Title	一時的均衡分析(その1)
Sub Title	Temporary equilibrium analysis
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.7 (1976. 10) ,p.555(55)- 573(73)
JaLC DOI	10.14991/001.19761001-0055
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19761001-0055

一時的均衡分析
(その1)

丸山　徹

序

ヒックスが『価値と資本』[1]において正確に定型化した「一時的均衡」の構想は，動学的経済理論にひとつの玲瓏なる境地を開く成果であった。その骨子を要言すれば次のようである。まず暦の上での時間の流れが「週」を単位として分割せられ，各週のはじめ，つまり毎「月曜日」ごとに今週の需給に関する市場が開かれる。肝心な点は，この市場で整合されるべきものは今週おこなわれる需給売買のみであり，先物市場は存在しないという想定である。したがって，各主体にとって将来の市場に成立する均衡価格は全く不確実たらざるをえず，かれらはたかだか現行価格と各自の将来価格の予想にもとづいて，現在から将来にわたる需給の最適時間形態を決定しうるにすぎないであろう。そのような主体は「月曜日」の朝に開かれる市場に参集して交換に従事するわけであるが，所謂「模索の過程」をつうじて，その日の夕方までには今週の需給に関する均衡すなわち「一時的均衡」が達せられねばならない。一時的均衡における価格がその日の「でき値」であり，観察される時系列の価格変動は，このようにして達せられた「でき値」の軌跡として把握されるのである。

これは，価格の変動を説明するひとつの「仮説」であって，他の仮説設定も無論可能であろう。ただし，この理論仮説が論理的に無欠陥たりうるためには，その理論モデルが，各月曜日ごとの均衡の存在を確然と保証するものでなければならないことは理の当然である。なぜなら，かりに均衡点の存在が保証されないとすれば，「でき値の軌跡」などを云々すること自体，全く意味を失い，均衡点の存在を仮定して行なわれる分析は万事徒労に帰するからである。この意味で均衡点の存在証明は，いわば理論の「内部生理学」に属することがらである。

以上のような方法論的重要性に鑑みて，本稿ではまず一時的均衡の枠組の中で各主体の合理的行動のありさまを分析し，さらにかれらの行動を市場において整合する競争的一時的均衡の存在証明

注(1) Hicks〔15〕。また青山〔1〕，森嶋〔22〕，安井〔31〕の参照が有益である。

を行なう。[(2)]

I　生産者の行動

§1．準　備

不確実性の下で，生産者はいかに行動をなすか。この問題を一時的均衡理論の枠組の中で検討することから始めよう。

通常の均衡理論においては，生産者の生産計画（投入＝産出計画）はそのまま需給計画に合致するものと考えられていたのであるが，視点を動学化し，しかも在庫として将来に持ち越すことのできる財を含む生産を考える場合には，これらふたつの計画は必ずしも同一物とは限らないであろう。つまり，ある週に生産された財をその週の市場へもたらすことなく，いったん在庫としたのちに，将来一層有利な時点でそれを供給する行動，あるいはまた，ある週に購買した生産財をすぐに用いずに，将来の時点で生産過程に投ずるというが如き行動をも考慮する必要が生じてくるのである。このような場合に，生産者の最適な生産計画・需給計画の時間的形態を決定する問題を解くことにしよう。[(3)]

また生産者の行動は技術の条件から制約を受けるのみならず，資金面・金融面からも制約を受けるはずである。われわれはこの側面をも明示的に考慮するために，次のような想定を設けることにしよう。[(4)]すなわち，生産者は今週の売上高，先週からの繰越金，他の主体に対する貸付金の返済とその利子所得から生産財や本源的要素を購入し，種々の動機にもとづく金融資産を需要し，その不足額はあらたな借入によって賄われねばならない。金融資産としては貨幣と，満期1の短期債券の二種のみを考えるが，さらに多様な資産を導入することも容易である。

分析にあらわれる財の種類としては，まず貨幣（第0財），満期1の短期債券（第1財）および財一般（第2，……，n財）である。第2，……，n財のうち，第2，……，l財は，もっぱら消費者から供給される本源的要素，残りの第（$l+1$），……，n財のうち，第j生産者にとっての生産財の添数

