+C,B+D]$$
$$[A',B']+[C',D']=[A'+C',B'+D']$$

であるが，ここで

$$(A'+C',B'+D')\sim(A+C,B+D)$$

を示せばよろしい。しかし，$(A,B)\sim(A',B')$，$(C,D)\sim(C',D')$ から

$$A'+B=A+B',\ C'+D=C+D'$$

となり，したがって

$$A'+B+C'+D=A+B'+C+D'$$
$$\therefore\ (A'+C',\ B'+D')\sim(A+C,\ B+D)$$

よって，この加法演算は well-defined。（つまり同値クラスの代表元のとり方には無関係である。）

＜2＞　いま，$A,\ A'\in M$ について

$$\varphi(A)=\varphi(A')$$
$$i.e.\ [A+P,P]=[A'+P,P]$$

が成り立つとしよう。すると

$(A+P,P)\sim(A'+P,P)$

ゆえ，Mの可換性を利用して，

$A+P+P=A'+P+P$。

簡約法則によって

$A=A'$。

よってφは injective である。

＜3＞ 簡単だから読者自らチェックしていただきたいが，例として第2分配法則を示しておこう。いろいろなケースがあるが，たとえば $\alpha>0$, $\beta<0$, $\alpha+\beta<0$ としてみよう。(他のケースも同様。)

$(\alpha+\beta)[A,\ B]$

$=[(-\alpha-\beta)B,\ (-\alpha-\beta)A]$ (定義より)

$=[(-\alpha-\beta)B+\alpha(A+B),\ (-\alpha-\beta)A+\alpha(A+B)]$

$=[-\beta B+\alpha A,\ -\beta A+\alpha B]$

$=[-\beta B,\ -\beta A]+[\alpha A,\ \alpha B]$

$=\beta[A,\ B]+\alpha[A,\ B]$

＜4＞ 仮に $(A,B)\sim(A',B')$, $(C,D)\sim(C',D')$ とする。定義によって

$\rho([A,B],\ [C,D])=\delta(A+D,\ B+C)$

条件eにより，

$\rho([A,B],\ [C,D])$

$=\delta((A+B')+(C'+D)+A'+D',\ (A'+B)+(C+D')+B'+C')$

そこで $A+B'=A'+B$, $C+D'=C'+D$ ゆえ，

$\rho([A,B],\ [C,D])$

$=\delta(A'+D',\ B'+C')$

$=\rho([A',B'],\ [C',D'])$

ゆえに，δは well-defined である。

＜5＞ (い) $\|\cdot\|_G\geqq 0$ は自明。

(ろ) $\|[A,B]\|_G=0$ とすると，

$\|[A,B]\|_G$

$=\|[A,B]-[0,0]\|_G$

$=\delta(A+0,B+0)$

$=0$

δは距離であるから，$A=B$。したがって，

$[A,B]=[A,A]=[0,0]$。

(は) $\alpha\geqq 0$ とすれば，

$\|\alpha[A,B]\|_G$

$=\|[\alpha A,\alpha B]\|_G$

$=\delta(\alpha A,\alpha B)$

$=\alpha\delta(A,B)$ (fによる)

$=\alpha\|[A,B]\|_G$。

$\alpha<0$ とすれば，

$\|\alpha[A,B]\|_G$

$=\|[-\alpha B,-\alpha A]\|_G$

$=\delta(-\alpha B,-\alpha A)$

$=|\alpha|\delta(A,B)$ （fによる）

$=|\alpha|\,\|[A,B]\|_G$

（に）　三角形の不等式。

$\|[A,B]+[C,D]\|_G$

$=\|[A+C,B+D]\|_G$

$=\delta(A+C,B+D)$

$\leqq\delta(A+C,B+C)+\delta(B+C,B+D)$

$=\delta(A,B)+\delta(C,D)$　　（eによる）

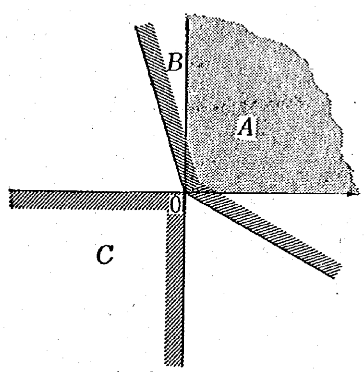
$=\|[A,B]\|_G+\|[C,D]\|_G$

以上，かなり煩瑣な手続きを経て，MをGの中へ埋め込む操作が完成したわけであるが，推論の構造そのものは非常に単純なものである。この証明を注意深く読めば，次のふたつの事実もただちに了解されるであろう。

φ(M) は線形空間 G において，原点を頂点とする凸錐である。

φ(M) は G を張る。

さて，定理1を用いて *ConvV* を線形空間に埋め込もうとすると，それは一般には不可能である。なぜなら，可換半群 *ConvV* においては簡約法則が一般には成立しないからである。たとえば，図



〈図2〉

2を見よ。$V=\mathbf{R}^2$ とし，Aをその第1象限，Bをそれよりもやや広い凸錐，Cを第3象限とすれば，

$$A,\ B,\ C\in ConvV。$$

また明らかに

$$A+C=B+C=V$$

であるが，$A\neq B$。つまり簡約法則が成り立たないのである。

そこで，定理1を用いるためには，*ConvV* よりもいますこし制約のきつい集合族を考えねばならないことがわかる。この問題に具体的な解答を与えるものが次のレンマ1，2である。

