Title	比較静学と定性経済学II
Sub Title	Comparative statics and qualitative economics II
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1977
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.70, No.1 (1977. 2) ,p.1- 36
JaLC DOI	10.14991/001.19770201-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19770201-0001

比較静学と定性経済学 Ⅱ

福岡　正夫

1　前稿[1]においては，ランカスター＝ゴーマンならびにカークたちの所業に負う定性経済学の二つの流れを概観検討し，そのさいの結論として，安定性を仮定しない定性体系の可解性のためには，係数行列のサイクルに正のものがあってはならず，かつ十分な数のゼロ元素が含まれねばならないこと，また安定性を導入するにしても，それをもっぱら定性的に規定する場合には，やはり同種のきびしい条件が満たされねばならないこと，を知った。われわれが当面する多くの経済体系はこれらの条件をかならずしも満たさないから，それらを緩和する方向に議論を拡張することの望ましさについては，疑念の余地のないところであろう。そのような活路として前稿で言及した第二のアプローチは，定性的安定性ではない通常の意味での安定性を導入し，そうした上で係数行列が正のサイクルをも含む場合，そして体系の相互連結性がより緊密な場合にも，何らかの可解条件を得ることができるかどうかの探索を企図している。このような考察は，安定条件が若干の量的情報を含むところから必然的に純粋定性分析の境界線をこえ，定性・定量双方の混合システムの分析に及ぶことになるが，純粋定性分析の限界がすでに明確となった現地点においては，当然に踏破されるべき研究領域を形成するというべきであろう。すでにこの方面の研究も，カークおよびその協力者たちによって手を染められており[2]，われわれが以下本稿で展開するところも，彼らのルート・マップに忠実な再述と彫琢を試みたものにほかならない。

2　上記のプログラムにしたがって，本稿で分析の対象とする係数行列のクラスは

$$S_A=\{B \mid B \in Q_A,\ B\text{は安定行列}\}$$

のように定義される安定な定性行列であり，ここで Q_A は行列 A と同じ符号の元素から成る行列の集合（定性行列）をあらわしている。前稿の後半で導入した定性的安定性（Q安定性）の概念は，$B \in Q_A$ のすべての B について安定性を要請したものであるが，ここではもっと緩く，$B \in Q_A$ であって，しかも通常の意味での安定性を満たす B の集合のみに考察を限定するわけである。

注(1)　福岡正夫「比較静学と定性経済学Ⅰ」，『三田学会雑誌』1976年10月号。
(2)　文献については，上掲論文の脚注（8）参照。

合両者のそれぞれ対応するサイクルはまったく同じ値をもつ。そして非負行列のサイクルがすべて非負であることは自明である。

他方，Aのサイクルがすべて非負であるときは，それとサイクルが同値な非負行列$\hat{A}$がかならずあり，正則な対角行列Dの下で $A=D\hat{A}D^{-1}$ の関係が成立する。そして非負行列は，つねに任意の正則対角行列を用いて森嶋行列に変換可能である。

つぎにAが reduce された森嶋行列であるとは，$A=A^{*}-\alpha I$ で，A^{*} が森嶋行列，かつすべての i について $\alpha>a_{ii}^{*}$ であることをいう。そのとき，上記の補助定理1にもとづき，ただちにつぎの補助定理を導くことができる。

補助定理 2(5) Aが分解不可能で，かつその対角元素がすべて負であれば，Aは reduce された森嶋行列であるか，さもなければ長さ2以上の負のサイクルを少くとも1個もつかのいずれかである。

証明

仮定の分解不可能性から，Aの長さ2以上のサイクルのなかには非ゼロのものがかならず存在するのでなくてはならない。そこで，それらの非ゼロのサイクルが負のものを含むとすれば，いうまでもなく定理の主張の後半部分が成立する。ゆえにそれら非ゼロのサイクルが正のものばかりから成るとすれば，すべての i について $\alpha>|a_{ii}|$ となるように正の数αを選び，$A^{*}=A+\alpha I$ と定義することによって，$a_{ii}^{*}=a_{ii}+\alpha>0$ となり，A^{*} のサイクルは長さ1のものまで含めてすべて非負となるから，さきに証明した補助定理1から A^{*} は森嶋行列となる。そして上記のαの選び方と A^{*} のつくり方から，Aが reduce された森嶋行列で，$a_{ii}^{*}<\alpha$ となっていることは明らかである。

3　ここでいよいよ本論に入り，まず前稿の場合とは対照的に，Aが1個もゼロ元素を含まない場合には何がいえるかを考察してみよう。なお下記の定理の条件は，Aが 2×2 の場合にはトリヴィアルに満たされるから，以下ではもっぱら$n>2$の場合を前提して，論を進めることにする。

定理 1(6) Aは安定な行列で，どの i，j についても $a_{ij}\neq0$，かつその対角元素はすべて負であるとする。そのときAが安定性の下で定性的に可逆となるための必要かつ十分条件は，それが reduce された森嶋行列となることである。

証明

注(5) Basett, Maybee, and Quirk, *op. cit.*, p. 550, Theorem 3.

(6) *op. cit.*, p. 552, Theorem 5. なお証明については L. Bassett, H. Habibagahi, and J. Quirk, "Qualitative Economics and Morishima Matrices," *Econometrica*, April 1967, pp. 227-228 参照。

必要性。Aが安定なら$|A|\neq 0$であるから，そのすべての余因数A_{ij}の符号が確定している。ところでA_{ij}の展開式は

$$(-1)\ a_{ji}a_{11}\cdots a_{i-1,i-1}a_{i+1,i+1}\cdots a_{j-1,j-1}a_{j+1,j+1}\cdots a_{nn}$$

$$(-1)^2\ a_{jk}a_{ki}a_{11}\cdots a_{i-1,i-1}a_{i+1,i+1}\cdots a_{j-1,j-1}a_{j+1,j+1}\cdots a_{k-1,k-1}a_{k+1,k+1}\cdots a_{nn}$$

のようにあらわされる二項を含み，ここで第1の項の符号は$(-1)^{n-2+1}\mathrm{sgn}\,a_{ji}$，第2の項の符号は$(-1)^{n-3+2}\,\mathrm{sgn}\,a_{jk}\,a_{ki}$である。ところが，われわれは安定性の仮定に矛盾することなく，対角元素をその絶対値において任意に大きく，他の元素を任意に小さく選ぶことができるから，もし上の二項が相異なる符号をとるとすれば，A_{ij}の符号は不定とならざるをえない。よってすべてのA_{ij}が定符号をとるためには，すべての$i\neq j\neq k\neq i$について

(3)　$\mathrm{sgn}\ a_{ji}=\mathrm{sgn}\ a_{jk}a_{ki}$

となるのでなくてはならない。

つぎに$\mathrm{sgn}\ a_{ij}=\mathrm{sgn}\ a_{ik}a_{kj}$, $\mathrm{sgn}\ a_{ji}=\mathrm{sgn}\ a_{jk}a_{ki}$である場合は，$\mathrm{sgn}\ a_{ij}=\mathrm{sgn}\ a_{ji}$, $\mathrm{sgn}\ a_{jk}=\mathrm{sgn}\ a_{kj}$, $\mathrm{sgn}\ a_{ki}=\mathrm{sgn}\ a_{ik}$が満たされるのでなければ矛盾が生じるから，すべての$i\neq j$について明らかに

(4)　$\mathrm{sgn}\ a_{ij}=\mathrm{sgn}\ a_{ji}$

よって補助定理2の場合の要領でαを選び$A^*=A+\alpha I$をつくれば，A^*は森嶋行列したがってAは reduce された森嶋行列となる。

十分性。A^*は森嶋行列であるから，(1)(2)の関係をつうじて，それはフロベニウスの正行列

$$(5)\quad A^*_{\sigma}=\begin{bmatrix} A^*_{\mathrm{II}} & -A^*_{\mathrm{I\,II}} \\ -A^*_{\mathrm{II\,I}} & A^*_{\mathrm{II\,II}} \end{bmatrix},$$

に転化でき，後者についてはαをA^*_{σ}したがってA^*の最大特性根より大きく選ぶことによって

$$(6)\quad [A^*_{\sigma}-\alpha I]^{-1}=\begin{bmatrix} A^*_{\mathrm{II}}-\alpha I & -A^*_{\mathrm{I\,II}} \\ -A^*_{\mathrm{II\,I}} & A^*_{\mathrm{II\,II}}-\alpha I \end{bmatrix}^{-1}<0$$

が成立する[(7)]。ところが(2)から

$$(7)\quad \begin{bmatrix} A^*_{\mathrm{II}}-\alpha I & A^*_{\mathrm{I\,II}} \\ A^*_{\mathrm{II\,I}} & A^*_{\mathrm{II\,II}}-\alpha I \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^*_{\mathrm{II}}-\alpha I & -A^*_{\mathrm{I\,II}} \\ -A^*_{\mathrm{II\,I}} & A^*_{\mathrm{II\,II}}-\alpha I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

となるから，(6)(7)を綜合して

注(7)　Debreu and Herstein, *op. cit.*, p. 602, Theorem III.

$$(8)\quad \mathrm{sgn}\begin{bmatrix} A^*_{\mathrm{II}}-\alpha I & A^*_{\mathrm{I\,II}} \\ & \\ A^*_{\mathrm{II\,I}} & A^*_{\mathrm{II\,II}}-\alpha I \end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} - & \cdots & - & + & \cdots & + \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ - & \cdots & - & + & \cdots & + \\ \hline + & \cdots & + & - & \cdots & - \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ + & \cdots & + & - & \cdots & - \end{array}\right]$$

を得る。

さて定理1は，Aが正のサイクルをもち，しかもその連結性がもっとも緊密な場合についても，定性逆行列が存在しうることを尖鋭に示すものであるが，以下では一歩退いてその仮定をやや緩め，Aの元素のなかにゼロのものが混っていてもいい場合に議論を拡張する。ふたたび $n>2$ の場合を前提して，つぎの定理が成立つことを証明しよう。

定理2[8] Aは安定な行列で，分解不可能であり，かつその対角元素はすべて負，そして長さ2以上のサイクルのなかには正のものがあるとする。そのときAが安定性の下で定性的に可逆となるための必要かつ十分条件は，それが reduce された森嶋行列となることである。

定理そのものの証明に立入る前に，それがもとづく重要命題を，二つの補助定理の形であらかじめ証明しておく。

補助定理3[9] Aは安定な行列で，その対角元素はすべて負であるとする。そのときAが安定性の下で定性逆行列をもちうるためには，同じ添数 i，j をもつ非ゼロのチェイン $a(i\to j)$ のなかに異符号のものがあってはならない。

証明

余因数 A_{ji} の展開式にあらわれる二つのチェイン $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots\cdots a_{i_pj}$ および $a_{ij_1}a_{j_1j_2}\cdots\cdots a_{j_qj}$ が互いに異符号であったとする。そのとき$B, C\in Q_A$ を選んで，それぞれ

$$b_{ii},\ c_{ii}=-2\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$(9)\quad |b_{ii_1}|=|b_{i_1i_2}|=\cdots\cdots=|b_{i_pj}|=1$$

$$|c_{ij_1}|=|c_{j_1j_2}|=\cdots\cdots=|c_{j_qj}|=1$$

とし，他の非ゼロ元素は絶対値において十分小となるようにすれば，BもCも優対角行列となるから，$B, C\in S_A$ である。

ところでB, Cの上記のつくり方から，B_{ji}, C_{ji} の符号は，それぞれその展開式中のチェイン$b_{ii_1}b_{i_1i_2}\cdots\cdots b_{i_pj}$, $c_{ij_1}c_{j_1j_2}\cdots\cdots c_{j_qj}$ を含む項が支配するが，これらのチェインが異符号であれば，それらを含む項もまた異符号となることが容易に確かめられる。よって

$$(10)\quad \mathrm{sgn}\ B_{ji}\neq \mathrm{sgn}\ C_{ji}$$

注(8) *op. cit.*, p. 554, Corollary.
(9) *op. cit.*, pp. 552-553, Lemma 6.

であり，sgn$|B|$=sgn$|C|\neq 0$ であるから

(11) $C^{-1}\notin Q_{B^{-1}}$

となって，Aが定性逆行列をもつという仮定と矛盾する。

補助定理4[10]　Aは安定な行列で，分解不可能，かつその対角元素はすべて負であるとする。そのときAが安定性の下で定性逆行列をもつためには，長さ2以上の非ゼロのサイクルのなかに異符号のものがあってはならない。

証明

帰謬法によるとし，Aが負のサイクル $a(i\to j)a_{ji}$ と正のサイクル $a(p\to q)a_{qp}$ をともにもったと仮定しよう。以下ではこれら二つのサイクルが (i) 2個以上の添数を共有する場合，(ii) 1個の添数のみを共有する場合，(iii)何ら添数を共有しない場合，の三つを分け，(i)(ii)の場合はいずれも不合理が生じ，かつ(iii)の場合はありえないことを示す。

(i)上記のサイクルに共通の添数が少くとも2個あったとして，それらをs，tとしよう。いま$a(i\to j)a_{ji}$については$i\to s\to t\to j$を$(s\to t)(t\to j\to i\to s)$に置き換えて，$a(i\to j)a_{ji}=a_N(s\to t)a_N(t\to s)$と記すとし，同様に$a(p\to q)a_{qp}$のほうも$a(p\to q)a_{qp}=a_P(s\to t)a_P(t\to s)$と記す。するとこれらが異符号であれば$A_{st}$か$A_{ts}$のいずれかが同じ添数をもつ異符号のチェインを含むことになり，補助定理3からAは定性逆行列をもちえないことになって，仮定に反する。

(ii)つぎに二つのサイクルに共通の添数がただ1個kのみであるとし，添数をつけ変えて負のサイクルを$a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{k-1,k}a_{k1}$，正のサイクルを$a_{k,k+1}a_{k+1,k+2}\cdots\cdots a_{rk}$とする。ふたたび$B$，$C$を$Q_A$から選んで，$B$はすべての$i$について$b_{ii}=-1$，非ゼロの$b_{ij}\ (i\neq j)$は絶対値において十分小となるように定めるとしよう。するとBは優対角行列となるから，$B\in S_A$であり，sgn $B_{ii}=(-1)^{n-1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$である。他方$C$については，$k$を除くすべての$i$について$c_{ii}=-1$，そして，

$$
(12)\quad \begin{aligned} &|c_{12}|=|c_{23}|=\cdots\cdots=|c_{k1}|=1 \\ &|c_{k,k+1}|=|c_{k+1,k+2}|=\cdots\cdots=|c_{rk}|=1 \end{aligned}
$$

と定め，またc_{kk}ならびに他の非ゼロの$c_{ij}\ (i\neq j)$は絶対値において十分小となるように定めるとする。するとCは優対角行列とはならないが，その主座小行列式の nested sequence が存在して，i次の主座小行列式の符号はそれぞれ$(-1)^i$となることが確かめられる。[11] ゆえにフィッシャー＝

注(10)　*op. cit.*, pp. 553-554, Lemma 7.