注（2）一層単純なモデルに対する同種の試みとして，Arrow-Hahn〔3〕, Grandmont〔10〕, Green〔12〕, Sonderman〔28〕などの業積がある。また Arrow-Hahn の二期間モデルを多期間モデルに拡張したものとして瀬古〔27〕がある。本稿におけるモデル設定はとくに森嶋〔22〕に多くを負うていることをあらかじめことわっておかねばならない。そして森嶋の研究に対してひとつの形で分析的な基礎づけを与えることができるならば，筆者の本懐とするところである。

（3）この問題は古典的な枠組の中で森嶋〔22〕によって詳細に分析せられた。

（4）本稿におけるこの側面の取り扱いは決して十分なものではなく，さらに具体的検討が必要である。とくに Kamiya〔17〕を参照のこと。

の集合を $I_j \subset \{l+1, \cdots\cdots, n\}$，そして第 j 生産者の生産物の添数の集合を $O_j \subset \{l+1, \cdots\cdots, n\}$ と書き，

$$I_j \cup O_j = \{l+1, \cdots\cdots, n\}, \qquad I_j \cap O_j = \phi$$

とする。集合 I_j と O_j の構成はもちろん生産者ごとに異なってよいが，各 j についてはその計画期間をつうじて変化しないものと仮定しよう。表を以て示せば次の如くである。

第 0 財	貨　幣
第 1 財	短期債券
第 2 財 〜 第 l 財	本源的要素
第 $(l+1)$ 財 〜 第 n 財	I_j 生産財
	O_j 生産物

〈表１〉

本源的要素を除く一般の財（第 $(l+1)$〜n 財）すべてが在庫計画の対象となる。**これらはすべて単用財であるが，在庫期間中は物的減耗および保蔵費用はともにゼロであるものとしよう。**

各生産者 j は，今週（第０週）から将来にわたってのある有限な計画期間を有し，その最終の週を第 T_j 週としよう。各生産者 j はまた，第０週のはじめに所与の初期保有量として[5]，

$$w_j \in \mathbf{R}_+^{n+1}$$

を有するが，ここで債券・本源的要素の初期保有量はゼロとする。つまり，

$$w_{kj} = 0 \quad \text{for } k = 1, 2, \cdots\cdots, l。$$

さらに第０週のはじめには債務も存在しないものとする。

生産者 j は計画期間内の各週 $\tau = 0, 1, \cdots\cdots, T_j$ についての需給計画

$$(y_j^\tau \in \mathbf{R}^{n+1})_{\tau=0}^{T_j}$$

および第２，……，n 財に関する生産計画

$$(y'^\tau_j \in \mathbf{R}^{n-1})_{\tau=0}^{T_j}$$

を作成する，ここで，

$$y_{kj}^\tau \begin{cases} >0 & \text{第 } k \text{ 財が生産者 } j \text{ によって需要される場合} \\ <0 & \text{第 } k \text{ 財が生産者 } j \text{ によって供給される場合} \end{cases} \tag{1-1}$$

注(５)　本稿をつうじて，

$\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m / x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m) \geqq 0;\ i.e.\ x_i \geqq 0 \text{ for all } i\}$

$\mathbf{R}_{++}^m = \{x \in \mathbf{R} / x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m) > 0;\ i.e.\ x_i > 0 \text{ for all } i\}$

また $x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m) \geq 0$（半正）は $x_i \geqq 0$ for all i で，しかも少なくともひとつの i については $x_i > 0$ なることを意味する。

$$y'^{\tau}_{kj}\begin{cases}>0 & k\in O_j \text{ の場合}\\ <0 & k\in I_j \text{ の場合}\end{cases} \tag{1-2}$$