レンマ1　Vを線形ノルム空間，A, B, C をその部分集合とし，とくにBは閉かつ凸で，Cは有界とする。このとき，

$$A+C\subset B+C \Longrightarrow A\subset B$$

証明）　まず $a\in A$ を任意に選ぶ。任意の $c_1\in C$ について，

$$a+c_1\in A+C\subset B+C$$

であるから，

$$\exists b_1\in B, \exists c_2\in C \text{ such that } a+c_1=b_1+c_2$$

同様にして，

$$\exists b_2\in B, \exists c_3\in C \text{ such that } a+c_2=b_2+c_3.$$

一般に，

$$a+c_k=b_k+c_{k+1}$$

が成り立つように $\{b_k\}$, $\{c_{k+1}\}$ をそれぞれBおよびCの中から選ぶことができる。すると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a+c_k)=\sum_{k=1}^{n}(b_k+c_{k+1})$$

i.e.　$$na+\sum_{k=1}^{n}c_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=2}^{n+1}c_k$$

であるから，

$$a=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k+\frac{1}{n}c_{n+1}-\frac{1}{n}c_1.$$

Bは凸集合であるから，

$$z_n\equiv\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k\in B.$$

仮定によりCは有界であるから，

$$s-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}c_{n+1}=0,\quad s-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}c_1=0.$$

ゆえに，

$$s-\lim_{n\to\infty}z_n=a.$$

Bは閉集合であるから，

$$a\in B.$$　　　　（証了）

レンマ1からただちに，

レンマ2　Vを線形ノルム空間，A, B をその閉凸部分集合，Cを有界部分集合とすれば，

$$A+C=B+C \Longrightarrow A=B$$

そこで，線形ノルム空間Vのすべての非空・コンパクト・凸集合から成る族 *Comp Conv* V（$\subset$ *Conv* V）を考えると，これは定理1の i)，ii) においてMの満たすべき性質をすべて有すること

になる。

レンマ3　（*Comp Conv V*, $+$）は簡約法則の成り立つ可換半群で，さらに定理1の ii）における条件 a, b, c, d のすべてを満たす。

次に，*Comp Conv V* 上に，定理1の iii）における条件 e, f, g を満足するような距離を定めなければならない。このような距離としては，Hausdorff の距離 δ を採用するのが最も自然な途であろう。

いま X, Y を線形ノルム空間[(5)]（V, $\|\cdot\|_V$）の非空部分集合，x を V の一点とし，

$$\eta(x,\ Y)=\inf_{y\in Y}\|x-y\|_V$$

$$\eta(X,\ Y)=\sup_{x\in X}\eta(x,\ Y)$$

と定義するとき，この $\eta(X, Y)$ を，X と Y の間に定まる **Hausdorff の準距離**という。

この η を基礎として，V の非空・コンパクト集合の族 *Comp V* 上に次の仕方で距離 δ が定まり，これを **Hausdorff の距離**というのである。[(6)] すなわち，$X, Y \in$ *Comp V* について，

$$\delta(X,\ Y)=\mathrm{Max}\{\eta(X,\ Y),\ \eta(Y,\ X)\}。$$

または同一のことを別の形で表現することもできる。いま S を V の閉単位球とするとき，

$$\delta(X,\ Y)=\inf\{\lambda\geqq 0 / X+\lambda S\supset Y \text{ and } Y+\lambda S\supset X\}。$$

ここで δ の注意すべき性質を当面の必要の範囲でまとめておけば次のようである。

レンマ4　（V, $\|\cdot\|_V$）を線形ノルム空間とし，V のすべての非空・コンパクト部分集合から成る族 *Comp V* 上の $\|\cdot\|_V$ にもとづく Hausdorff の距離 δ が与えられている。

i）任意の $A, B\in$ *Comp V*，任意の $\alpha\geqq 0$ について，

$$\delta(\alpha A,\ \alpha B)=\alpha\,\delta(A,\ B)。$$

ii）任意の $A_1, A_2, B_1, B_2 \in$ *Comp V* について，

$$\delta(A_1+A_2,\ B_1+B_2)\leqq\delta(A_1,\ B_1)+\delta(A_2,\ B_2)。$$

iii）η および δ は *Comp Conv V* $\times$ *Comp Conv V* 上で凸である。

iv）任意の $A, B\in$ *Comp Conv V* および任意の $C\in$ *Comp V* について，

$$\delta(A,B)=\delta(A+C,B+C)。$$

v）任意の $A, B\in$ *CompV* について，[(7)]

$$\delta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B)\leqq\delta(A,\ B)$$

注(5)　ここでは前後の関係から V をノルム空間としたが，より一般には，V は単に距離空間でありさえすれば，η や δ は定義される。

(6)　（V, $\|\cdot\|_V$）と（*Comp V*, δ）との関係については，とくに Michael 〔13〕 pp. 161-166 を参照されたい。