(11)　$i=1,2,\cdots\cdots,k-1$ までの主座小行列式については，対角元素の積の項がその値を律するから，$(-1)^i$の符号をとることは自明。k次の主座小行列式については，それを第1列について展開し，$c_{12}c_{23}\cdots\cdots c_{k1}$が負であることを考慮すれば，$(-1)(-1)^{k-2}c_{kk}+(-1)^{k+1}(-1)+$ other terms すなわち $(-1)^k+(-1)^{k-1}c_{kk}+$other terms となり，ふたたび$(-1)^k$の項がその符号を決定する。$k+1$次以降n次までの主座小行列式については，それをそれぞれ最後の列について展開すれば，その符号が一つ前の主座小行列式の符号に-1をかけたものになることが明らかとなる。

フラーの定理[12]が援用でき，ある正の対角行列Dに対して $DC \equiv E$ は安定となる。

こうして上記のようにつくられた B, E はいずれも S_A に含まれるが，上に見たように B_{ii} の符号がかならず $(-1)^{n-1}$ となるのに対して，E_{ii} $(i \neq k)$ の符号はC_{kk} と他の項との相対関係に依存して不定であり，したがって

(13) $E^{-1} \notin Q_B^{-1}$

となって，不合理が生じる。

(iii)最後にAのどんな負のサイクルと正のサイクルのあいだにも共通の添数がないとしてみよう。いま任意の負，正のサイクルの添数をつけ変えて

(14)
$$a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{r-1,r}a_{r1} < 0$$
$$a_{r+1,r+2}\cdots\cdots a_{s-1,s}a_{s,r+1} > 0$$

とする。

すると分解不可能性の仮定から，どの$i \in \{1, 2, \cdots\cdots, r\}$，$j \in \{r+1, \cdots\cdots, s\}$についても非ゼロのチェイン$a(i \to j)$ が存在しなければならず，したがっていまもしそれらの i, j について $a_{ji} \neq 0$ であるとすれば，非ゼロのサイクル $a(i \to j)a_{ji}$ があって，その添数のなかに上記の二つのサイクルの添数と共通のものがあることになる。これは明らかに矛盾である。よってその種の可能性が起きないためには

(15) $a_{ji}=0$ for all $i \in \{1, \cdots\cdots, r\}$, $j \in \{r+1, \cdots\cdots, s\}$

となるのでなくてはならない。

ところで(15)を考慮にいれれば分解不可能性の仮定から$i \in \{1, \cdots\cdots, r\}$，$j \in \{s+1, \cdots\cdots, n\}$の$a_{ji}$がすべてゼロとなることは不可能であり，また同様の理由で$i \in \{r+1, \cdots\cdots, s\}$，$j \in \{s+1, \cdots\cdots, n\}$の$a_{ji}$ がすべてゼロとなることも不可能である。ところが当面の仮定の下では，後者を認めれば決して前者を認めることができず，したがって矛盾が生じることを以下で示す。

まず $i \in \{r+1, \cdots\cdots, s\}$，$j \in \{s+1, \cdots\cdots, n\}$ の a_{ji} には少くとも1個は非ゼロのものがなくてはならないのであるから，添数をつけ変えてその非ゼロ元素を $a_{s+1,r+1}$ とする。そしていま $i \in \{1, \cdots\cdots, r\}$ についてある $a_{s+1,i}$ が非ゼロであったら矛盾が生じることを示すことにしよう。前の議論と同様，分解不可能性の仮定から $i \in \{1, \cdots\cdots, r\}$ から $s+1$ に向う非ゼロのチェイン$a(i \to s+1)$を選ぶことができるから，それに $a_{s+1,i}$ をかけたサイクル $a(i \to s+1)a_{s+1,i}$ を考えれば，これはそのつくり方から当然非ゼロである。他方同様に非ゼロのチェイン$a(r+1 \to s+1)$ を選び，それに上記の非ゼロ元素 $a_{s+1,r+1}$ をかけてサイクル $a(r+1 \to s+1)a_{s+1,r+1}$ をつくれば，このサイクルもまた非ゼロであることはいうまでもない。こうしてこれら二つのサイクルはともに非ゼロであ

注(12) フィッシャー＝フラーの定理については，福岡「市場均衡の安定性 III」，『三田学会雑誌』1975年6月号，p. 10を参照。

り，しかもともに同じ添数 $s+1$ を含むから，それらはすでに見たように互いに異符号となることはできず，ともに正となるかともに負となるかのいずれかでしかない。ところが $i\in\{1, \cdots\cdots, r\}$ である以上，$a(i\to s+1)a_{s+1,i}$ は(14)の負のサイクル $a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{r-1,r}a_{r1}$ と添数を共有するから，$a(i\to s+1)a_{s+1,i}$ と $a(r+1\to s+1)a_{s+1,r+1}$ とがともに正であることはありえない。また同様に $a(r+1\to s+1)a_{s+1,r+1}$ は(14)の正のサイクル $a_{r+1,r+2}\cdots\cdots a_{s-1,s}a_{s,r+1}$ と添数を共有するから，当該の二つのサイクルがともに負であることもありえない。よって帰謬法の仮定——ある $i\in\{1\cdots\cdots r\}$ について $a_{s+1,i}\neq 0$——は偽でなくてはならず，

(16) $a_{s+1,i}=0$ for all $i\in\{1, \cdots\cdots, r\}$

が導かれたことになる。

つぎに(16)が成立すれば，ふたたび分解不可能性の仮定からすべての $i\in\{r+1, \cdots\cdots, s\}$, $j\in\{s+2, \cdots\cdots, n\}$ について $a_{ji}=0$ となることはできず，そこで非ゼロ元素を $a_{s+2,h}$, $h\in\{r+1, \cdots\cdots, s\}$ としてサイクル $a(i\to s+2)a_{s+2,i}$ $(i\in\{1, \cdots\cdots, r\})$ と $a(h\to s+2)a_{s+2,h}$ $(h\in\{r+1, \cdots\cdots, s\})$ をつくれば，まったく同様の推論をつうじて，こんどは

(17) $a_{s+2,i}=0$ for all $i\in\{1, \cdots\cdots, r\}$

とならねばならないことが分る。以下類似の議論を繰返していって，結局 $\{s+1, \cdots\cdots, n\}\times\{1, \cdots\cdots, r\}$ のブロックの元素は全部ゼロとならねばならないことになり，(15)とあわせて A が分解不可能という仮定に反する結果が導かれた。

定理2の証明

必要性。すでに補助定理2として証明したところから，A が長さ2以上の負のサイクルをもたなければよいわけであるが，これは A が長さ2以上の正のサイクルをもつという仮定と，上に証明した補助定理4からただちに明らかである。

十分性。定理1の十分性の証明は，A がゼロ元素を含んでいても分解不可能なら同様に適用できる。

さて以上の定理によって，純粋に定性的な情報のみからは定性逆行列をもちえないが，安定性の仮説の下ではそれをもちうる定性行列のクラスが明らかとなった。すなわち一般の次数の場合についていうかぎり，それは reduce された森嶋行列のみから成るクラスであり，換言すれば長さ2以上のサイクルがすべて非負となる行列のみから成るクラスである。こうして定性的に可逆な行列のクラスとしては，長さ2以上の非ゼロのサイクルがすべて負であるかあるいはすべて正であるかの二つのクラスしか存在しないことになり，正負のものをともに含む行列のメンバーは除かれることになる。

そこでつぎの問題は，このように安定性の仮定を付加した場合，非正のサイクルのみをもつ行列

の定性的可逆性についてその可能性がいくばくか拡大されうるかどうかである。バセット＝メイビー＝カークは，この問いに対する答がノーであること，すなわちこのクラスの行列は，純粋に定性的な情報の下で定性的に可逆となる場合にのみ，安定性の下でも定性的に可逆となるにすぎないこと，を明らかにした。つぎに彼らの定理とその証明を掲げておく。

定理3[13]　Aは分解不可能で，その対角元素はすべて負であり，また長さ2以上のサイクルのなかには負のものがあるとする。そのときS_Aに属する行列が定性的に可逆となるための条件は，Q_Aに属する行列が定性的に可逆となるための条件とまったく同値である。

証明

Aが安定で，定性的に可逆であれば，補助定理3からその非ゼロのチェイン$a(i\to j)$はすべて同符号とならねばならない。またすべての対角元素a_{ii}が負であるところから，Aの長さ$n-1$以下のサイクルはすべて非正となるのでなければならない。[14]

するとこれらの帰結と定理の仮定とから，Aの長さnのサイクルもまたかならず非正となることを証明することができる。[15] 事実いま長さnのサイクルのなかに正のものがあったとすれば，このサイクルのなかには入らない元素で非ゼロのものが少くとも1個はなくてはならない。なぜなら仮定からAは長さ$2\leqq p\leqq n$の負のサイクルを少くとも1個はもっていなければならないからである。そこで，そのような非ゼロ元素をいまa_{ij}とし，その(i, j)について余因数A_{ji}を考えてみると，A_{ji}の展開式のなかには$(-1)\ a_{ij}\prod_{h\neq i,j}a_{hh}$のような項と$(-1)^p\ a(iIj)\prod_{k\notin I}a_{kk}$のような項とがかならず含まれている。ただしここで$I$は当該の正のサイクルからとられた$p$個の添数$i_1, i_2,$ ……，i_pの集合をあらわす。そしてa_{ij}と$a(iIj)$はいずれもAの非ゼロのチェインをなしているから，それらは仮定からかならず同符号，すなわち

(18) $\mathrm{sgn}\ a_{ij} = \mathrm{sgn}\ a(iIj)$

となるのでなくてはならない。

ところで上記の正のサイクルのi_1，……，i_p以外の添数の集合をJ，その成分をi_{p+1}，……i_qとする。すると$a(jJi)$は当然非ゼロのチェインをなしているから，a_{ij}と$a(jJi)$の積は非ゼロのサイクルをなす。すなわち

(19) $a_{ij}\ a(jJi)\neq 0$

である。ところが仮定によって$a(iIj)$と$a(jJi)$とは同符号で，しかもそれらは非ゼロであるから

(20) $a(iIj)\ a(jJi)>0,$

注(13) Bassett, Maybee, and Quirk, *op. cit.*, pp. 554-555, Lemma 8 および Theorem 6.

(14) *op. cit.*, p. 551, Lemma 4.

(15) *op. cit.*, pp. 554-555, Lemma 8.

ゆえに⒅と⒇から $a_{ij}\ a(jJi)>0$ となり，これで長さ $n-1$ 以下のサイクルがすべて非正という仮定と矛盾する結果が生じた。[16]

以上の議論によってAのすべてのサイクルが非正，またすべてのチェインが弱い意味で同符号となったわけであり，これはAが安定性の仮定とは無関係に，定性逆行列をもつための条件にほかならない。

十分性。$S_A \subset Q_A$ であるところから，自明である。

4　以上のところでAが安定である場合に，その定性逆行列が確定するための条件が明らかとなった。つぎの課題は，これにもとづいて本来の目標である定性的可解性の条件を究明することである。しばらくのあいだ，Aが安定でその対角元素がすべて負という想定は満たされつづけるものとする。

まず最初にパラメターの変化が1度に1個の均衡方程式のみを動かす場合すなわち $b_k \neq 0,\ b_i=0$ $(i \neq k)$ の場合を考えることにしよう。その場合にはA^{-1}の第k列の符号のみが確定していれば，完全な定性的可解性が成立することはいうまでもない。ところでAが安定であれば $\mathrm{sgn}\ |A|=(-1)^n$ であるから，上記の条件はAの第k行元素の余因数A_{ki} $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ がすべて確定した符号をもつこととまったく同値である。

A_{kk} が定符号をもつための必要条件は，前節補助定理4の(ii)の推論をそのまま援用することによって容易に導くことができる。事実いまAの長さ2以上の，添数kを含む負のサイクルが，A_{kk} のある正のサイクルと共通の添数をもったとすれば，(ii)の場合と同様，A_{kk} の符号の不定となることがただちに分る。よってA_{kk}が定符号となるためには，上記の可能性が生じてはならないのである。それからまたA_{ki} $(i \neq k)$が定符号をもつために必要な条件も，同じく前節補助定理3ですでに示されたところであるから，これらの結果をすべてまとめてつぎの定理を得ることができる。

定理4[17]　Aは安定な行列で分解不可能，かつその対角元素はすべて負であるとする。またbは $b_k \neq 0,\ b_i=0$ $(i \neq k)$ の条件を満たしているものとする。そのとき $Ay=b$ が定性的に可解であるためには，

(i)Aの長さ2以上の負のサイクルが A_{kk} の正のサイクルと共通の添数をもたないこと

(ii)それぞれの添数の対 $(i,\ k)$ について A_{ki} のどのチェイン $a\ (i \rightarrow k)$ も弱い意味で同符号となること

の双方が満たされねばならない。

他方 A_{ki} $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ が定符号をとるための十分条件については，すでに前に述べたとこ

注(16)　$a\ (iIj)$ は $i \neq j$ である以上当然長さは2以上，ゆえに$a\ (jJi)$ は，$I \cap J=\emptyset$ である以上長さは $n-2$ 以下であり，よってそれに a_{ij} がかかっても長さは $n-1$以下である。

(17)　*op. cit.*, p. 558, Theorem 9′.