と約束しておけば，各週の第2，……，n財に関する在庫計画

$$(y''^{\tau}_{j}\in \mathbf{R}^{n-1})^{T_j}_{\tau=0}$$

が自動的に決定されるであろう[(6)]。すなわち，

$$\begin{aligned} y^{0}_{kj}+y'^{0}_{kj}&\equiv y''^{0}_{kj}-w_{kj}\\ y^{\tau}_{kj}+y'^{\tau}_{kj}&\equiv y''^{\tau}_{kj}-y''^{\tau-1}_{kj}\\ &\text{for all } k=2,\ \cdots\cdots,\ n\\ &\text{for all } \tau=1,\ \cdots\cdots,\ T_j \end{aligned} \tag{2}$$

ただし仮定によって，

$$w_{kj}=0,\ y''^{\tau}_{kj}=0 \quad \text{for } k=2,\ \cdots\cdots,\ l。$$

(2)式の意味するところは，生産計画と需給計画の差が在庫の増減に等しいということである。

さらに**生産者の供給しうるものは自己の生産物と金融資産のみであって，保有する生産財を供給することはありえないものとする。**

諸財の価格は貨幣を以て測られるものとし，第τ週における第k財の価格をp^{τ}_{k}，短期債券の利子率をγ^{τ}としよう。債券については，返済時の元利合計が1となるように単位を定めることにすれば，

$$p_1^{\tau}\equiv(1+\gamma^{\tau})^{-1} \quad \text{for all } \tau。 \tag{3}$$

ここで

$$\gamma^{\tau}\geqq 0 \quad \text{for all } \tau \tag{4}$$

である。第τ週の価格体系を

$$p^{\tau}\equiv(1,\ p^{\tau}_{1},\ \cdots\cdots,\ p^{\tau}_{n})$$

と書き，**本稿をつうじて**

$$p^{\tau}>0 \tag{5}$$

とする。すなわち自由財は存在しないものと仮定するのである。これは重要な限定である。

§2. 予想と制約条件

予想　各生産者jは将来の市場を支配する均衡価格について不確実性を有する。先に述べたようにわれわれのモデルには先物市場が存在しないから，生産者はたかだか将来の価格を「予想」し，その下でなんらかの最適なる行動をとりうるにすぎないであろう。その予想のパターンに応じて，経済均衡のありさまは著しく容貌をたがえるにちがいないのであるから，一時的均衡理論にとって

注(6)　ここでは在庫の対象となる財の物的減耗をゼロと仮定していることを想起されたい。

基本的に重要な概念はこの予想である。これにはさまざまな定式化が可能であろうが，ここでは古典的な “single-valued estimation” よりもやや一般的に，次のように考えることとしたい。

すなわち各生産者 j の予想とは，過去と現在の価格が与えられたとき，それに将来の均衡価格の（主観的）確率測度を対応せしめる写像である。しかし，過去の価格はすでに固定的な与件とみなすならば，生産者 j の予想写像 Ψ_j は，今週の各価格体系 $p^0 \in \mathbf{R}^{n+1}_{++}$ を，$\mathbf{R}^{(n+1)T_j}_{++}$ 上の確率測度に対応せしめる測度値の写像と考えることができる。いっそう厳密な表現を与えれば，

$$\Psi_j : \mathbf{R}^{n+1}_{++} \longrightarrow \mathbf{M}\,(\mathbf{R}^{(n+1)T_j}_{++})。\tag{6}$$

ここで $\mathbf{M}\,(\mathbf{R}^{(n+1)T_j}_{++})$ は空間 $\mathbf{R}^{(n+1)T_j}_{++}$ 上で定義されるすべての Borel 確率測度の族であり，そこには所謂，弱収束位相が与えられている。(7)