(7)　ここで co$A$ は集合 A の凸包を示す。

(8)　ii）および v）の証明は Price 〔16〕 に負う。

証明[8]） i） ηの定義によって，

$$\eta(A,\ B)=\sup_{x\epsilon A}\inf_{y\epsilon B}\|x-y\|_V$$

$$\eta(\alpha A,\ \alpha B)=\sup_{x\epsilon A}\inf_{y\epsilon B}\|\alpha x-\alpha y\|_V=\alpha\sup_{x\epsilon A}\inf_{y\epsilon B}\|x-y\|_V$$

$$\therefore\quad \eta(\alpha A,\ \alpha B)=\alpha\eta(A,\ B)$$

ii） $x_1\epsilon A_1$，$x_2\epsilon A_2$，$y_1\epsilon B_1$，$y_2\epsilon B_2$，を任意にとると，

$$\|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\|_V\ \leqq\|x_1-y_1\|_V+\|x_2-y_2\|_V.$$

$$\therefore\quad \eta(x_1+x_2,\ B_1+B_2)\leqq\eta(x_1,\ B_1)+\eta(x_2,\ B_2)。$$

これから容易に所望の帰結を得る。

iii） i)，ii） より明らか。

iv） SをVの閉単位球とし，次の4つの関係を考える。ここで$\lambda\geqq0$；

(1) $A+\lambda S\supset B$　　(2) $B+\lambda S\supset A$

(3) $A+C+\lambda S\supset B+C$　　(4) $B+C+\lambda S\supset A+C$。

δの定義から，

$$\delta(A,\ B)=\inf\{\lambda\geqq0\,/\,(1)\text{ および }(2)\text{ が成り立つ}\}$$

$$\delta(A+C,\ B+C)=\inf\{\lambda\geqq0\,/\,(3)\text{ および }(4)\text{ が成り立つ}\}。$$

ところで，(1)(2) $\Longrightarrow$ (3)(4) であるから，

$$\delta(A,\ B)\geqq\delta(A+C,\ B+C)。$$

逆に，レンマ1により，(3)(4) $\Longrightarrow$ (1)(2) ゆえ，

$$\delta(A,\ B)\leqq\delta(A+C,\ B+C)。$$

v） 任意の $x\epsilon A$ について，

$$\eta(x,\ \mathrm{co}B)\leqq\eta(A,\ \mathrm{co}B)。$$

iii) によって，$\eta(x,\ \mathrm{co}B)$ はV上でxの凸函数であるから，任意の $x\epsilon\mathrm{co}A$についても，

$$\eta(x,\ \mathrm{co}B)\leqq\eta(A,\ \mathrm{co}B)。$$

$$\therefore\quad \eta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B)\leqq\eta(A,\ \mathrm{co}B)。$$

また，$B\subset\mathrm{co}B$ゆえ，

$$\eta(A,\ \mathrm{co}B)\leqq\eta(A,\ B)$$

$$\therefore\quad \eta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B)\leqq\eta(A,\ B)$$

同様にして

$$\eta(\mathrm{co}B,\ \mathrm{co}A)\leqq\eta(B,\ A),$$

$$\therefore\quad \delta(\mathrm{co}A,\ \mathrm{co}B)\leqq\delta(A,\ B)。$$ （証了）

レンマ5 距離空間（*Comp Conv V*, δ）は定理1の iii) における条件 e, f, g を満足する。

証明）eはレンマ4の iv）より，またfは同 i）より明らかである。したがってここではgだけを示せばよい。

いま*Comp Conv V*の点列$\{A_n\}$，$\{B_n\}$が，

$$\delta(A_n,\ A)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

$$\delta(B_n,\ B)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

$$\text{where } A,\ B\in Comp\ Conv\ V$$

を満たすものとしよう。レンマ4の ii）によって，

$$\delta(A_n+B_n,\ A+B)\leqq\delta(A_n,\ A)+\delta(B_n,\ B)。$$

ゆえに，

$$\delta(A_n+B_n,\ A+B)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty。$$

すなわち，*Comp Conv V* 上の加法演算はδについて連続である。

次に，*Comp Conv V* の点列$\{A_n\}$と，非負実数の点列$\{\alpha_n\}$が，

$$\delta(A_n,\ A)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

$$\text{where } A\in Comp\ Conv\ V$$

$$\alpha_n\longrightarrow\alpha\geqq 0 \quad \text{as } n\to\infty$$

を満たすものとする。

$$\begin{aligned}&\delta(\alpha_nA_n,\ \alpha A)\\ &\leqq\delta(\alpha_nA_n,\ \alpha_nA)+\delta(\alpha_nA,\ \alpha A)\\ &=\alpha_n\delta(A_n,\ A)+\delta(\alpha_nA,\ \alpha A)\quad(\text{レンマ4の i）})\end{aligned}$$

ここで右辺第1項については，もちろん

$$\alpha_n\delta(A_n,\ A)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty。$$

第2項に着目すると，任意の$\varepsilon>0$に対し，十分に大きなnをとれば$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$が成り立つ。$A$がコンパクトであるから，ある$0<K<\infty$が存在して，(9) 十分に大きな$n$については

$$\begin{aligned}&\eta(\alpha_nA,\ \alpha A)\\ &=\sup_{x\in A}\inf_{y\in A}\|\alpha_nx-\alpha y\|_V\\ &\leqq\sup_{x\in A}\|(\alpha_n-\alpha)x\|_V\\ &=|\alpha_n-\alpha|\sup_{x\in A}\|x\|_V\\ &<\varepsilon K。\end{aligned}$$