ろから明らかであるが，一応一括して再述しておけば，つぎのごとくである。

定理5[18] Aは安定な行列で分解不可能，かつその対角元素はすべて負であるとする。またbは $b_k \neq 0$, $b_i=0$ $(i \neq k)$ の条件を満たしているものとする。そのとき

(i)Aが reduce された森嶋行列であること

(ii)A_{kk}の長さ2以上のサイクルがすべて非正，かつ A_{ki} $(k \neq i)$ のすべてのチェイン $a(i \rightarrow k)$ が弱い意味で同符号となること

のいずれかが満たされれば，$Ay=b$ は定性的に可解である。

この定理から明らかなように，A_{kk} が正のサイクルを含む場合には，結局森嶋行列の事例が完全な比較静学情報を保証する唯一可能なクラスとなるであろう。

つぎにより一般的にbの成分のうちm個のものすなわち b_{i_1}, b_{i_2}, ……, b_{i_m} が非ゼロである場合を考察することにしよう。この場合にはもし必要なら方程式の番号をつけ変えることによって，$r=1, 2,$ ……, s については $b_{i_r}>0$, $r=s+1$, ……, m については $b_{i_r}<0$ となるようにできるから，$Ay=b$ の定性的可解性は，明らかに A^{-1} の第i_1列，……第i_s列が同一の符号のパターンをとり，また第 i_{s+1} 列，……，第i_m列が同一の，しかし第i_1列，……，第i_s列とは反対の符号パターンをとるとき，そしてそのときにのみ成立する。いまこれを非負のサイクルをもつ行列の場合についてまとめておけば，

定理6[19] Aは安定な行列で分解不可能，かつその対角元素はすべて負で，かつ長さ2以上のサイクルのなかに正のものがあるとする。そのとき $Ay=b$ が定性的に可解となるための必要かつ十分条件は，行および列の適当な番号換えののちA, b が $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ に変換され，そこで $\tilde{A}$ がkで分割されるreduceされた森嶋行列となること，かつ $\tilde{b}_1$, ……, $\tilde{b}_k$ が弱い意味で同符号となり，また $\tilde{b}_{k+1}$, ……, $\tilde{b}_n$ も同じく弱い意味で同符号，ただし $\tilde{b}_1$, ……, $\tilde{b}_k$ とは逆符号となること，である。

他方 A のサイクルがすべて非正である場合には，$Ay=b$ の定性的可解性は，bがたかだか1個の非ゼロ成分をもつ場合にのみ成立するにすぎない。すなわち

定理7[20] Aは安定な行列で分解不可能，その対角元素はすべて負で，かつ長さ2以上のサイクルのなかには負のものがあるとする。加えてAが定性逆行列をもつとすれば，$Ay=b$ が定性的に可解であるための必要かつ十分条件は，bの非ゼロ元素がたかだか1個しかないことであ

注(18) *op. cit.*, p. 558, Theorem 9.

(19) *op. cit.*, p. 559, Theorem 10.

(20) *op. cit.*, p. 559, Lemma 10, p. 560, Theorem 11. 同種の定理は A がQ安定性を満たす場合については，すでに証明されている。前稿定理5参照。

る。

証明

A^{-1} の各列 $A_{(i)}$ が互いに同じ符号のパターンをもたないこと，すなわちすべての $i \neq j$ についてかならず $\mathrm{sgn}\ A_{(i)} \neq \mathrm{sgn}\ A_{(j)}$ となることをいえばよい。

事実いまある (i, j) の対について $\mathrm{sgn}\ A_{(i)} = \mathrm{sgn}\ A_{(j)}$ であったとして，一般性を失うことなくそれが第1列，第2列であるとしよう。つまり $\mathrm{sgn}\ A_{(1)} = \mathrm{sgn}\ A_{(2)}$ であるとする。するとAの余因数行列 $[A_{ij}]$ において

(21) $\mathrm{sgn}\ A_{i1} = \mathrm{sgn}\ A_{i2}\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

である。定理の仮定の下においては $\mathrm{sgn}\ A_{ii} = (-1)^{n-1}$ であるから，(21)から明らかに

(22) $\mathrm{sgn}\ A_{12} = \mathrm{sgn}\ A_{21} = (-1)^{n-1}$

となり，したがって a_{12}, a_{21} が非ゼロの場合には $\mathrm{sgn}\ A_{12} = (-1)^n\ \mathrm{sgn}\ a_{12}$, $\mathrm{sgn}\ A_{21} = (-1)^n\ \mathrm{sgn}\ a_{21}$ が成立つところから，(21)

(23) $a_{12} \leqq 0,\ a_{21} \leqq 0$

となる。ゆえに補助定理3から

(24) $a(1\rightarrow 2) \leqq 0, \quad a(2\rightarrow 1) \leqq 0$

となるのでなくてはならない。

ところで仮定の下では，補助定理4からAの長さ2以上のサイクルはすべて非正となるから，$a_{12}a_{21} > 0$ となることはできず，したがって(23)から a_{12}, a_{21} のいずれかはゼロとならねばならない。そこでいま $a_{12}=0$, $a_{21}<0$ とする。すると分解不可能性の仮定から非ゼロのチェイン $a(1\rightarrow 2)$ がかならず存在し，(24)からこれは厳密に負とならねばならないから，

(25) $a(1\rightarrow 2)\, a_{21} > 0$

となって，矛盾が生じる。よって $a_{12} = a_{21} = 0$ となるほかはない。

つぎにすべてのチェイン $a(1\rightarrow 2)$, $a(2\rightarrow 1)$ もまたすべて0となることを主張する。すると分解不可能性と相反するから，定理が成立することになる。

いま非ゼロのチェイン $a(2\rightarrow 1)$ があったとして，それを $a_{2i_1}\ a_{i_1i_2} \cdots\cdots a_{i_m1}$ と特定化しよう。少くとも $a_{21} \leqq 0$ である以上 $a(2\rightarrow 1) \leqq 0$ でなくてはならず，したがって想定から $a_{2i_1}\ a_{i_1i_2} \cdots a_{i_m1} < 0$。他方分解不可能性から非ゼロのチェイン $a(1\rightarrow 2)$ が存在し，それは(24)から負であるから，

(26) $a_{2i_1}\ a_{i_1i_2} \cdots\cdots a_{i_m1}\ a(1\rightarrow 2) > 0,$

ゆえにAのすべてのサイクルが非正である以上，これはサイクルであることはできず，よって $a_{2i_1}\ a_{i_1i_2} \cdots\cdots a_{i_m1}$ の添数 $i_1, i_2, \cdots\cdots i_m$ のなかのあるものは $a(1\rightarrow 2)$ の添数のなかにも現われるの

注(21) 前稿，定理5参照。

でなくてはならない。いまそのようにいずれのチェインにも現われる添数のうち最後のものをi_rとすれば，(26)の左辺は

(27) $a_{2i_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_{r-1}i_r}\ a_{i_ri_{r+1}}\cdots a_{i_m1}\ a(1\to i_r)\ a(i_r\to 2)$

と書け，ここで i_{r+1} から i_m までにはダブる添数は現われないから，$a_{i_ri_{r+1}}\cdots a_{i_m1}\ a(1\to i_r)$ は明らかにAのサイクルとなる。そしてそれはいうまでもなく非ゼロであるから，

(28) $a_{i_ri_{r+1}}\cdots\cdots a_{i_m1}\ a(1\to i_r)<0$

であり，よって(27)と(28)から

(29) $a_{2i_1}a_{i_1i_2}\cdots\cdots a_{i_{r-1}i_r}\ a(i_r\to 2)<0$

を得る。他方(21)から $A_{ir1}\ A_{ir2}\geqq 0$, したがって $a_{ir_1}a_{ir_2}\geqq 0$ であるから，前と同様の理由で

(30) $a_{i_ri_{r+1}}\cdots\cdots a_{i_m1}\ a(i_r\to 2)>0$

がいえる。ところが想定から

(31) $a_{2i_1}\cdots\cdots a_{i_{r-1}i_r}\ a_{i_ri_{r+1}}\cdots\cdots a_{i_m1}>0$

であったから，(30)の下では(29)と(31)とがともに成立するのは不合理である。

こうして長さ2以上の負のサイクルをもつ行列の場合は，“conjugate pairs case”の比較静学命題は導き出せるが，より一般的なそれは導き出せない。加えてAが定性逆行列をもつという仮定は，この場合，安定性が満たされても満たされなくてもAが定性逆行列をもつための条件を意味するから（定理3），きわめて制約的であるといわざるをえない。したがって結局，対応原理の有用性がいくばくなりとも生きてくるケースは，すべて非負のサイクルをもつ行列すなわち森嶋行列のクラスに限定されるというべきであろう。

5　ここで安定性の仮説と並んで比較静学法則のもう一つの源泉となる最大化仮説について，その定性経済学的含意を若干考察しておくことにしよう。最大化仮説というのは，いうまでもなく当該のモデルの均衡点がある関数の最大値を達成しているという仮説である。いま $f(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ \alpha)$ を連続微分可能な実数値関数とし，$\partial f/\partial x_i\equiv f_i$, $\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j\equiv f_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ などと記せば，fが$\alpha=\alpha^*$の下で $x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots\cdots,\ x_n^*)$ において最大値をとるための必要かつ十分条件は，よく知られているように

(32) $f_i(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ \alpha)=f_i^*=0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

(33) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^*h_ih_j<0$ for any $h=(h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots,\ h_n)\neq 0$

が満たされることである。ここで(32)を前稿の均衡条件(1)と考えれば，αが変化したときの x_i の均衡値の変化は，前稿の(2)とまったく同様

(34) $[f_{ij}^*]\left[\dfrac{dx_j}{d\alpha}\right]=-[f_{i\alpha}^*]$

を解くことによって，あるいは$[f_{ij}^*]\equiv[a_{ij}]\equiv A$, $-[f_{i\alpha}^*]\equiv[b_i]\equiv b$, $[dx_j/d\alpha]\equiv[y_j]\equiv y$ と書きあらためれば，

(35) $Ay=b$

を解くことによって求められる。

fが連続微分可能であれば $f_{ij}=f_{ji}$ が成立するから，Aは対称行列であり，また(33)からそれは負の定符号の行列である。したがっていま

$$M_A=\{B\mid B\in Q_A \text{ かつ}B\text{は対称で負の定符号}\}$$

と定義すれば，最大化仮説の下で $Ay=b$ が定性的に可解であるとは，$B\in M_A$, $c\in Q_b$, $Bz=c$ のときに $z\in Q_y$ となることを意味しており，またそのさいAが定性的に可逆であるとは，$B\in M_A$ のときに $B^{-1}\in Q_{A^{-1}}$ となることを意味している。

つぎに制約条件に服する最大化の場合も，議論はこれとアナロガスで，いま $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \alpha)$ と同じく連続微分可能な $g(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \alpha)$ について $g=0$ の下でfを最大化する場合を考えれば，それは周知のようにラグランジュの関数 $L=f+\lambda g$ を最大化することと同値である。そこで $\partial L/\partial x_i\equiv L_i$, $\partial L/\partial\lambda\equiv L_\lambda$, $\partial^2 L/\partial x_i\partial x_j\equiv L_{ij}$ などと記せば，fが $\alpha=\alpha^*$, $x=x^*$ で $g=0$に服しつつ最大値をとるための必要かつ十分条件は，

(36) $L_i(x, \lambda, \alpha)=L_i^*=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

(37) $L_\lambda(x, \lambda, \alpha)=L_\lambda^*=0$

(38) $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n L_{ij}^* h_i h_j<0$ for any $h=(h_1, \cdots\cdots, h_n)\neq 0$ such that $\sum_{i=1}^n g_i h_i=0$

のように書きあらわせ，αの変化に応ずる x_i, λ の均衡値の変化は

(39) $$\left[\begin{array}{c|c} L_{ij}^* & g_j^* \\ \hline g_i^* & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\dfrac{dx_j}{d\alpha}\\ \hline \dfrac{d\lambda}{d\alpha}\end{array}\right]=-\left[\begin{array}{c}L_{i\alpha}^*\\ \hline L_{\lambda\alpha}^*\end{array}\right]$$

を解くことによって求められる。したがって前と同様(39)の行列とベクトルとを

(40) $$\left[\begin{array}{c|c} L_{ij}^* & g_j^* \\ \hline g_j^* & 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & a_{0j} \\ \hline a_{0j} & 0\end{array}\right]=\hat{A},\quad -\left[\begin{array}{c}L_{i\alpha}^*\\ \hline L_{\lambda\alpha}^*\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}b_i\\ \hline b_0\end{array}\right]=\hat{b}$$

$$\left[\begin{array}{c}\dfrac{dx_j}{d\alpha}\\ \hline \dfrac{d\lambda}{d\alpha}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}y_j\\ \hline y_0\end{array}\right]=\hat{y}$$

と略記することによって，(35)に準じた

(41) $\hat{A}\hat{y}=\hat{b}$

を得る。

ここで $\hat{A}$ は制約条件 $g=0$ の下で負の定符号をとる対称行列であり，制約条件なしの場合の A の r 次の主座小行列式が $(-1)^r$ の符号をとるのと平行して $\hat{A}=\left[\begin{array}{c|c} A & a_0 \\ a_0' & 0 \end{array}\right]$ の A の部分から r 個の行と列を選んでできる $r+1$ 次の縁つき主座小行列式は $r=2, \cdots\cdots, n$ のすべてにわたって $(-1)^r$ の符号をとる。[22] それゆえ

$$\hat{M}_{\hat{A}}=\{\hat{B} \mid \hat{B} \in Q_{\hat{A}} \text{ かつ } \hat{B} \text{ は対称で制約条件の下で負の定符号}\}$$

と定義すれば，制約条件つき最大化の仮説の下で $\hat{A}\hat{y}=\hat{b}$ が定性的に可解であるとは，$\hat{B} \in \hat{M}_{\hat{A}}$, $\hat{c} \in Q\hat{b}$, $\hat{B}\hat{z}=\hat{c}$ のときに，$\hat{z} \in Q\hat{y}$ となることをいい，$\hat{A}$ が定性的に可逆であるとは，$\hat{B} \in \hat{M}_{\hat{A}}$ のときに $\hat{B}^{-1} \in Q_{\hat{A}^{-1}}$ となることをいう。

以下，上記の最大化仮説の下での定性的可解性，可逆性の問題を，制約条件なしの場合と制約条件つきの場合のそれに分けて順次にとりあげていくことにしよう。まず前者については議論は簡単で，A が対称で負の定符号であるところから，それは明らかに安定な行列であり，$M_A \subset S_A$，よって S_A について成立つ定理は M_A についてもすべて同様に成立つことが明らかである。したがって，対称性から $a_{ij}a_{ji} \geqq 0$ であること，すなわち A の長さ 2 のサイクルは負とはなりえないことを考慮し，加えて負の定符号性から対角元素 a_{ii} はすべて負となることを考慮すれば，ふたたび $n>2$ の場合については，定理 2 の系としてつぎの定理が成立する。

定理 8　A が分解不可能なら，最大化仮説の下で A が定性的に可逆となるための必要かつ十分条件は，それが reduce された森嶋行列となることである。

またもし A が分解可能であるとすれば，カーク＝ラッパート[23]が示したように，定理の主張はやや一般化されて，A が分解不可能な正方行列の対角ブロック

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}$$

の形に分割され，各ブロックの A_k がそれぞれ reduce された森嶋行列となることと改められる。

つぎに $Ay=b$ の定性的可解性については，同じく前の定理 6 が基本となり，それに準じてつぎの定理が成立する。

定理 9[24]　A が分解不可能であるとき，最大化仮説の下で $Ay=b$ が定性的に可解となるため

注(22) P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, pp. 377-378.