仮定 1　すべての j について，Ψ_j は連続である。

仮定 1 の意味するところは直感的に言って，現行価格 p^0 がほんのわずか変化したときには，将来価格の主観的確率測度の変化もわずかであるということである。

純収入・流動性・効用　計画期間の価格体系 $(p^\tau)^{T_j}_{\tau=0}$，生産者 j の需給計画 $(y^\tau_j)^{T_j}_{\tau=0}$ およびかれの初期保有量 w_j が与えられたときに，これに対応する各週の純収入(9)は次のようにして計算される。

$$（第0週）\quad \pi^0_j = -\sum_{k=0}^{n} p^0_k y^0_{kj} + w_{0j} \tag{7}$$

$$（第 t 週）\quad \pi^\tau_j = -\sum_{k=0}^{n} p^\tau_k y^\tau_{kj} + y^{\tau-1}_{0j} + y^{\tau-1}_{1j} \tag{8}$$

$$\tau = 1,\ 2, \cdots\cdots,\ T_j$$

すなわち一般に第 τ 週の純収入は，

〔（生産物売上高）＋（繰越現金）＋（新規借入）〕

－〔（本源的要素需要総額）＋（生産財需要総額）＋（貨幣ストック需要総額）＋（債務返済）〕

であり，第 0 週には債務が存在しないことを仮定して計算が行なわれている。

そして，計画期間の純収入を

$$\pi_j = \sum_{\tau=0}^{T_j} \beta^\tau \pi^\tau_j \tag{9}$$

$$\text{where}\quad \beta^\tau = [(1+\gamma^0)(1+\gamma^1)\cdots\cdots(1+\gamma^{\tau-1})]^{-1}$$

と定義する。

注（7）確率測度の弱収束については Billingsley〔4〕，Parthasarathy〔23〕，さらに新しい結果については丸山〔21〕を見よ。また本稿で用いられる実函数論上の諸概念については，たとえば Halmos〔14〕など。

（9）ここで定義された π^τ_j は通常の利潤概念とは甚しく異なるので，「純収入」なる用語を用いることとした。

純収入とともに生産者の興味の対象となるのは，かれが保持する流動性の実質的な大きさであろう。ケインズは貨幣需要の動機を三分して，取引動機・予備的動機・投機的動機とした。このような流動性機能は，通常さまざまな資産によってもたらされるであろうが，このモデルでは金融資産——つまり，貨幣と債券の実質的価値の大きさによって流動性の大小が測られるものとしよう。(10)

そこでいま，生産者 j が計画期間をつうじて保有する金融資産の実質量を $(y^{\tau}_{0j},\ y^{\tau}_{1j},\ p^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}$ で表わすものとすれば，これにもとづいて，主観的に評価する流動性の大小を，実数値の大小を以て表現する函数を

$$L_j((y^{\tau}_{0j},\ y^{\tau}_{1j},\ p^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}) \tag{10}$$

と書き，これを生産者 j の**流動性函数**と呼ぼう。すなわち，ふたつの実質金融資産の流れ $(\dot{y}^{\tau}_{0j},\ \dot{y}^{\tau}_{1j},\ \dot{p}^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}$，$(\ddot{y}^{\tau}_{0j},\ \ddot{y}^{\tau}_{1j},\ \ddot{p}^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}$を比較して，前者が後者よりも主観的に大なる流動性を与えるとき，流動性が相等しいとき，後者が前者よりも大なる流動性を与えるときに応じて，それぞれ

$$L_j((\dot{y}^{\tau}_{0j},\ \dot{y}^{\tau}_{1j},\ \dot{p}^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}) \gtreqless L_j((\ddot{y}^{\tau}_{0j},\ \ddot{y}^{\tau}_{1j},\ \ddot{p}^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}) \tag{11}$$

である。(11) 流動性函数には次のような仮定を設ける。

仮定2′ すべての j について，流動性函数 L_j は，$(y^{\tau}_{0j},\ y^{\tau}_{1j},\ p^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}$ について連続であり，$(p^{\tau})^{Tj}_{\tau=0}$ を固定したとき $(y^{\tau}_{0j},\ y^{\tau}_{1j})^{Tj}_{\tau=0}$ に関する凹函数である。