$\eta(\alpha A,\ \alpha_nA)$についても同様であるから，

$$\delta(\alpha_nA,\ \alpha A)\longrightarrow 0 \quad \text{as } n\to\infty。$$

かくして，

注(9) Dunford-Schwartz〔6〕p. 51, Theorem 8。

$\delta(\alpha_n A_n, \alpha A) \longrightarrow 0$ as $n \to \infty$。

（証了）

以上の議論から，*Comp Conv V* については，定理1のすべての条件が満たされていることが判明したので，次の定理が成立する。

定理2　（*Comp Conv V* の埋め込み）*Comp Conv V* は，次のような仕方で，ある実線形ノルム空間（W, $\|\cdot\|_W$）の中に埋め込まれる。すなわち，埋め込み写像を φ : *Comp Conv* $V \to W$ とすれば，

i)　$\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$；$A$, $B \in$ *Comp Conv V*

ii)　$\varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A)$；$A \in$ *Comp Conv V*, $\alpha \geqq 0$

iii)　$\delta(A, B) = \|\varphi(A) - \varphi(B)\|_W$；$A$, $B \in$ *Comp Conv V*

iv)　φ(*Comp Conv V*) はWにおいて原点を頂点とする凸錐であり，これはWを張る。

こうして，線形ノルム空間のすべての非空・コンパクト・凸集合から成る族は，代数的・位相的性質を保存して，いまひとつの線形ノルム空間に埋め込まれることが明らかとなった。ここでわれわれの当初の目標は一応達せられたのであるが，実際にこの定理を適用する場合には，もうすこし詳しい情報があると便利である。そこで二，三の簡単な命題を述べておくこととしたい。(10)

1　（V, $\|\cdot\|_V$）が完備（すなわち Banach 空間）であれば，（*Comp Conv V*, δ）も完備である。

証明）　$\{A_n\}$ を*Comp Conv V* の Cauchy 列とする。よく知られているように，V が完備ならば *Comp V* も完備となるから，(11)

$\exists A \in$ *Comp V* such that $\delta(A_n, A) \to 0$ as $n \to \infty$。

そこでAが凸であることを示せばよろしい。まずすべてのnについて，

$\delta(\mathrm{co}\ A, A) \leqq \delta(\mathrm{co}\ A, A_n) + \delta(A_n, A)$。

A_n は凸集合であるから，レンマ4のv）より，

$\delta(\mathrm{co}\ A, A_n) \leqq \delta(A, A_n)$。

ゆえに，すべてのnについて

$\delta(\mathrm{co}\ A, A) \leqq 2\delta(A, A_n)$

よって，

$\delta(\mathrm{co}\ A, A) = 0$

注(10)　Debreu〔5〕pp. 362-363 をも参照されたい。
(11)　Michael〔13〕§4 を見よ。

すなわち，

$$\text{co}\ A = A_\circ$$ （証了）

[2] $(V, \|\cdot\|_V)$ が可分であるならば，$(W, \|\cdot\|_W)$ もまた可分である。

証明） V が可分であれば周知のとおり *Comp V* も可分であり，[12] したがって $Comp\ Conv\ V \subset Comp\ V$ もまた可分である。そこで $\{A_n\}$ を *Comp Conv V* の可算稠密な部分集合とするとき，可算集合

$$\{B_{mn} \equiv \varphi(A_m) - \varphi(A_n)\},\ m,\ n = 1,\ 2 \cdots\cdots$$

が W の中で稠密になることを示そう。

まず W の任意の元を B とするとき，定理2の iv）より，*Comp Conv V* の元 $\dot{A}$, $\ddot{A}$ が存在して，

$$B = \varphi(\dot{A}) - \varphi(\ddot{A})。$$

$\{A_n\}$ は *Comp Conv V* の中で稠密ゆえ，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\delta(\dot{A},\ A_p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta(A,\ A_q) < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす $A_p,\ A_q \in \{A_n\}$ が存在する。

$$\begin{aligned}
&\|B - B_{pq}\|_W \\
&= \|(\varphi(\dot{A}) - \varphi(\ddot{A})) - (\varphi(A_p) - \varphi(A_q))\|_W \\
&= \|(\varphi(\dot{A}) - \varphi(A_p)) + (\varphi(A_q) - \varphi(\ddot{A}))\|_W \\
&\leqq \|\varphi(\dot{A}) - \varphi(A_p)\|_W + \|\varphi(\ddot{A}) - \varphi(A_q)\|_W \\
&= \delta(\dot{A},\ A_P) + \delta(\ddot{A},\ A_q) \quad \text{（定理2の iii）による）} \\
&< \varepsilon。
\end{aligned}$$

（証了）

$(V, \|\cdot\|_V)$ が完備であるならば，$(Comp\ Conv\ V, \delta)$ も完備となることは[1]で示したとおりであるが，$(V, \|\cdot\|_V)$ が完備であっても $(W, \|\cdot\|_W)$ が完備とは限らない。しかし，**任意の線形ノルム空間はある Banach 空間の稠密部分空間として等長同型（isometrically isomorphic）に埋め込まれる**，[13] という事実が函数解析学ではよく知られている。したがって，