(23) J. Quirk and R. Ruppert, "Maximization and the Qualitative Calculus," in J. Quirk and A. Zarley ed., *Papers in Quantitative Economics*, 1968, pp. 79-80, Theorem 1.

(24) Quirk and Ruppert, *op. cit.*, pp. 80-81, Theorem 2 の Corollary.

の必要かつ十分条件は，行および列の適当な置換ののち，A, b が $\tilde{A}$, $\tilde{b}$ に変換され，ここで $\tilde{A}$がkにおいて分割される reduce された森嶋行列となること，かつ $\tilde{b}_1$, ……, $\tilde{b}_k$ が弱い意味で同符号となり，$\tilde{b}_{k+1}$, ……, $\tilde{b}_n$ が同じく弱い意味で同符号，ただし $\tilde{b}_1$, ……, $\tilde{b}_k$ とは逆符号となること，である。

この場合もAが分解可能であれば，定理9の条件はやや緩和されて，Aの少くとも1個の分解不可能なブロックと，それに対応するbの部分とが定理の仮定を満たし，他のbの成分はすべてゼロとすればよい。[25]

転じて制約条件つき最大化の場合に移るが，この場合の定性的可逆性，可解性については，遺憾ながら以下に示すようなきわめて限定的な結果しか主張することができない。まず可逆性については

定理10[26] $\hat{A}=\left[\begin{array}{c|c} A & a_0 \\ \hline a_0' & 0 \end{array}\right]$ で a_0 の成分がすべて非ゼロであるとき，制約条件つき最大化の仮説の下で $\hat{A}$ が定性的に可逆となるための必要かつ十分条件は，A が対角行列となることである。

証明

必要性。帰謬法によるとし，いまある i, j $(i\neq j)$ について $a_{ij}\neq 0$ であるとして，iを1に，jを2に添数換えする。するとAは対称的であるから，$a_{12}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$ である。

さて $\hat{B}\in Q_{\hat{A}}$ のような $\hat{B}=\left[\begin{array}{c|c} B & b_0 \\ \hline b_0' & 0 \end{array}\right]$ を選び，すべての i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$について $b_{ii}=-1$，またすべての i, j $(i\neq j,\ i, j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ について非ゼロの b_{ij} は絶対値において十分小となるように定めるとしよう。するとBはいうまでもなく負の定符号となるから，$\hat{B}\in \hat{M}_{\hat{A}}$であり，また第 $n+1$行第 $n+1$列の元素0の余因数 $\hat{B}_{n+1,n+1}=|B|$ の符号は $(-1)^n$ となる。

同様に $\hat{C}\in Q_{\hat{A}}$ のような $\hat{C}=\left[\begin{array}{c|c} C & c_0 \\ \hline c_0' & 0 \end{array}\right]$ を選んで，すべての i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ について $c_{ii}=-1$, $|c_{12}|=|c_{21}|=2$, $|c_{01}|=1$, $|c_{02}|=1/4$, 他のすべての非ゼロの c_{ij} $(i\neq j)$ は絶対値において十分小となるように定めるとする。するとCは負の定符号ではないが，そのr個の行，列を含む縁つき主座小行列式の符号はすべて $(-1)^r$ となるようにつくられているから，$\hat{C}\in \hat{M}_{\hat{A}}$である。ところが $\hat{C}_{n+1,n+1}=|C|$ の符号は $(-1)^{n-1}$ となり，したがって $\hat{C}^{-1}\notin Q_{\hat{B}^{-1}}$ となって，$\hat{A}$ は定性逆行列をもつことができない。

十分性。Aが負の対角行列であれば，その余因数の展開式はいずれも同符号の項から成り，したがって $\hat{A}^{-1}$ の各元素は非ゼロで，確定した符号をもつ。

注(25) Allingham and Morishima, "Qualitative Economics and Comparative Statics," p. 46.
(26) Quirk and Ruppert, *op. cit.*, pp. 83-84, Lemma 3 および Theorem 3. Lemma 3 の証明については p. 94 参照。

つぎに定性的可解性については，ふたたび $n>2$ の場合について

定理11[27] $\hat{A}=\left[\begin{array}{c|c} A & a_0 \\ \hline a_0' & 0 \end{array}\right]$ で a_0 の成分がすべて非ゼロであるとき，制約条件つき最大化の仮説の下で $\hat{A}\hat{y}=\hat{b}$ が定性的に可解となるための必要かつ十分条件は，A が対角行列で，かつ $\hat{b}$がたかだか1個の非ゼロ成分をもつことである。

証明

必要性。任意の i，j $(i\neq j)$ について $a_{ij}\neq 0$ であるとして，$\hat{A}^{-1}$ のどの列も符号が不定の元素をもつことをいえばよい。そこで前と同様 i，j を1，2に添数換えすれば，Aは対称行列であるから，$a_{12}\neq 0$, $a_{21}\neq 0$ である。さて以下ではまず $\hat{A}^{-1}$ の第1列が符号不定の元素をもつことを，(i) $\mathrm{sgn}a_{21}=\mathrm{sgn}a_{01}a_{02}$ の場合と(ii) $\mathrm{sgn}a_{21}\neq\mathrm{sgn}a_{01}a_{02}$ の場合とに分けて示すことにする。

(i) 元素 a_{12} に関する $\hat{A}$ の余因数 $\hat{A}_{12}$ は

(42) $\hat{A}_{12}=(-1)^{1+2}\{(-1)\ a_{21}a_{0n}{}^2a_{33}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}+(-1)\ a_{01}a_{02}a_{33}\cdots\cdots a_{nn}+\text{other terms}\}$

のように書きあらわすことができるから，この点を考慮にいれて，いま$\hat{B}$を $Q_{\hat{A}}$ のなかからつぎの要領で特定化する。すなわち $b_{11}=-2$, $b_{ii}=-1$ $(i=2,\ \cdots,\ n)$, $|b_{12}|=|b_{21}|=1$, $|b_{0n}|=1$, そして他の非ゼロの b_{ij} $(i\neq j)$ はすべて絶対値において十分小となるように定めるとする。するとBは負の定符号となるから，$\hat{B}\in\hat{M}_{\hat{A}}$ で，かつ(42)から $\mathrm{sgn}\hat{B}_{12}=(-1)^{1+2}\ (-1)\ (-1)^{n-3}\ \mathrm{sgn}\ b_{21}=(-1)^{n+1}\ \mathrm{sgn}\ b_{12}$ となる。つぎに同様に$\hat{C}$を $Q_{\hat{A}}$ のなかから選んで $c_{ii}=-1$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $|c_{01}|=|c_{02}|=1$, 他の非ゼロの $c_{ij}(i\neq j)$ はすべて絶対値において十分小となるように定めるとする。すると C は B と同じく負の定符号となるから，$\hat{C}\in\hat{M}_{\hat{A}}$ であるが，(42)から $\mathrm{sgn}\hat{C}_{12}=(-1)^{1+2}\ (-1)\ (-1)^{n-2}\ \mathrm{sgn}c_{01}\ c_{02}=(-1)^{n+2}\ \mathrm{sgn}\ c_{12}$ となる。よって $\mathrm{sgn}\ a_{21}=\mathrm{sgn}\ a_{01}\ a_{02}$ の想定の下では $\mathrm{sgn}\ \hat{B}_{12}=\mathrm{sgn}\ \hat{C}_{12}$ となって，$\hat{A}^{-1}$ の第1列は符号不定の元素を含むことになる。

(ii) 他方 $\mathrm{sgn}\ a_{21}\neq\mathrm{sgn}\ a_{01}a_{02}$ の場合については，余因数 $\hat{A}_{13}$ を $\hat{A}_{12}$ の場合と同様

(43) $\hat{A}_{13}=(-1)^{1+3}\{(-1)\ a_{21}a_{02}a_{03}a_{44}\cdots\cdots a_{nn}+a_{01}a_{03}a_{22}a_{44}\cdots\cdots a_{nn}+\text{other terms}\}$

のように書きあらわす。その上でふたたび $Q_{\hat{A}}$ のなかから $\hat{B}$, $\hat{C}$ を選び，それらにおいて b_{02}, b_{03} および c_{01}, c_{03} 以外の縁の元素はそれらと相対的に十分に小さく，他の元素はすべて(i)と同じ要領で特定化するものとする。すると(43)から $\mathrm{sgn}\ \hat{B}_{13}=(-1)^{1+3}\ (-1)\ (-1)^{n-3}\ \mathrm{sgn}\,b_{21}\,\mathrm{sgn}\,b_{02}\ b_{03}$ となり，$\mathrm{sgn}\ \hat{C}_{13}=(-1)^{1+3}\ (-1)^{n-2}\ \mathrm{sgn}\ c_{01}\ c_{03}$ となるから，$\mathrm{sgn}\ a_{21}\neq\mathrm{sgn}\ a_{01}a_{02}$ であることを考慮にいれれば，$\mathrm{sgn}\ \hat{B}_{13}\neq\mathrm{sgn}\ \hat{C}_{13}$ となってふたたび $\hat{A}^{-1}$ の第1列は符号不定の元素を含む。

つぎに $\hat{A}^{-1}$ の第2列に符号の定まらない元素があることも，まったく同様の推論をつうじて示すことができるから，反復は避ける。また第 $n+1$ 列にそのような元素があることは定理10の必要

注(27) Quirk and Ruppert, *op. cit.*, pp. 84-85, Lemma 4 および Theorem 4. Lemma 4 の証明については pp. 95-96 参照。

性の部分ですでに証明ずみである。

それゆえあと残るのは，第3列から第n列までの各列に符号不定の元素があることの証明のみである。そこでこんどは余因数 $\hat{A}_{j,n+1}$ ($j=3$, ……, n) を(42)や(43)になぞらえて

(44) $\hat{A}_{j,n+1}=(-1)^{j+n+1}\{(-1)^{n+j}\ a_{0j}\ a_{j+1,j+1}\cdots\cdots a_{nn}$

$[(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})a_{33}\cdots\cdots a_{j-1,j-1}]+\text{other terms}\}$

と書きあらわし，右辺の他の項は絶対値の小さな元素の積を含むところから，その大きさを相対的に無視しうることを考慮にいれれば，ふたたび定理10の場合と同じ$\hat{B}$, $\hat{C}\in\hat{M}_A$を定めることによって $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}=1-\varepsilon^2>0$, $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=1-4<0$, したがって sgn $\hat{B}_{j,n+1}\neq$ sgn $\hat{C}_{j,n+1}$となしうることが分る。よって$\hat{A}^{-1}$ の第j列 ($j=3$, ……, n)もまた符号不定の元素をもつことが知られたわけである。

十分性。定理10と$\hat{b}$に関する仮定から自明である。

ところで制約条件つき最大化の場合の定性的可解性については，つぎの二点に注意しておく必要があろう。まず第一に，この仮説の下で可解性に対して要求される条件はきわめてきびしいものであるが，これはアリンガム＝森嶋の指摘にもあるように,(28) 可解性の内容として $d\lambda/d\alpha$ の符号までをも含む完全な比較静学情報の獲得を要請しているからで，もし部分的な情報を得るに甘んずるとすれば，その限りではない。たとえばいま線型の制約条件 $p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_nx_n=m$ の下で関数 $u(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \alpha)$ を最大化する通常の消費者行動の事例を考え，これを前記の制約条件つき最大化の問題として定式化すれば，システム

(45) $$\left[\begin{array}{c|c} u_{ij} & p_i \\ \hline p_j & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} \dfrac{dx_j}{d\alpha} \\ \dfrac{d\lambda}{d\alpha} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} u_{i\alpha} \\ \hline 0 \end{bmatrix}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

を得る。(45)が定性的に解かれるためには，既述のようにすべての u_{ij} ($i\neq j$) が0とならねばならないわけであるが，他方制約条件から

(46) $$x_n=\frac{m}{p_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{p_i}{p_n}x_i$$