生産者 j は，純収入の現在価値総額(9)と流動性(10)とのあらゆる可能な組合せについて完全な擬順序を有し，その擬順序が効用函数

$$v_j(\pi_j,\ L_j) \tag{12}$$

で表現されているものとしよう。(12) そこで，

仮定2″ すべての j について，v_j は $(\pi_j,\ L_j)$ についての連続・単調増加，かつ強い意味での凹函数である。

この定義によれば，

注(10) 森嶋〔22〕では，保有在庫もまた流動性を満たすものとされ，流動性を一定の大きさに保ちながら。技術と資金の制約の下に，純収入の流れの現在価値を最大化する生産者像が考えられている。

(11) 厳密に言えば，われわれはすべての可能な実質金融資産の流れに完全な擬順序が与えられており，$L_j(\cdot)$ はその擬順序を表現する函数と仮定しているのである。そのような order-preserving な実数値函数の存在条件については丸山〔19〕において体系的な検討がなされている。ここでは煩雑をきらって，そうした存在条件は満たされているものと仮定する。

(12) このような v_j の存在条件についても丸山〔19〕を参照。

$$v_j : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$$

であるが，w_j を所与とすれば，π_j と L_j は $(y_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ の函数であるから，v_j もまた $(y_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ の函数と与えることができる。すなわち，

$$v_j : \mathbf{R}^{2(n+1)Tj} \longrightarrow \mathbf{R}。 \tag{13}$$

上に仮定した流動性函数や効用函数の性質を背景とすれば，次のような仮定を設けることは納得のゆくことであろう。

仮定 2　v_j を $(y_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ の函数とみたとき，これは連続，有界で，$(p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ を固定したとき，$(y_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ について強い意味での凹性を満たす。

このうち，とくに $(y_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ について v_j が強い意味での凹性を満たすことに関しては次のように考えればよかろう。$(p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ を固定し，任意の $(\dot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$, $(\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ がについて，

$$y_j^\tau = \alpha\dot{y}_j^\tau + (1-\alpha)\ddot{y}_j^\tau \quad \text{for all } \tau \qquad \text{where } 0<\alpha<1 \tag{14}$$

とおく。すると明らかに

$$\begin{aligned}&\pi_j((y_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\\ &=\alpha\pi_j((\dot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) + (1-\alpha)\pi_j((\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\end{aligned} \tag{15}$$

であり，また L_j の凹性（仮定2′）から，

$$\begin{aligned}&L_j((y_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\\ &\geqq\alpha L_j((\dot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) + (1-\alpha)L_j((\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\end{aligned} \tag{16}$$

さらに v_j は (π_j, L_j) について強い意味での凹性を満たし，また単調性をもつ（仮定2″）のであるから，

$$\begin{aligned}&\alpha v_j(\pi_j((\dot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}), L_j((\dot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})) + (1-\alpha)v_j(\pi_j((\ddot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}), L_j((\ddot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}))\\ &< v_j(\alpha\pi_j((\dot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) + (1-\alpha)\pi_j((\ddot{y}_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}), \alpha L_j((\dot{y}_j^\tau, p^t)_{\tau=0}^{Tj}) + (1-\alpha)L_j((\ddot{y}_j^t,\\ &\quad p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}))\\ &\leqq v_j(\pi_j((y_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}), L_j((y_j^\tau, p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}))\end{aligned}$$

となって所望の帰結をうる。

以上が仮定3の背後にある思想の説明である。**以下の行論においてはもっぱら仮定2のみが用いられ，仮定2′，2″が直接に用いられることはない。**これらは仮定2を正当化するための背景である。

技術　第τ週において，生産者jにとって技術的に可能な，第2，……，n財に関する投入＝産出ベクトルの全体を $Y_j^\tau \subset \mathbf{R}^{n-1}$ とする。これを生産者jの第τ週における，**生産可能集合**といい，その元が第τ週の**生産計画**である。Y_j^τ に課せられる仮定は次のようである。