[3] $(W, \|\cdot\|_W)$ はある Banach 空間の稠密部分空間として，等長同型に埋め込まれる。

かくして，*Comp Conv V* を Banach 空間の中に埋め込むことが可能となり，線形ノルム空間の非空・コンパクト・凸集合を値としてもつような集合値函数は，Banach 空間の中に値をとる一価

注(12) Michael〔13〕§4を見よ。
(13) Dunford-Schwartz〔6〕p. 89 の Theorem，および Yosida〔21〕pp. 56-57。

のベクトル値函数とみなすことができるのである。したがってこのような場合には，たとえば，集合値函数の積分を **Bochner** 積分[14]として取り扱いうる途が開けてくることは，もはや明瞭であろう。[15] しかし，この点についての体系的な研究は，稿をあらためて論ずべき大きな課題と言わねばならない。

II

本節では話題を変えて，Convex Analysis の諸定理のうち，経済分析に広くその有効性を認められたいくつかについて考察する。これらの定理については既に何とおりかの証明が知られているが，筆者は新しいひとつの基本原理を通じてその証明を果し，従来，一見散発的であった諸定理に理論的な統一を与えたいと思う。

まず諸定理の"generator"とも称すべき基本原理（定理３）を確立することから始め，つづいてその応用にうつることにしよう。

1. ひとつの表現定理

以下の議論で用いられる二，三の数学上の概念について簡単にここで復習しておくことが便利であろう。

定義　Vを実線形空間，$K\subset V$ をその凸部分集合とする。点 $p\in K$ について

$$p=t\,x+(1-t)y$$
$$\text{for some } x,\ y\in K \text{ and } t\in(0,\ 1)$$
$$\Longrightarrow x=y=p$$

が成り立つとき，p はKの**端点** (extreme point) であるという。

定義　Vを実線形空間，$K\subset V$ をその凸部分集合とする。集合 $S\subset K$ について

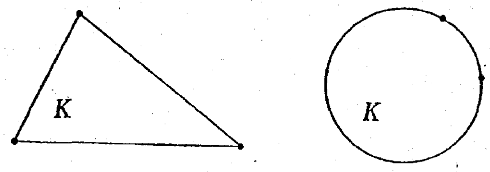
$$t\,x+(1-t)y\in S$$
$$\text{for some } x,\ y\in K \text{ and } t\in(0,\ 1)$$
$$\Longrightarrow x,\ y\in S$$

が成り立つとき，Sは Kの**extreme set** であるという。

たとえば下の図３において，三角形の場合は３つの頂点が端点であり，また３辺はいずれも ex-

注(14)　Bochner 積分については Dunford-Schwartz〔6〕Chapter Ⅲ および Yosida〔21〕pp. 132-136 を見よ。
(15)　Debreu〔5〕。また Artstein〔2〕はVとして $\mathbf{R}^n$ を考える場合には，Rådström の定理を用いず，より簡単な埋め込みが可能であることを示した。とくに Theorem 3.2 を参照。

treme set である。他方，円の場合は円周上のすべての点が端点になる。



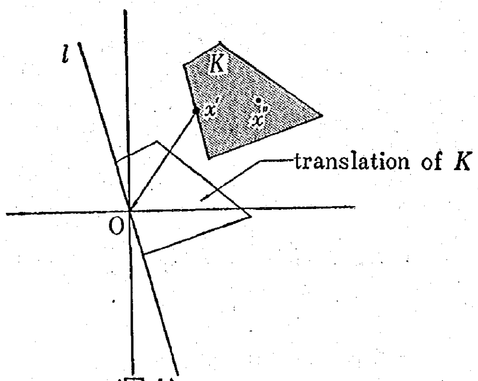
〈図3〉

また1点から成る集合 $\{p\}$ が extreme set になるための必要十分条件は p が端点であることも明らかであろう。

定義 Vを実線形空間，$K\subset V$ をその凸部分集合とする。$x\in K$ に対して，$y\in V$ が

$x\pm ty\in K$ for sufficiently small $t>0$

を満たすならば，yをxにおける **facial direction** といい，xにおける facial direction の全体を **facial space** と呼んで $L(x|K)$ と書く。(16)



〈図4〉

これらの概念は単純な図によって容易に理解することができる。図4を見よう。点 x' は閉じた凸集合Kの境界上の点であり，また x'' はKの内点である。すると$L(x'|K)$ は原点0を通る直線 l であり，$L(x''|K)$ は全空間となる。

Kが凸集合であることを考慮すると，任意の $x\in K$について $L(x|K)$ はV の線形部分空間となる。図4の例においては，

$$\dim L(x'|K)=1$$

$$\dim L(x''|K)=2$$

である。さらに，$x\in K$ がKの端点であることは，

$$\dim L(x|K)=0$$

注(16) この概念についてはArrow-Hahn〔1〕pp. 389-390 および渡部〔20〕p. 13 を参照。

と同値になることもほとんど明白であろう。

さて，次のレンマは解析学で周知のものであるが，重要であるから一応証明を与えておくことにする。

レンマ 6　(Krein-Milman) Vを局所凸・Hausdorff な線形位相空間，$K\subset V$をその非空・コンパクト・凸部分集合とする。このときKには必ず端点が存在する。