を求めて，これをu関数のなかに代入し，x_n を消去するとすれば，システム

(47) $$[v_{ij}]\left[\frac{dx_j}{d\alpha}\right]=-[v_{i\alpha}]\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

を得る。ここでいうまでもなく

(48) $$v(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n,\ \alpha)=u\left(x_1, x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1},\ \frac{m}{p_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{p_i}{p_n}x_i,\ \alpha\right)$$

であるから，

注(28) 以下の議論については Allingham and Morishima, *op. cit.*, pp. 46-47 にしたがう。

(49) $v_i = u_i - u_n \dfrac{p_i}{p_n}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

したがって

(50) $v_{ij} = u_{ij} - u_{in}\dfrac{p_j}{p_n} - u_{nj}\dfrac{p_i}{p_n} + u_{nn}\dfrac{p_i}{p_n}\dfrac{p_j}{p_n},\quad v_{i\alpha} = u_{i\alpha} - u_{n\alpha}\dfrac{p_i}{p_n}$

である。(47)は制約条件なしのシステムであるから，定理8で見たように $[v_{ij}]$ に課せられる要請は，それが reduce された森嶋行列であることだけにとどまり，非対角元素 u_{ij} に非ゼロのものがあっても別段に矛盾するところはない。要するに，一見このような喰い違いと思われる帰結が生じてくるのは，(45)の完全な可解性がすべての $dx_j/d\alpha$ ならびに $d\lambda/d\alpha$ の符号の確定を要求しているのに対して，(47)の可解性は $dx_j/d\alpha$ の符号の確定のみを要求しているにすぎないからなのである。ラグランジュ乗数の変化の方向は不要な情報であることが多いから，カーク＝ラッパートの非対角元素ゼロの条件は不当にきびしい制約を課するものということができるであろう。[29]

つぎに注意すべき第二の点は，最大化の対象となる関数に単調増加変換をほどこした場合に，当該の可解性条件が不変にとどまりうるかどうかということである。[30] たとえば上記の u 関数をその単調増加関数 $F(u)$ に変換すると，u_{ij}, $u_{i\alpha}$ はそれぞれ

(51)
$$\frac{\partial^2 F(u)}{\partial x_i \partial x_j} = F' u_{ij} + F'' u_i u_j$$
$$\frac{\partial^2 F(u)}{\partial x_i \partial \alpha} = F' u_{i\alpha} + F'' u_i u_\alpha$$

となり，ここで $F'>0$ であっても F'' の符号は恣意的であるから，左辺の偏導関数は任意の符号をとることができる。したがって u_{ij}, $u_{i\alpha}$ に関する(45)の可解性条件は，u 関数が可測的でなければ無意味とならざるをえない。が，他方(47)の v_{ij} や $v_{i\alpha}$ は(50)のゆえに当該の変換からは独立であり，[31] したがって(47)の可解性条件は，u 関数が可測的でなくても意味をもつのである。

6　体系の均衡条件が市場における需給均等の条件と解される場合には，すでに考察した安定性の仮説や最大化行動の仮説に加えて，さらに二つの定量的な仮説が援用できる。いわゆるワルラスの法則と，超過需要関数のゼロ次同次性がそれらである。いま財が，価値尺度財とされる第0財をも含めて $n+1$ 種類あり，それらの価格を $p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n$, 超過需要関数を $E_i(p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n,\ \alpha)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$ と記せば，均衡条件は

(51) $E_i(p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n,\ \alpha)=0 \quad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

と書きあらわせる。するとワルラスの法則（以下（W）と略称する）は，いうまでもなくすべての $(p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n) \geq 0$ について

注(29)　u 関数が効用関数である場合には，この条件はいうまでもなく加法的効用の仮定を意味するものである。
(30)　Allingham and Morishima, *op. cit.*, pp. 47-48.
(31)　均衡条件から $v_i = u_i - u_n \dfrac{p_i}{p_n} = 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ であることを考慮すれば，F'' を含む項はすべてゼロとなることが分る。

(52) $\sum_{i=0}^{n} p_i E_i(p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n,\ \alpha)=0$

が成立つことであるから，これを以下の議論に便利なように微分して，均衡点 $p^*=(p_0^*,\ p_1^*,\ \cdots,\ p_n^*)$ で評価すれば，

(53) $\sum_{i=0}^{n} p_i^* \dfrac{\partial E_i}{\partial p_j}=0 \quad (j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

が得られる。他方，超過需要関数のゼロ次同次性（以下（H）と略称する）は，すべての $k>0$ について

(54) $E_i(kp_0,\ kp_1,\ \cdots\cdots,\ kp_n,\ \alpha)=E_i(p_0,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n,\ \alpha) \quad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

が成立つことであり，これについても同様に均衡点で評価することにすれば，周知のオイラーの定理から

(55) $\sum_{j=0}^{n} p_j^* \dfrac{\partial E_i}{\partial p_j}=0 \quad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

を得る。これら(53)と(55)が，以下本節での定性分析に課せられる二つの双対的な制約条件である。

さてこの体系の比較静学方程式は，定石どおり

(56) $\left[\dfrac{\partial E_i}{\partial p_j}\right]\left[\dfrac{dp_j}{d\alpha}\right]=-\left[\dfrac{\partial E_i}{\partial \alpha}\right] \quad (i,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

と書かれるが，いま第0財の価格 p_0 を1として，その上で簡単化のため

(57)
$$\frac{\partial E_i(p^*,\ \alpha)}{\partial p_j}=a_{ij} \quad (i,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$
$$-\frac{\partial E_i(p^*,\ \alpha)}{\partial \alpha}=b_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

また行列 $[a_{ij}]$ $(i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ を A，列ベクトル $[a_{0j}]$ $(j=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ を a_0，行ベクトル $[a_{i0}]$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ を a^0，列ベクトル $[b_i]$ $(i=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ を b，同じく列ベクトル $[dp_j/d\alpha]$ $(j=1,\ \cdots\cdots,\ n)$ を y と記せば，これはより簡単に

(58) $\begin{bmatrix} a_{00} & a_0 \\ a^0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_0 \\ b \end{bmatrix}$

のように書きあらためられる。ここで

(59) $Ay=b$

からの，y の符号の究明が分析目標となる点は，前節までの議論とまったく同じであるが，ただこんどの場合は A 行列が(53)のワルラス法則や(55)のゼロ次同次性の条件からの制約に服するわけである。いま一般性を失うことなく，すべての i について $p_i^*=1$ となるように財の測定単位を選ぶとすれば，(53)，(55)の条件はそれぞれ

(60) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=-a_{0j} \quad (j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

(61) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=-a_{i0} \quad (i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$

と書きあらわせるから，結局われわれの新課題は，(60)，(61)のいずれかあるいは双方がAに課せられる場合の(59)の可解性を問うことに帰するのである。

ところで(60)，(61)から明らかなように，(W)と(H)の二条件のあいだには双対の関係があり，(W)の下でAに適用される議論は，すべて(H)の下でA'に適用される(逆も真)。したがってわれわれは，(W)を満たす体系と(H)を満たす体系とをそれぞれ独立に双方ともとり扱う必要はないであろう。他方(W)と(H)をともに満たす体系についていえば，その下である命題が成立つための必要条件は，明らかに(W)のみを満たす体系あるいは(H)のみを満たす体系の下でも，それぞれ同じ命題が成立つための必要条件を与えるが，その逆は一般にはかならずしも真ではない。が，反面(W)あるいは(H)の下である命題が成立つための十分条件は，(W)と(H)の双方を満たす体系の下でも，その命題が成立つための十分条件を与えることになる。これらの点を考慮にいれれば，以下においてはまず(W)を満たす体系についてのみ，その定性的な可逆性・可解性の必要かつ十分条件を考察し，しかるのちに(W)と(H)の双方を満たす体系についてはとりわけ必要条件の側の議論を若干補えば足りるであろう。

そこでいま(W)を満たす体系について，その定性行列を

$$W_A=\{C \mid C \in Q_A,\ c_0 \in Q_{a0},\ \text{ここで}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}=-c_{0j},\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

と定義することにしよう。すると $Ay=b$ がワルラス法則 (W) の下で定性的に可解であるとは，$C \in W_A$, $d \in Q_b$, $Cz=d$ のときに $z \in Q_y$ となることを意味しており，またそのさい A が定性的に可逆であるとは，$C \in W_A$ のときに $C^{-1} \in Q_{A^{-1}}$ となることを意味している。以下しばらくのあいだのわれわれの課題は，これらの性質が満たされるための必要かつ十分条件を，上記のクラスに含まれる体系について明らかにしていくことである。

この問題を追及するにあたって，カークはAについて (W) の下での自由な元素 (free element) という基本概念を導入した。(32) 所与のAのある元素 a_{rs} が (W) の下で自由な元素であるとは，任意の正の実数 $m>0$ を定めたときに，その m に対してある $C \in W_A$ が選べて，どの $i \neq r$ あるいは$j \neq s$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ についても $|c_{rs}|>m|c_{ij}|$ が満たされることをいう。この定義は一見トリヴィアルなように思われるが，決してそうではないのであって，事実(W)の下ではどの非ゼロ元素もが絶対値において無制限に大きくなれるとはかぎらないことが，つぎの補助定理からただちに明らかとなる。

補助定理 5 a_{rj}がAの自由な元素であるための必要かつ十分条件は，$a_{rj}a_{0j}<0$が満たされる

注(32) J. Quirk, "Comparative Statics under Walras' Law: the Case of Strong Dependence," *Review of Economic Studies*, January 1968, p. 13.

ことである。

証明

必要性。帰謬法によるとし，a_{rj}が自由元素であるときに，$a_{rj}a_{0j}\geqq 0$であったとしてみよう。まず $a_{rj}a_{0j}=0$ とすれば，$a_{rj}=0$, $a_{0j}=0$ のいずれかあるいは双方が成立たねばならないが，$a_{rj}=0$ であればそれが自由な元素になれないことは明らかであるから，$a_{rj}\neq 0$, $a_{0j}=0$ であるとしよう。さらに $a_{rj}>0$ の場合と $a_{rj}<0$ の場合とを分けて考え，最初に前者の場合をとりあげることにする。すると自由元素の定義から，任意の $m>0$ に対してある $C\in W_A$ が選べ，$|c_{rj}|>m|c_{ij}|$, all $i\neq r$ となるから，いま$m=n$（価値尺度財以外の財の数）とおけば，負の c_{ij} に対しては（$c_{rj}>0$, $c_{0j}=0$ である以上，当然負の c_{ij} がある），$c_{rj}>n|c_{ij}|$ すなわち $c_{rj}+n\ c_{ij}>0$ が成立する。したがって $I_j^-=\{i\,|\,c_{ij}<0\}$ と定義して，

(62) $c_{i^*j}=\min_{i\in I_j^-} c_{ij}=\max_{i\in I_j^-}|c_{ij}|$

とすれば，c_{i^*j} についても当然

(63) $c_{rj}+n\ c_{i^*j}>0$

が成立する。ところが定義から $c_{i^*j}\leqq c_{ij}$ for $i\in I_j^-$ であるから，I_j^- の元の個数を n_j とすれば $n_j\ c_{i^*j}\leqq\sum_{i\in I_j^-}c_{ij}$ で，$n_j\leqq n$, $c_{i^*j}<0$ であることから

(64) $n_j\ c_{i^*j}\leqq\sum_{i\in I_j^-}c_{ij}$。

これを(63)に代入して

(65) $c_{rj}+\sum_{i\in I_j^-}c_{ij}>0$,

したがって

(66) $\sum_{i=1}^{n}c_{ij}=c_{rj}+\sum_{i\in I_j^+,\,i\neq r}c_{ij}+\sum_{i\in I_j^-}c_{ij}>0$

を得る。これは仮定された $c_{0j}=-\sum_{i=1}^{n}c_{ij}=0$ と矛盾する。

$a_{rj}<0$ の場合，また $a_{rj}\ a_{0j}>0$ の場合も，まったく同様の推論をつうじて矛盾が生じることを示すことができる。

十分性は自明であろう。

上に証明したところによって，a_{rj} がAの自由な元素であれば，同じ第j列のそれと同符号の元素はすべて同様にAの自由な元素となり，また異符号の元素はすべてAの自由な元素とはなりえないことが知られる。

補助定理5の系1　Aが（W）の下で定符号の行列式をもつときには，自由な元素 a_{rj} について余因数 A_{rj} が非ゼロなら

$$\mathrm{sgn}\,|A|=\mathrm{sgn}\,a_{rj}A_{rj}$$

となる。

証明

補助定理5によって，（W）に矛盾することなく a_{rj} の絶対値を大きくできるところから明らかである。

補助定理5の系2　Aが（W）の下で定符号の行列式をもつときには，$|A|$の符号は，その展開式のなかの非ゼロ項で $n-1$ 個の自由元素を含むものの符号と一致する。

証明

Aの$n-1$個の自由元素 a_{ij}, a_{kl}, ……, a_{pq}（それらの存在についてはのちの補助定理6の証明参照）を含む$|A|$の展開式中の非ゼロ項を $a_{ij}a_{kl}\cdots\cdots a_{pq}a_{uv}$ のように書き，適当に $C\in W_A$ を選べば，$|C|$の展開式中の該当項 $c_{ij}c_{kl}\cdots\cdots c_{pq}c_{uv}$ をもって，(W) に矛盾することなくその他の項の和に優越せしめることができる。そして余因数 C_{ij} の展開式のなかにはかならず $n-2$ 個の自由元素 c_{kl}, ……, c_{pq} を含む項が存在するから，同様に $c_{kl}\cdots\cdots c_{pq}c_{uv}$ の項をもって，(W)に矛盾することなく他の項の和に優越せしめることができる。そのとき $C_{ij}\neq 0$ となることは明らかであるから，上記の系1が使えて，$\mathrm{sgn}\,|C|=\mathrm{sgn}\,c_{ij}C_{ij}$ となることがいえる。つぎに同様の議論を C_{ij} に適用することによって，$\mathrm{sgn}\,C_{ij}=\mathrm{sgn}\,c_{kl}C_{ijkl}$ となることがいえ，これらから

$$\mathrm{sgn}\,|C|=\mathrm{sgn}\,c_{ij}c_{kl}C_{ijkl}$$

が得られる。以下同じ議論を順次に繰返していくことによって

$$\mathrm{sgn}\,|C|=\mathrm{sgn}\,c_{ij}c_{kl}\cdots\cdots c_{pq}c_{uv}$$

となることが明らかである。ところが $C\in W_A\subset Q_A$ であるところから $\mathrm{sgn}\,c_{ij}c_{kl}\cdots\cdots c_{pq}c_{uv}=\mathrm{sgn}\,a_{ij}a_{kl}\cdots\cdots a_{pq}a_{uv}$ であり，また仮定によって $\mathrm{sgn}\,|C|=\mathrm{sgn}\,|A|$ であるから，上記の帰結によって

$$\mathrm{sgn}\,|A|=\mathrm{sgn}\,a_{ij}a_{kl}\cdots\cdots a_{pq}a_{uv}$$

が成立ったことになる。

さて以下の議論においては，しばらくのあいだ体系の相互依存関係が定性的にもっとも緊密な場合すなわち A のすべての元素が非ゼロである場合をとり扱う。そのような行列について，$n>2$ の場合には，まずつぎの補助定理が成立する。

補助定理6[33] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロであるとする。そのときAが(W)の下で定符号の行列式をもつとすれば，$|A|$ の展開式のなかにはn個の自由な元素から成る項が存在しなければならない。

証明

仮定からすべてのjについて $a_{0j}\neq 0$ であるから，$a_{0j}>0$ ならかならず $r=1, 2, \cdots\cdots, n$ のいずれかについて $a_{rj}<0$ となる元素がなくてはならず，また $a_{0j}<0$ なら同様に $r=1, 2, \cdots\cdots, n$ のいずれかについて $a_{rj}>0$ となる元素がなくてはならない。ゆえに補助定理5から，各列にはかならず少くとも1個の自由な元素があることになる。

そこでいま第1列の自由な元素 a_{r1} を a_{11} に添数換えし，のこりの $n-1$ 行，$n-1$ 列のなかから a_{22} に添数換えできる自由な元素がかならず見出されることを示したい。

もし $i, j=2, \cdots\cdots, n$ について1個も自由な元素が見出されないとすれば，最初のパラグラフの命題から $a_{12}, \cdots\cdots, a_{1n}$ がそれぞれ各列 $(2, \cdots\cdots, n)$ の一意的な自由元素となるのでなくてはならない。するとそれらの列のそれ以外の元素は自由な元素とはなりえないから，それぞれ $a_{12}, \cdots\cdots, a_{1n}$ とは異なった符号をとり，かつ各列ごとに同符号とならねばならない。これらの条件の下ではどの a_{rs} $(r, s=2, \cdots\cdots, n)$ を選んでも，(W)に矛盾することなくその絶対値を大きくすることができる。なぜなら，この場合適当に$C\in Q_A$ を選べば，列和

$$c_{1s}+c_{rs}+\sum_{t\neq 1,r} c_{ts}=-c_{0s}\ (s=2, \cdots\cdots, n)$$

においてc_{1s}が自由元素であるところから，いかに $|c_{rs}|$ を大きくしても $|c_{1s}|$ を大きくすることによって $c_{rs}+\sum_{t\neq 1,r} c_{ts}$ の項を dominate することができるからである。ゆえにこの事実から，a_{11} の余因数 A_{11} の展開式において当該の a_{rs} を含む項の符号が A_{11} の符号を律することが明らかとなる。ところがA_{11} の各列はそれぞれ同符号の元素から成っているから，一般にはその展開式のなかには異符号の項が共存することができ，したがってそのそれぞれが含む任意の元素に上記の議論を適用することによって，A_{11} の符号は不定とならざるをえない。よって a_{11} が非ゼロである以上，$|A|$ の符号もまた不定となり，補助定理の仮定に反することになる。

こうして a_{22} の位置にくる自由元素の存在が確立され，以下同様にして $a_{33}, \cdots\cdots, a_{n-1,n-1}$ の位置にくる自由元素の存在も確立される。ゆえにたしかに $|A|$ の展開式のなかには $n-1$ 個の自由元素を含む項すなわち$a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$ が存在することになる。

ここでもし a_{nn} もまた自由な元素であれば，上記の項が定理の要請する項となるから，議論は終る。そこで a_{nn} が自由な元素ではないとしてみよう。すると第n列に a_{nn} とは違った符号の自由元素があることになるから，それを a_{1n} とする。そしてこの元素を含む $-a_{1n}\,a_{n1}\,a_{22}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}$ の

注(33) Quirk, *op. cit.*, p. 14, Lemma 1.

項を考えてみると，この項もまた $n-1$ 個の自由元素を含むから，上記の補助定理5系2によって $\mathrm{sgn}\,|A| = \mathrm{sgn}\,(-a_{1n}a_{n1}a_{22}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}) = \mathrm{sgn}\,a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$ となるのでなくてはならない。ゆえに共通の元素を消去すれば，$\mathrm{sgn}\,a_{11}a_{nn} = -\mathrm{sgn}\,a_{1n}a_{n1}$ となり，ところが a_{nn} と a_{1n} は異符号なのであるから，$\mathrm{sgn}\,a_{11} = \mathrm{sgn}\,a_{n1}$ となる。したがって a_{11} が自由な元素であれば，a_{n1} もまた自由な元素となり，よって $-a_{1n}\,a_{n1}\,a_{22}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}$ が定理の要請する項となる。

この補助定理にもとづき，Aは行，列のいれ換えや符号のつけ換え（a_0 の成分についても同然）をつうじて，その対角元素がすべて負の自由元素から成る形に変換することができる。したがって以下の議論では，最初からそのようなパターンの行列に限定して分析を進めてもかまわないことになろう。

補助定理7[34] A の元素，a_0 の成分はすべて非ゼロ，また a_{ii} はすべて負の自由元素であるとする。そのときAが（W）の下で定符号の行列式をもつとすれば，負の非対角元素を含むサイクルはすべて負となるのでなくてはならない。

証明

もし負の a_{ij} $(i\neq j)$ が正のサイクルに含まれるとすれば，$C, D \in W_A$ $(c_0>0,\ d_0>0)$ の C, D が選べて，$\mathrm{sgn}\,|C| \neq \mathrm{sgn}\,|D|$ となることを示せばよい。

a_{ij} を a_{12} に添数換えして，長さrの正のサイクル $a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{r-1,r}\,a_{r1}$ を考える。$C(\in Q_A)$ はすべての i について $c_{ii}=-1$，すべての i, j $(i\neq j)$ について $|c_{ij}|=\varepsilon$（ε は十分小さな正の数）のように定めるとする。すると $c_0 \in Q_{a_0}$ となるから $C\in W_A$ であり，$\mathrm{sgn}\,|C| = (-1)^n$ である。他方 $D(\in Q_A)$ はすべての i について $d_{ii}=-1$, $d_{12}=-M$（Mは十分大きな正の数）$|d_{23}| = \cdots\cdots = |d_{r,r-1}| = |d_{r1}| = 1-\delta$（$\delta$ は十分小さな正の数），他の非対角元素については $|d_{ij}| = \delta/n$ のように定める。すると $d_0 \in Q_{a_0}$ となることが容易に確かめられるから，$D\in W_A$ であるが，$|D|$ を展開すれば

$$|D| = (-1)^n + (-1)^{r+1}\,|M(1-\delta)|\,(-1)^{n-r} + \text{other terms}$$

となり，よってMを十分大きくδを十分小さくとれば，第二項が $|D|$ の符号を支配することになって，

$$\mathrm{sgn}\,|D| = (-1)^{n+1} \neq \mathrm{sgn}\,|C|$$

となる。

以下二つの補助定理は，$n>3$ の場合を対象とする。

注(34) Quirk, *op. cit.*, pp. 14–15, Lemma 2.

補助定理8[35] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロ，また a_{tt} はすべて負の自由元素であるとする。そのときAが(W)の下で定符号の行列式をもつとすれば，負の（したがって自由な）非対角元素をもつ列の個数はたかだか1個を越えることはできない。

証明

ある a_{ij} $(i \neq j)$ が負であると仮定して，それを a_{21} とする。いま第1列以外にも負の非対角元素があったとして，それを a_{rs} としよう。まず最初は $r=1$ とすれば，$s \neq 2$ でなくてはならない。というのは，もし $s=2$ であれば，$a_{12}<0$, したがって $a_{12}a_{21}>0$ となって，補助定理7の帰結に矛盾するからである。

さてサイクル $a_{21}a_{1s}a_{s2}$ を考えてみると，同じく補助定理7から $a_{21}a_{1s}a_{s2}<0$ であるから，上記のところから $a_{s2}<0$, したがって同じ理由から $a_{2s}>0$ とならねばならない。つぎに1，2およびsとは異なる任意の添数をkとして，これらの添数を含む長さ3および4のすべてのサイクル

$$a_{21}a_{1k}a_{k2},\quad a_{s2}a_{2k}a_{ks},\quad a_{1s}a_{sk}a_{k1}$$

$$a_{1s}a_{sk}a_{k2}a_{21},\quad a_{21}a_{1k}a_{ks}a_{s2},\quad a_{s2}a_{2k}a_{k1}a_{1s}$$

を考えてみると，これらはすべて負の元素を含むからすべて負であり，そのそれぞれから

$$a_{1k}a_{k2}>0,\quad a_{2k}a_{ks}>0,\quad a_{sk}a_{k1}>0$$

$$a_{sk}a_{k2}<0,\quad a_{1k}a_{ks}<0,\quad a_{2k}a_{k1}<0$$

の帰結が導き出される。ところがこれらが矛盾を含むことは明らかである。[36]

他方 $r \neq 1$ の場合は，サイクル $a_{21}a_{1r}a_{rs}a_{s2}<0$ を考えると，$a_{21}<0$, $a_{rs}<0$ から$a_{1r}a_{s2}<0$。ゆえに $a_{1r}<0$ $(a_{s2}>0)$ であるか $a_{s2}<0$ $(a_{1r}>0)$ であるかのいずれかであるが，いま前者の場合を仮定して，1, 2, r, s 以外の任意のjについてサイクル $a_{21}a_{1j}a_{j2}<0$ を考えると，$a_{1j}a_{j2}>0$。またサイクル $a_{1s}a_{sr}a_{r1}<0$ を考えると $a_{1s}a_{r1}<0$ となって，$a_{1r}<0$ したがって $a_{r1}>0$ から $a_{1s}>0$。ゆえにサイクル $a_{s2}a_{2j}a_{j1}a_{1s}<0$ から $a_{2j}a_{j1}<0$ となり，前の結果とあわせて $a_{1j}a_{j2}a_{2j}a_{j1}<0$。ところが $a_{1j}a_{j1}<0$, $a_{2j}a_{j2}<0$ であるから，これは不合理である。$a_{s2}<0$ と仮定しても同様な不合理が導かれる。

補助定理9[37] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロ，また a_{tt} はすべて負の自由元素であるとする。そのときAが(W)の下で定符号の行列式をもつとすれば，負の（したがって自由な）非対角元素を含む列の元素はすべて負（自由）でなければならない。

注(35) Quirk, *op. cit.*, p. 15.

(36) たとえば $a_{1k}a_{k2}>0$, $a_{2k}a_{k1}<0$ から $a_{1k}a_{k2}a_{2k}a_{k1}<0$。ところが $a_{k2}a_{2k}<0$, $a_{1k}a_{k1}<0$ であるから，$a_{1k}a_{k2}a_{2k}a_{k1}>0$。他も同様。

(37) Quirk, *op. cit.*, pp. 15-16, Lemma 4.

証明

第1列が負の，したがって自由な非対角元素をもつとし，いまその列の元素のなかに，結論に反して正の，したがって自由でない元素があったとする。負の元素のほうを a_{21}，正の元素のほうを a_{31} としよう。補助定理8によって非対角元素に負の元素をもつ列はほかにはないから，第2列から第 n 列までの非対角元素はすべて正である。

そこでふたたびこれらの条件を満たすような C, D を Q_A から選ぶことにしよう。Cは補助定理7の場合と同様，すべての i について $c_{ii}=-1$，すべての i, j $(i \neq j)$ について $|c_{ij}|=\varepsilon$（εは十分小さな正の数）のように定めれば，$c_0 \in Q_{a_0}$，したがって $C \in W_A$ となり，また $\operatorname{sgn}|C| = (-1)^n$ となる。他方Dについては $d_{11}=-\varepsilon, d_{21}=-1, d_{31}=1$, $|d_{i1}| = \varepsilon/n$ $(i=4, \cdots, n)$，さらに $d_{13}=1-\varepsilon$, $d_{ii}=1$ $(i=2, \cdots, n)$，他の非対角元素 $|d_{ij}| = \varepsilon/n$ のように定めれば，明らかに $d_0 \in Q_{a_0}$ となるから $D \in W_A$ である。ところが $|D|$ の符号は

$$\operatorname{sgn}|D| = (-1)^{3+1}(-1)^{1+2}(-1)^{n-2} = (-1)^{n+5} = (-1)^{n+1} \neq \operatorname{sgn}|C|$$

となるから，Aは(W)の下で定符号の行列式をもちえない。

補助定理10[38] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロ，また a_{ii} はすべて負の自由元素であるとする。そのときもしすべての $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について $a_{ii}<0$ で，かつすべての $i \neq j$, $j=2, \cdots\cdots, n$ について $a_{ij}>0$ であれば，Aは(W)の下で定符号の行列式をもち，$\operatorname{sgn}|A| = (-1)^n$ である。また A^{-1} の対角元素は負，第1列の非対角元素は正，第1行の非対角元素は負，他の非対角元素はすべて符号不定である。