証明）Kの非空・コンパクト・凸な extreme set のすべてから成る族を$\mathfrak{E}$とすれば，$K\in\mathfrak{E}$ゆえ

$$\mathfrak{E}\neq\phi。$$

$\mathfrak{E}$に集合の包含関係による半順序$\leqq$を与えれば，半順序構造$(\mathfrak{E},\leqq)$は Zorn のレンマの諸条件を満たし，したがって，$\mathfrak{E}$は極小元Sを有する。

そこで，Sがただ1点からなる extreme set であることを示せばよい。意に反して，Sが相異なる2元a，bを有するものと仮定しよう。すると，Vが局所凸・Hausdorff であることから，Hahn-Banach の定理[17]により，

$$\exists\Lambda\in V^{*}\ \text{such that}\ \Lambda(a)<\Lambda(b)。$$

（ここでV^{*}はVの双対空間。）Sはコンパクトであるから，ΛはS上のある点pで最大値αをとる。いま

$$S_1=S\cap\Lambda^{-1}(\alpha)$$

とおくと，$p\in S_1$であるから，$S_1\neq\phi$。また$a\notin S_1$ゆえ，

$$S_1\subsetneqq S。\qquad (*)$$

さらに，S_1がSの extreme set，したがってKの extreme set であることと，S_1がコンパクト・凸であることも明らかであるから，

$$S_1\in\mathfrak{E}。\qquad (**)$$

(*) および (**) はSの極小性に矛盾。

$$\therefore\quad S=\{p\}。\qquad \text{（証了）}$$

以上ですべての準備が整ったので，われわれの基本原理として，新しい表現定理をひとつ述べることにしよう。

定理 3　Vを局所凸・Hausdorff な線形位相空間，$K\subset V$をその非空・コンパクト・凸集合とする。このとき任意の連続線形作用素

注(17) Dunford-Schwartz〔6〕Chapter Ⅱ. 3, とくに p. 65, Corollary 14.

$$T: V \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

について

$$T(K) = T\{x \in K / \dim L(x|K) \leqq n\}。$$

証明）$T(K) \subset T\{x \in K / \dim L(x \mid K) \leqq n\}$ だけを示せば十分であろう。（逆の包含関係は自明。）

そこて

$$y \in T(K) \subset \mathbf{R}^n$$

とすれば，

$$T^{-1}(y) \cap K$$

は，Kの非空・コンパクト・凸集合である。よってレンマ6から，この集合には端点xが存在する。

いま $z \neq 0$ なる$z \in L(x|K)$ について，

$$T(z) \neq 0$$

を示そう。

意に反して，$T(z)=0$ と仮定する。$z \in L(x \mid K)$ ゆえ

$$w \equiv x + tz \in K$$

$$w' \equiv x - tz \in K$$

for sufficiently small $t>0$。

$T(z)=0$ とTの線形性から，

$$T(w) = T(x) = y$$

$$T(w') = T(x) = y。$$

したがって，

$$w,\ w' \in T^{-1}(y) \cap K。$$

また明らかに，

$$x = \frac{1}{2}(w + w'),\quad w \neq w'。$$

これはxが $T^{-1}(y) \cap K$ の端点であることに矛盾。

ゆえに，

$$T: L(x|K) \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

は injective である。よって，

$$\dim L(x|K) \leqq n。$$ （証了）

2. 表現定理の応用

前節で証明した定理3の応用として，Carathéodoryの定理，Shapley-Folkmanの定理，Ljapunov

の凸性定理を順次証明することにしよう。これら3つの定理はすべて，ある非空・コンパクト・凸集合の，連続線形作用素による像を調べる問題に帰着せしめることができ，そこで定理3の適用を通じて解決が図られることに注意したい。

Carathéodory の定理

定理4　Aを $\mathbf{R}^n$ の任意の部分集合とする。このとき，任意の $x \in \mathrm{co}A$ は Aの$n+1$ 個の点の凸結合として表わすことができる。(18)

証明）　xを $\mathrm{co}A$ の任意の元とし，それは

$$x=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i;$$

$$x_i \in A,\quad \alpha_i \geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

と表わされるものとしよう。ここで一般性を失うことなく$k>n+1$としてよい。いま

$$K=\{(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k)/\lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\}$$

と定義すれば，Kは $\mathbf{R}^k$ のコンパクト・凸集合である。さらに連続線形作用素$T:\mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$T:(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k)\longmapsto \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$$

とすれば，定理3によって

$$T(K)=T\{(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k)/\dim L((\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k)\,|\,K)\leqq n\}$$

である。しかるに

$$\dim L((\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k)\,|\,K)\leqq n$$

ならば，

$$\#\{i/\lambda_i \neq 0\}\leqq n+1。$$

（証了）

Shapley-Folkman の定理

定理5　$A_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ を $\mathbf{R}^n$ の非空部分集合とし，

$$x \in \mathrm{co}\sum_{i=1}^{k}A_i$$

とする。このとき，

$$x=\sum_{i=1}^{k}x_i \quad \text{and} \quad \#\{i/x_i \notin A_i\}\leqq n$$

を満たす　$x_i \in \mathrm{co}A_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ が存在する。(19)