証明

数学的帰納法による。$n=1$ あるいは $n=2$ の場合，定理の成立は自明。$n=3$ の場合は

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{32}$$

で，ここで

$$a_{12} + a_{22} + a_{32} = -a_{02} < 0$$

$$a_{13} + a_{23} + a_{33} = -a_{03} < 0$$

かつ $a_{12}>0$, $a_{13}>0$ であるから，当然

$$a_{22} + a_{32} < 0$$

$$a_{23} + a_{33} < 0$$

しかも $a_{22}<0$, $a_{32}>0$, $a_{23}>0$, $a_{33}<0$ であるから，A_{11} は負の優対角行列で，$\operatorname{sgn}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = (-1)^2 > 0$ となる。ゆえに $|A|$ の展開式の右辺第1項は負，また第2項以下も仮定から明らかに負であるから，右辺の全体も負となる。

注(38) Quirk, *op. cit.*, pp. 16-17, Lemma 5.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} - & - & - \\ + & - & ? \\ + & ? & - \end{bmatrix}$$

となることも容易に確かめられる。

つぎに定理の主張が $n=r$ のときに成立つことを仮定して，それが $n=r+1$ のときにも成立つことを証明する。

$n=r+1$ の場合の A の余因数 A_{11} は対角元素がすべて負，非対角元素がすべて正であるところから，いわゆる粗代替財行列（メッツラー行列）であり，しかも仮定から優対角行列でもあるから，周知の定理が使えて $\mathrm{sgn}\ A_{11}=(-1)^{(r+1)-1}=(-1)^r$。また非対角余因数 $A_{1j}(j=2,\ \cdots\cdots,\ r+1)$ はいうまでもなく A から第1行 j 列をとり去った小行列式に $(-1)^{1+j}$ をかけたものにほかならないが，いま当該の小行列式の第 j 行を順次にくり上げ，最初の行までもっていけば，$(j-2)$ 回の行のいれ換えで A そのものと同じ符号パターンの行列の行列式となる。よって $\mathrm{sgn}\ A_{1j}=(-1)^{1+j}(-1)^{j-2}(-1)^r=(-1)^{r+1}$ となり，

$$|A|=a_{11}A_{11}+\sum_{j=2}^{r+1}a_{1j}A_{1j}$$

で，$a_{11}<0,\ a_{1j}>0\ (j=2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから，以上を総合して $\mathrm{sgn}\,|A|=(-1)^{r+1}$ となる。

また対角余因数 $A_{ii}(i\neq 1)$ の行列はすべて A そのものとまったく同じ符号パターンをもつから，帰納法の仮定から $\mathrm{sgn}\ A_{ii}=(-1)^r$ となり，それと上で導いた $\mathrm{sgn}\ A_{11}=(-1)^r$, $\mathrm{sgn}\ A_{1j}=(-1)^{r+1}$, $\mathrm{sgn}\,|A|=(-1)^{r+1}$ の結果とを併せ考えれば，A^{-1} の対角元素がすべて負になること，およびその第1列の非対角元素がすべて正になることは明らかである。

さらに $A_{i1}=(-1)^{i+1}(-1)^{i-1+1}A_{i1,1i,i-1}$ となり，$A_{i1,1i,i-1}$ は $r-1$ 次の優対角メッツラー行列となるから，$A_{i1}\neq 0$ となることが明らかである。ゆえに補助定理5の系1から $\mathrm{sgn}\,|A|=\mathrm{sgn}\ a_{i1}A_{i1}=(-1)^{r+1}$ となって，$a_{i1}<0$ の仮定から $\mathrm{sgn}\ A_{i1}=(-1)^r$ を得る。したがって A^{-1} の第1行の非対角元素が負になることも容易に知られる。

最後に $A_{ij}\ (i\neq j,\ i,\ j=2,\ \cdots\cdots,\ n)$ については，その第1列の元素はすべて負，第 i 列の元素はすべて正であるから，第 i 列の対角元素を十分大きくすることによって，(W) に矛盾することなく第 i 列の他の元素を任意に大きくすることができる。ゆえに A_{ij} を行列式にもつ行列では，第1列と第 i 列の元素はすべて自由元素であり，したがってこれらの列の符号の型から，

$$\mathrm{sgn}\ C_{ij}\neq\mathrm{sgn}\ D_{ij}\ (i\neq j,\ i,\ j=2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

となるような $C,\ D\in Q_A$ を，$c_0,\ d_0\in Q_{a_0}$ の下で選べることは明白である。

以上の補助定理の帰結にもとづき，(W) の下での A の定性的可逆性（$n>3$ の場合）について，つぎの基本定理が成立する。

定理12[39] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロであるとする。そのとき（W）の下でAが定性的に可逆であるための必要かつ十分条件は，行の適当な番号換えか列の適当な符号換えをつうじて，Aを$\tilde{A}$に変換し，そのすべての対角元素 $\tilde{a}_{ii}$ を負，すべての $\tilde{a}_{0j}$ を正としたときに，すべての非対角元素 $\tilde{a}_{ij}$ が正となることである。

証明

補助定理 6 の証明で見たように，Aの各列には少くとも 1 個の自由な元素がかならずあるから，前稿で述べた要領で適当な置換行列Pを選び，また適当な対角行列 D（$d_{ii}=1$ あるいは-1）を選ぶことにより，それらの自由な元素がすべて負の対角元素になるように$\tilde{A}$をつくることができる。その場合には $\tilde{a}_{jj}\ \tilde{a}_{0j}<0$ の関係をつうじて，当然 $\tilde{a}_{0j}>0$ である。

必要性。Aしたがって $\tilde{A}$ が（W）の下で定性逆行列をもつとすれば，$\tilde{A}$ は（W）の下で定符号の行列式をもつのでなくてはならない。すると補助定理 8 から，$\tilde{A}$ で 2 個以上の自由元素をもつ列は，たかだか 1 個あるにすぎない。そしてもしそのような列があるとすれば，補助定理 9 から，その列の元素はみな自由な元素にならねばならない。ところがその場合には，補助定理10によって，$\tilde{A}^{-1}$ には符号不定の元素があることになり，$\tilde{A}$ が（W）の下で定性逆行列をもつという仮定に反する。とうして $\tilde{A}$ で対角元素がすべて負である以上，その非対角元素はすべて正となる。

十分性。$\tilde{A}$ で対角元素がすべて負，非対角元素がすべて正，列和がすべて負であるならば，周知のフロベニウス＝ドゥブリュー＝ハーシュタインの定理[40]から，$\tilde{A}^{-1}<0$ となることが保証される。

転じて $Ay=b$ の定性的可解性（同じく$n>3$ の場合）については，つぎの定理の成立が以上のところから自明である。

定理13[41] Aの元素，a_0 の成分はすべて非ゼロであるとする。そのとき $Ay=b$ が（W）の下で定性的に可解であるための必要かつ十分条件は，行の適当な番号換えか列の適当な符号換えをつうじて，Aを $\tilde{A}$ に，bを $\tilde{b}$ に変換し，$\tilde{A}$ のすべての対角元素 $\tilde{a}_{ii}$ を負，すべての $\tilde{a}_{0j}$ を正，またすべての $\tilde{b}_i$ を弱い意味で同符号としたときに，

(i)もし $\tilde{b}$ の非ゼロ成分が複数個あるとすれば，すべての非対角元素 $\tilde{a}_{ij}$ が正となること，

(ii)もし $\tilde{b}$ の非ゼロ成分がただ 1 個 $\tilde{b}_k$ しかないとすれば，第 k 列以外のすべての列についてすべての非対角元素 $\tilde{a}_{ij}$ が正となり，第 k 列のすべての非対角元素 $\tilde{a}_{ik}$ が同符号となること，

である。[42]

注(39) Quirk, *op. cit.*, pp. 17–18, Theorem 1.

(40) Debreu and Herstein, *op. cit.*, p. 602.

(41) Quirk, *op. cit.*, p. 18, Theorem 2.

(42) (ii) の場合の $\tilde{A}$ は，カークによって「一般化された粗代替財行列」("generalized gross substitute matrix") と呼ばれている。

なお $n \leqq 3$ の場合については，

$$\operatorname{sgn} \tilde{A}=\begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} - & + \\ - & - \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} - & - \\ + & - \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{sgn} \tilde{A}=\begin{bmatrix} - & + & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{bmatrix}$$

の事例のみが，(W)の下での定性的可逆性を与える事例であることが確かめられる。

以上われわれはもっぱら（W）の下での定性的可逆性，可解性のための条件究明にかかわってきたが，既述のように（W）および（H）の双方が要請される場合の条件は，必要条件の側に関するかぎり，（W）の下でのそれから自動的に保証されるとはかぎらない。しかしこの点についても

$$A^0 \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & a_0 \\ a^0 & A \end{bmatrix} \qquad C^0 \equiv \begin{bmatrix} c_{00} & c_0 \\ c^0 & C \end{bmatrix}$$

と記して，W_A の定義を

$$W^*_{A^0}=\{C^0 \mid C^0 \in Q_{A^0},\ ここで\ \sum_{i=0}^{n} c_{ij}=0,\ \sum_{j=0}^{n} c_{ij}=0,\ i,\ j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

のように拡張し，かつ自由な元素の定義もそれに応じて適当に調整すれば，補助定理の6から10までが mutatis mutandis にあてはまり，[43] つぎの可逆性定理の成立することがカークによって明らかにされている。[44]

定理14　Aの元素，a_0, a^0, a_{00} の成分はすべて非ゼロであるとする。そのときAが (W) および (H) の下で定性的に可逆であるための必要かつ十分条件は，行の適当な番号換えか列の適当な符号換えをつうじて，それを$\tilde{A}$に変換し，そのすべての対角元素 $\tilde{a}_{ii}$ を負，かつすべての $\tilde{a}_{i0}$, $\tilde{a}_{0j}$ を正，$\tilde{a}_{00}$ を負としたときに，すべての非対角元素 $\tilde{a}_{ij}$ が正となることである。

定理 12, 14 をつうじて考察してきた (W) あるいは (W) および (H) の下での可逆性条件について注目しておくべき一つの点は，それが純粋に定性的な場合の可逆性条件とは相容れないという点である。すなわち定理 12, 14 の定性的可逆性は $\tilde{A}$ が正のサイクルをもつことを要請するが，他方純粋に定性的な場合の可逆性は正のサイクルの存在を許さないから，[45] (W)の下で定性的に可逆

注(43)　なかんずく当該の条件の下で A が定符号の行列式をもつための必要条件である，「負の非対角元素はたかだか1個の列にしか現われない」という補助定理8の主張は，「負の非対角元素はたかだか1個の行か1個の列にしか現われない」と修正されればよい。

(44)　J. Quirk, "The Competitive Equilibrium: A Qualitative Analysis," in M. Beckmann and H. Künzi, ed., *Economic Models, Estimation and Risk Programming*, 1969, pp. 70-75, Lemma 4, 5, Lemma 5 の Corollary 1, 2, 3 および Theorem 5, 6.

(45)　前稿，定理2参照。

な行列が，純粋に定性的な場合に可逆となることは不可能なのである。

つぎにもう一つの要点は，それがいわゆる粗代替財の仮定を必要とするという点である。すなわち（W）および（H）の仮説の下でAが定性的に可逆であるためには，$a_{ij}>0$ $(i \neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ ばかりでなく，$a_{i0}>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ および $a_{0j}>0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ が要請されるから，価値尺度財をも含めてすべての財が互いに粗代替財となるのでなくてはならない。尤も定理13の定性的な可解性に関しては，conjugate pairs の場合にかぎり，ゼロでない b_k に応ずる列の a_{ik} はすべて<0であってもかまわないが，もしそうであるとすれば a_{ki} はすべて>0なのであるから，第k財とそれ以外の財とのあいだにはいちぢるしく非対称的な所得効果が仮定されねばならないであろう。どの財の超過需要関数にシフトが生じるにせよ，その都度このような要請を課するのは，plausible な仮説とはいい難く，したがって結局すべての $i,\ k\,(i \neq k)$ について $\operatorname{sgn} a_{ik} = \operatorname{sgn} a_{ki}$ と仮定するとすれば，可解性の場合も容認できる事態はオール粗代替財のそれに帰着せざるをえないであろう。

7　最後に（W）ならびに（H）の下での定性的安定条件を考察して，すでに大分長くなったこの稿を閉じることにしよう。

Aが（W）の下で定性的に安定であるとは，$C \in W_A$ のようなすべてのCが安定であることを意味し，以下ではこの性質をAのW安定性と呼んでいくことにする。するとそのようなAについては，まずつぎの補助定理が成立する。

補助定理11(46)　AがW安定ならば，Aは弱い意味でヒックス行列とならねばならない。すなわちAのs次の主座小行列式はすべて $(-1)^s$ か0の符号をとり，かつどのsについても少くとも1個の主座小行列式は厳密に $(-1)^s$ の符号をとらねばならない。

証明

仮定から $C \in Q_A$，$c_0 \in Q_{a_0}$ のようなCはすべて安定であるが，これはAの転置行列 A' について $C' \in Q_{A'}$，$c'^0 \in Q_{a'0}$ を満たす C' がすべて安定であることにひとしい。そこでいま任意の正の対角行列Dについて DA' を考えれば，DA' は明らかに上記の C' の性質を満たすから，それは安定となり，これは A' が D 安定となることを意味している。すると A' が弱い意味でヒックス行列となることが，つぎの推論をつうじて明らかとされる。

注(46)　J. Quirk, "Comparative Statics under Walras' Law," pp. 18-19, Lemma 6 および J. Quirk and R. Ruppert, "Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium," *Review of Economic Studies*, October 1965, p. 314（＊＊）。ただしカークの，AのW安定性がただちにそのD安定性を意味するという主張は誤っている。なぜなら任意の正の対角行列Dについて $DA \equiv C$ とするとき，$C \in Q_A$ の条件は当然満たされるが，$C_0 \in Q_{a_0}$ の条件は満たされるとはかぎらないからである。こうしてD安定性を含意するのは，AのH安定性（（H）の下での定性安定性）であって，W安定性ではないことに注意すべきである。