注(18)　本稿とは異なった手法の証明が，たとえば Rockafellar〔18〕 p. 155 に示されている。

(19)　この定理の別証はたとえば Arrow-Hahn〔1〕pp. 392-395, Theorem 8 に与えられているが，われわれの証明の方が簡単で見とおしがよいように思われる。またこの結果に立脚して，コンパクト集合の非凸性の度合を評価する試みは Shapley-Folkman-Starr の定理として知られているが，これについては Arrow-Hahn〔1〕pp. 385-400, Starr〔19〕および渡部〔20〕に詳細な取り扱いがなされているので，本稿でとくにつけ加えるべきことがない。均衡分析への応用の典型的な例としてはArrow-Hahn〔1〕Chapter 7, 福岡〔7〕およびStarr〔19〕等を参照されたい。

証明） まず，

$$x=\sum_{i=1}^{k} y_i$$

を満たす$y_i \in \mathrm{co}A_i (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ を選ぶと，各 y_i は A_i の有限個の元の凸結合である。そこで各 y_i に対応する，これらの有限個の元の集合を B_i とし，

$$K=\mathrm{co}B_1 \times \mathrm{co}B_2 \times \cdots\cdots \times \mathrm{co}B_k$$

と定義すれば，Kはもちろん$\mathbf{R}^{nk}$のコンパクト・凸集合である。また $(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k) \in K$については，

$$\dim L((z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k) \mid K)=\sum_{i=1}^{k} \dim L(y_i \mid \mathrm{co}\ B_i)$$

となることに注意しておこう。

さて，連続線形作用素$T : \mathbf{R}^{nk} \longrightarrow \mathbf{R}^n$ を

$$T : (z_1, z_2, \cdots\cdots, z_k) \longmapsto \sum_{i=1}^{k} z_i$$

$$\text{where } z_i \in \mathbf{R}^n,\ i=1, 2, \cdots\cdots, k$$

と定義すれば，定理3より，次の条件を満たす $(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k) \in K$ が存在する；すなわち

$$x=\sum_{i=1}^{k} x_i$$

かつ

$$\dim L((x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k) \mid K)$$

$$=\sum_{i=1}^{k} \dim L(x_i \mid \mathrm{co}B_i)$$

$$\leqq n。$$

したがって，

$$\#\{i / \dim L(x_i \mid \mathrm{co}B_i) \geqq 1\} \leqq n,$$

つまり

$$\#\{i / \dim L(x_i \mid \mathrm{co}B_i) = 0\} \geqq k-n。$$

$\dim L(x_i \mid \mathrm{co}B_i)=0$ のときは，x_i は $\mathrm{co}B_i$ の端点であり，よって

$x_i \in B_i \subset A_i$。 （証了）

Ljapunov の凸性定理

定理6 $(X, \mathfrak{F}, \mu_i)$ $i=1, 2, \cdots\cdots, n$を non-atomic, σ-有限な測度空間とする。いま可測空間 $(X, \mathfrak{F})$ 上のベクトル値測度μを

$$\mu(E)=(\mu_1(E), \mu_2(E), \cdots\cdots, \mu_n(E));\ E \in \mathfrak{F}$$

と定義すれば，$\mu(\mathfrak{F})$ は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト・凸集合である。[20]

証明） 有界な実可測函数 g に対して，

$$T(g)=\left(\int_X g d\mu_1,\ \int_X g d\mu_2,\ \cdots\cdots,\ \int_X g d\mu_n\right)$$

と定義する。また

$$\nu=\mu_1+\mu_2+\cdots\cdots+\mu_n$$

とすれば，ν は可測空間（X, F）上の測度である。すると，

$$g_1=g_2 \quad a.e.\ (\nu) \implies T(g_1)=T(g_2)$$

であるから，T は $T: L^\infty(\nu)\longrightarrow \mathbf{R}^n$ という形式の線形作用素とみなすことができる。

$(X, \mathfrak{F}, \mu_i)$ $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ は σ-有限で，しかも，

$\mu_i \ll \nu;\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$

であるから，Radon-Nikodym の定理[21]により，各 μ_i に対応して，次のような条件を満たす $h_i \in L^1(\nu)$ が存在する。すなわち，

$$\forall E \in \mathfrak{F},\ \mu_i(E)=\int_E h_i\, d\nu \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$i.e.\ d\mu_i=h_i d\nu \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)。$$

したがって，

$$T(g)=\left(\int_X gh_1 d\nu,\ \int_X gh_2 d\nu,\ \cdots\cdots,\ \int_X gh_n d\nu\right)$$

と書けることになる。ゆえに，$T: L^\infty(\nu)\longrightarrow \mathbf{R}^n$ は＊弱位相について連続な線形作用素である。[22]

そこで，

$$K=\{g \in L^\infty(\nu) \mid 0\leqq g\leqq 1\}$$

とすれば，Kは$L^\infty(\nu)$の閉単位球 S の凸部分集合である。閉単位球 S は＊弱位相についてコンパクトであり（Alaoglu の定理)[23]，また

$$g \in K \iff 0\leqq \int_X f\cdot g d\nu \leqq \int_X f d\nu$$

for every non-negative $f \in L^1(\nu)$

であるから，KはSの（＊弱位相について）閉部分集合。ゆえにKは＊弱位相についてコンパクトで

注(20) Ljapunov〔11〕が原論文。その後 Lindenstrauss〔12〕によって，その証明が著しく簡略化せられた。ここでの証明も基本的には Lindenstrauss のそれと類似のものであるが，定理３を明示的に利用する点がちがっている。また Hermes-LaSalle〔９〕Part Ⅰ. 8 の参照も有益であろう。

この定理の証明は数学的にやや難しい概念を用いる必要がある。それらについては，たとえば Halmos〔８〕(実函数論)，Dunford-Schwartz〔６〕，Yosida〔21〕(函数解析学) 等を参照していただきたい。

またこの結果を用いて，集合値函数の積分に関するいくつかの重要な命題が導出されるが，それらについてはとりあえず Debreu〔５〕，Hildenbrand〔10〕などを参照されたい。

(21) Halmos〔８〕pp. 128-130.