まずA'の$i_1, i_2, \cdots\cdots, i_s$の行,列から成るある$s$次の主座小行列式$A'_{i_1 i_2 \cdots i_s}$が$(-1)^{s+1}$の符号をとったとしよう。$DA'$のそれに対応する主座小行列式は$d_{i_1} d_{i_2} \cdots\cdots d_{i_s} A'_{i_1 i_2 \cdots\cdots i_s}$と書けるが，上記のところから$DA'$は安定なのであるから，ラウス＝フルヴィッツの定理によってDA'に関するh_sは正，ここでh_sはs個のd_{i_r}とs次の主座小行列式の積の和に$(-1)^s$をかけたものにひとしい。ところでDは正の対角行列であれば任意のものでよいのであるから,h_sの右辺において各項にかかっているd_{i_r} $(r=1, 2, \cdots\cdots, s)$を適当に調整すれば，明らかに当該の$d_{i_1} d_{i_2} \cdots\cdots d_{i_s}$を含む項の符号が全体の符号を律するようにすることができ，したがって$\mathrm{sgn}\, h_s=(-1)^s(-1)^{s+1}=(-1)^{2s+1}$すなわち$h_s<0$とすることができる。ところがこれは$A'$の$D$安定性に相反するから，結局すべての$s$次の主座小行列式の符号が$(-1)^s$か0になるのでなくてはならない。しかも$h_s>0$を保証するためには，それらのすべてが同時にゼロとなることは許されない。

補助定理11の系　Aの元素がすべて非ゼロであるとき，AがW安定となるためには，すべての対角元素a_{ii}が負とならねばならない。

以上の準備ののちに，$n>2$の場合についてつぎのW安定性定理を証明する。

定理15(47)　Aの元素，a_0の成分はすべて非ゼロであるとする。そのときAがW安定であるための必要かつ十分条件は，そのすべての対角元素a_{ii}が負，すべての非対角元素a_{ij}が正，かつすべてのa_{0j}が正となることである。

証明

必要性。AがW安定なら，上記の系からただちに$a_{ii}<0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$となる。

つぎにあるa_{ij} $(i \neq j)$が自由な元素であったとし，それを添数換えしてa_{12}としよう。AがW安定であるためには，すべての$C \in W_A$について$h_n>0$が成立たねばならないが，a_{12}が自由元素であるときにはh_nの展開式中の$(-1)^n$ $(-1)^{n+1}$ $a_{12}a_{23} \cdots\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$の項が$h_n$の符号を支配するから，$a_{12}a_{23} \cdots\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$は非正とならねばならない。ところがラウス＝フルヴィッツの検定行列式の条件から，自由元素を含む長さnのサイクルはすべて非負となるから，これと上の結論とが両立するためには$a_{12}a_{23} \cdots\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$はゼロとなるのでなくてはならない。しかし，すべてのa_{ij}が非ゼロと仮定されている目下の場合，この帰結は不可能であり，結局a_{12}は自由元素とはなりえないことが明らかとなった。

以上の推論から，非対角元素a_{ij} $(i \neq j)$はいずれも自由元素となることはできず，したがってAに自由元素があるとすれば，それはかならずその対角元素のいずれかであることになる。

ところでAがW安定であれば，それはかならず(W)の下で定符号の行列をもつ。なぜなら，もし

注(47)　J. Quirk, "Comparative Statics under Walras' Law," p. 19, Theorem 3.

そうでないとすれば $C\in W_A$ を満たす C のなかに $\mathrm{sgn}\,|C|\neq(-1)^n$ のものがあり，他方 C が安定であるためには，$\mathrm{sgn}\,|C|=(-1)^n$ とならねばならないからである。が，こうして A が (W) の下で定符号の行列をもつとすれば，さきに証明した補助定理 6 から n 個の対角元素がすべて自由な元素であることになり，しかも a_{ii} は負であるから，a_{ij} $(i\neq j)$ はすべてその逆の符号をとる。そのとき a_{0j} もまたすべて正となることは自明である。

十分性。アロー＝ハーヴィッチなどの業績によりすでに確立しているところである。

ところで上の定理は $n>2$ の場合に関連しているが，$n=2$ の場合についてみると，

$$\mathrm{sgn}\ A=\begin{bmatrix}- & +\\ + & -\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}- & +\\ - & -\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}- & -\\ + & -\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}- & -\\ - & -\end{bmatrix}$$

の四つの事例のうち第 1 の事例は $a_0\geq 0$ の場合にのみ W 安定性を与え，第 2，第 3 の事例はどのような a_0 についても W 安定性を与えること，また第 4 の事例はどのような a_0 についても W 安定性を与えないことが確かめられる。

つぎに A が(W)ばかりでなく (H) をも満たす場合に定性的安定であることを，まえの $W_{A^0}{}^*$ の定義を考慮して A の W^* 安定性と呼ぶことにしよう。するとその場合の定理15の対応物はつぎのような定理である。

定理16[(48)] A の元素，a_0，a^0 の成分，a_{00} はすべて非ゼロであるとする。そのとき A が W^* 安定であるための必要かつ十分条件は，そのすべての対角元素 a_{ii} が負，すべての非対角元素 a_{ij} が正，かつすべての a_{i0}，a_{0j} が正となることである。

証明

必要性。A の自由な元素を $W_{A^0}{}^*$ に即して再定義すれば，あとは前の定理とまったく同様に証明できる。

十分性。定理15が成立っていれば自明。

さて以下においては A^0 の元素 a_{ij} $(i, j=0, 1, \cdots\cdots, n)$ のなかにゼロのものが混じっていても，同趣旨の定理が成立つかどうかを検討する。いま

$$\mathrm{sgn}\ a_{ij}=\mathrm{sgn}\ a_{ji}\ (i\neq j,\ i,\ j=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n)$$

の条件が満たされているときに，A は符号対称的 (sign symmetric) であると呼ぶとすれば，その条件の下でつぎのような最後の定理が成立する。

注(48) J. Quirk, "The Competitive Equilibrium: A Qualitative Analysis," p. 75, Theorem 7.

定理17[49] A^0 が符号対称的かつ分解不可能であるとすれば，A が W^* 安定であるための必要かつ十分条件は，A^0 のすべての対角元素 a_{ii} が負，かつすべての非対角元素 a_{ij} が非負となることである。

この定理の証明にあたっては，つぎの補助定理から考察していくのが便利である。

補助定理12 A^0 が符号対称的であるとき，Aが W^* 安定であるためには，$C^0 \epsilon W_{A^0}{}^*$のすべての C^0 についてCは負の準定符号とならねばならない。

証明

A が W^* 安定であれば，その定義からどの $C^0 \epsilon W_{A^0}{}^*$についてもCは安定である。ところが C^0 が符号対称的であるところから，$C^0 \epsilon W_{A^0}{}^*$ なら $C^0+C^{0\prime} \epsilon W_{A^0}{}^*$でもあり，したがって$C+C'$ もまた安定となる。そして $C+C'$ は対称であるから，どんな$x \neq 0$に対しても $x'(C+C')x<0$ となる。

補助定理13 $C^0 \epsilon W_{A^0}{}^*$のすべての C^0 についてCが負の準定符号であるとすれば，C^0のどのn次の主座部分行列も同じく負の準定符号とならねばならない。

証明

$x^0=(x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n)$ として $x^{0\prime}C^0x^0$ という2次形式を考えてみると，

$$(67)\quad x^{0\prime}C^0x^0=\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij}\, x_i\, x_j=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\, x_i\, x_j+\left[\sum_{j=1}^n c_{0j}\, x_j+\sum_{i=1}^n c_{i0}\, x_i\right]x_0+c_{00}\, x_0{}^2$$

と書ける。ところが（W）と（H）によって

$$(68)\quad c_{0j}=-\sum_{i=1}^n c_{ij} \quad , \quad c_{i0}=-\sum_{j=1}^n c_{ij}$$

であり，他方

$$(69)\quad c_{00}=-\sum_{i=1}^n c_{i0}=-\sum_{j=1}^n c_{0j}=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}$$

であるから，(67)に代入して

$$(70)\quad x^{0\prime}\, C^0\, x^0=\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\, x_i\, x_j-\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\, x_j+\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\, x_i\right]x_0+\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}\, x_0{}^2$$

を得る。

そこでつぎに上記の2次形式 $x_0'C^0x^0$ が $x^0 \neq 0$ に対して負となることを証明しよう。まず $x_0=0$ とすれば，

注(49) Cf. J. Quirk, "Complementarity and Stability of Equilibrium," *American Economic Review*, June 1970, p. 362, Corollary.

$$(71)\quad x^{0\prime}C^0x^0=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_ix_j=x'Cx=\frac{1}{2}x'(C+C')x$$

となり，Cが負の準定符号であるところから，$x'(C+C')x<0$ となるから，$x^{0\prime}C^0x^0<0$。他方 $x_0\neq 0$ とすれば，$y_i=x_i/x_0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ とおくことによって

$$(72)\quad \frac{x^{0\prime}C^0x^0}{x_0^2}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\Big[y_iy_j-y_i-y_j+1\Big]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\Big[y_i(y_j-1)-(y_j-1)\Big]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\ (y_i-1)(y_j-1),$$

ゆえにふたたびCが負の準定符号であるところから，$x^{0\prime}C^0x^0\leqq 0$ で，かつ $y-1\neq 0$ であるかぎり $x^{0\prime}C^0x^0<0$ となる。そして y_i の定義から $y_i-1\neq 0$ は $x_i\neq x_0$ と等義であるから，結局この帰結はすべての $i, j=0, 1, \cdots\cdots, n$ について $x_i=x_j$ でないかぎり，$x^{0\prime}C^0x^0<0$ となることを意味している。

ところでC^0 の任意のn次主座部分行列は C^0 から任意の第i行第i列をとり去ったものにほかならないから，それからつくられる2次形式は $x^{0\prime}C^0x^0$ において当該の x_i を0とおくことによって得ることができる。そして x_i を除いたn次のxベクトルを非ゼロとする以上，この措置は明らかに前のパラグラフの条件を満たしているから，結局のところ補助定理の主張が成立せざるをえない。

補助定理13の系　A^0 が符号対称的であるとき，Aが W^* 安定であるためには，$C^0\epsilon W_{A^0}{}^*$のn次の主座部分行列はすべてヒックス行列とならねばならない。

証明

負の準定符号性がヒックスの完全安定性を含意するところから自明。

定理17の証明

必要性。A^0の非対角元素のなかに負のものがあったとして，矛盾を導けばよい。そのためにいま特定の (i, j) について $a_{ij}<0$, $a_{ji}>0$ であったとして，2×2 の主座部分行列

$$A=\begin{bmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{bmatrix}$$

を考えてみる。仮定から $C^0\epsilon W_{A^0}{}^*$のすべての C^0 についてCは安定であるから，補助定理12によって $C+C'$ もまた安定となる。ゆえに以下では一般性を失うことなく，Cそのものが対称であると仮定してよい。そのようなCは補助定理13の系からヒックス行列であるから，

$$(73)\quad c_{ii}<0,\ c_{jj}>0,\ c_{ii}c_{jj}-c_{ij}^2>0$$

となり，したがっていま帰謬法の仮定から $c_{ij}<0$, $c_{ji}<0$ であれば，行和

$$\alpha_i = c_{ii} + c_{ij}$$

(74) $$\alpha_j = c_{ji} + c_{jj}$$

はいうまでもなく負の符号をとる。

さてここで $B^0 \epsilon Q_{A^0}$ を

(75) $$\begin{bmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ji} & b_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_i^2}{\alpha_i+\alpha_j}+\varepsilon & \dfrac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}-\varepsilon \\ \dfrac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}-\epsilon & \dfrac{\alpha_j^2}{\alpha_i+\alpha_j}+\varepsilon \end{bmatrix}$$

となるように選んでみよう。ただし ε は十分に小さい正の数であるとする。すると $b_{ii}<0$, $b_{jj}<0$, $b_{ij}=b_{ji}<0$ で，B^0 の元素はすべて C^0 の元素と同符号であり，かつ

(76) $$b_{ii}+b_{ij}=\frac{\alpha_i^2+\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}=\alpha_i$$
$$b_{ji}+b_{jj}=\frac{\alpha_j^2+\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}=\alpha_j$$

となるから，$B^0 \epsilon W_{A^0}{}^*$ となる。

ところが

(77) $$b_{ii}b_{jj}-b_{ij}^2=\left(\frac{\alpha_i^2}{\alpha_i+\alpha_j}+\varepsilon\right)\left(\frac{\alpha_j^2}{\alpha_i+\alpha_j}+\varepsilon\right)-\left(\frac{\alpha_i\alpha_j}{\alpha_i+\alpha_j}-\varepsilon\right)^2=\varepsilon\ (\alpha_i+\alpha_j)<0$$

となるから，B はヒックス行列となることはできず，これは A が W^* 安定であるという仮定と矛盾する。

十分性。十分性の成立は，すでによく知られたところである。

上記の諸定理は，補完財の存在がかならず競争均衡を不安定にするという主張を提唱するものではなく，むしろ補完財を含むシステムの安定性を導くにあたっては何らかの定量的な仮説の導入が不可避となることを示すものである。[(50)] 定性的な根拠にのみもとづいて立論するかぎり，粗代替性の事例が安定性のための唯一可能な仮説でしかない，というのがそれらの意味するところである。従来から十分条件の資格において設定されるのをつねとしてきたこの仮説に，こうした必要条件の側での役割が見出されえたのは，興趣に富む新知識の一つというべきであろう。

（経済学部教授）

注(50) すでにアロー＝ハーヴィッチなどによって見出されているいくつかの定量的な仮説は，別に補完財の存在とは矛盾しない。そのようなものとしては，たとえば(1)すべての個人の相似性の仮説，(2)社会的な超過需要関数に関する顕示選好の弱公理の仮説，(3)初期賦存量がパレート最適に合致しているという仮説，等々をあげることができよう。福岡「市場均衡の安定性 II」，『三田学会雑誌』1975年1・2月合併号，pp. 39-40参照。