(22) σ-有限な測度空間において $L^* \cong L^\infty$ が成り立つことについては Dunford-Schwartz〔６〕pp. 289-290, Theorem 5. ＊弱位相については Yosida〔21〕p. 125 を見よ。

(23) Dunford-Schwartz〔６〕p. 424, Theorem 2. 。

ある。Tは線形かつ，＊弱位相について連続であるから，$T(K)$ は $\mathbf{R}^n$ のコンパクト・凸集合となる。最後に

$$T(K)=\mu(\mathfrak{F})$$

を示せば証明が完結する。

いま χ_E を可測集合 $E\in\mathfrak{F}$ の特性函数とすれば，

$$\chi_E\in K$$

で，しかも χ_E はKの端点ゆえ

$$\dim L(\chi_E|K)=0。$$

他方 $f\in K$ が特性函数でないとすると，

$$\mu(E)\overset{(24)}{>}0$$

$$r\leqq f\leqq 1-r \text{ on} E$$

を満たす $E\in\mathfrak{F}$ と $r>0$ とが存在する。そこで

$$M=\chi_E\cdot L^\infty(\nu)$$

とおくと，M は $L^\infty(\nu)$ の線形部分空間で，

$$M\subset L(f\mid K)。$$

$\mu(E)>0$ で $(X,\mathfrak{F},\mu_i)$ $i=1, 2, \ldots\ldots, n$ は non-atomic であるから，

$$\dim M=\infty。$$

定理3により，

$$\begin{aligned}&T(K)\\&=T\{f\in K/\dim L(f|K)\leqq n\}\\&=T\{f\in K/f=\chi_E \text{ for some } E\in\mathfrak{F}\}\\&=\mu(\mathfrak{F})\end{aligned}$$

（証了）

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J. and F. H. Hahn *General Competitive Analysis* (Holden-Day, San Francisco) 1971.

〔2〕 Artstein, Z. "On the Calculus of Closed Set-valued Functions" *Indiana University Mathematics Journal* Vol. 24 No. 5 1974 433-441.

〔3〕 浅野啓三・永尾汎『群論』(岩波書店，東京) 1965.

〔4〕 Brunn, H. *Ueber Curven ohne Wendepunkte* (Munich) 1889.

〔5〕 Debreu, G. "Integration of Correspondences" *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* Vol. II (University of California Press, Berkeley and Los Angeles) 1967.

注(24) この不等号はもちろんベクトルの意味であり，$\mu_i(E)>0$ $(i=1, 2, \ldots\ldots, n)$ と同値である。

〔6〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz *Linear Operators* Part 1 (Interscience, New York) 1958.

〔7〕 福岡正夫「コアによる競争均衡の近似について」『三田学会雑誌』65巻7号，1972.

〔8〕 Halmos, P. R. *Measure Theory* (van Nostrand, New York) 1950.

〔9〕 Hermes, H. and J. P. LaSalle *Functional Analysis and Time Optimal Control* (Academic Press, New York) 1969.

〔10〕 Hildenbrand, W. *Core and Equiliblia of a Large Economy* (Princeton University Press, Princeton) 1974.

〔11〕 Ljapunov, A. "Sur les fonctions-vecteurs complètement additives" *Bull. Acad. Sci. URSS Sér. Math.* Vol. 4, 1940 465–478.

〔12〕 Lindenstrauss, J. A. "A Short Proof of Liapunoff's Convexity Theorem" *Journal of Mathematics and Mechanics* Vol. 15 No. 6, 1966, 971–972.

〔13〕 Michael, E. "Topologies on Spaces of Subsets" *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 71, 1951, 152–182.

〔14〕 Natanson, I. P. *Theory of Functions of a Real Variable* Vol. 1 (Ungar, New York) 1955.

〔15〕 ポントリャーギン『連続群論』上（柴岡他訳）（岩波書店，東京）1957.

〔16〕 Price, G. B. "The Theory of Integration" *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 47, 1910, 1–50.

〔17〕 Rådström, H. "An Embedding Theorem for Spaces of Convex Sets" *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 3, 1952, 165–169.

〔18〕 Rockafellar, R. T. *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton) 1970.

〔19〕 Starr, R. "Quasi-equiliblia in Markets with Non-convex Preferences" *Econometrica* Vol. 37, 1969, 25–38.

〔20〕 渡部隆一「非凸性の尺度について」『日吉論文集』自然科学編 No, 12, 1975.

〔21〕 Yosida, K. *Functional Analysis* 3rd ed. (Springer Verlag, New York) 1971.

（カルフォルニア大学数学科）