仮定3　(i)　$O \in Y_j^\tau$ for all j, τ

(ii)　Y_j^τ は $\mathbf{R}^{n-1}$ のコンパクト・凸集合 for all j, τ。

(iii)　$Y_j^\tau \cap \mathbf{R}_+^{n-1} = \{0\}$ for all j, τ。

これらの仮定の意味については，今日すでに説明を要しないであろう。[(13)] そしてまた，各生産者とも，技術についての不確実性はないものとする。

資金の制約　各生産者jにとって，資金面＝金融面での制約は次のようである。

$$\text{（第0週）}\quad \sum_{k=0}^{n} p_k^0 y_{kj}^0 \leqq w_{0j} \tag{17}$$

$$\text{（第}\tau\text{週）}\quad \sum_{k=0}^{n} p_k^\tau y_{kj}^\tau \leqq y_{0j}^{\tau-1} + y_{1j}^{\tau-1} \tag{18}$$

$$\tau = 1, 2, \cdots\cdots, T_j$$

これらの式の意味するところは，各週の本源的要素需要・生産財需要・貨幣ストック需要および債務の履行が，生産物の売上総額・前の週からの繰越現金および新規借入を以て賄われるべきことである。ここで注意しておくべき点としては，

1°　第0週のはじめには，債権，債務のいずれも存在しないこと。

2°　第T_j週においても新規借入を行なうことができること。

3°　各週の純収入を示す(7)(8)と，上の(17)(18)とを比べれば明らかなように，(17)(18)の右辺から左辺をさし引いた差がすなわち各週の純収入なのである。これはのちに見るように，ある一定の配当率にしたがって，すっかり消費者に配分されるものである。[(14)]

注(13)　Debreu〔6〕Chapter 3。ただ (ii) において $Y_\tau^j(\tau=0, 1. \cdots\cdots, T_j)$ のコンパクト性を課することが甚だ厳しい条件である。この仮定はとくに第0週については周知の理由にもとづいて十分にゆるくすることができるのであるが，本稿の分析は他の箇所で議論が複雑になっているので，この点については“easy way”を採用し，推論の本質を分明にしようとしたのである。

(14)　すなわち，われわれの想定している経済は Arrow-Debreu〔2〕，Debreu〔6〕などと同様の，いわゆる「私有制経済 (private ownership economy) とみなしうるものであり，森嶋〔22〕の想定も同種のものと考えられる(p. 34)。さらに，**この純収入はつねに非負である**ことにも注意しておこう。

§3. 最適計画の決定

前節では，各生産者の行動目標となる純収入や流動性の概念，ならびにその行動を制約する諸条件について議論した。そこで本節では，各生産者の最適化行動の原理を厳密に定式化し，それを解くことによって，各与件に応ずる最適な需給計画・生産計画の導出を試る。ここで取り扱うような動学的多期間分析においては，各週の計画を制約する条件が，それ以前の生産者行動に依存することとなり，そこに静学的分析ではあらわれることのなかった複雑な問題と技術的な困難が生ずるのである。この困難をいかに克服して最適化問題を解くか，これがひとつの分析の焦点となるであろう。解法の基本はいわば「うしろ向きの動的計画法」(backward dynamic programming) とも称すべき構想にある。[15]

以下，記法を簡単にするために

$$(y_j^\tau,\ y'^\tau_j) \equiv \mathbf{y}_j^\tau \quad (\tau=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T_j)$$

と書く。

技術的に可能な需給計画　まず一般に，第 τ 週の在庫計画は $(w_j,\ \mathbf{y}_j^1,\ \mathbf{y}_j^2,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^\tau)$ が定まれば自動的に決定されることに注意すると，[16] 生産者 j の各週において技術的に可能な需給計画の集合は次のように書けるであろう。

(第 0 週)　$\Lambda_j^0(w_j)$

$$\equiv \{y_j^0 \in \mathbf{R}^{n+1} / -w_{kj} - y'^0_{kj} \leqq y_{kj}^0 \ \text{ for } k=2,\ \cdots\cdots,\ n\ ;\ \text{and } y'^0_j \in Y_j^0\} \tag{19}$$

(第 τ 週)　$\Lambda_j^\tau(w_j,\ \mathbf{y}_j^0,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1})$

$$\equiv \{y_j^\tau \in \mathbf{R}^{n+1} / -y''^{\tau-1}_{kj} - y'^\tau_{kj} \leqq y_{kj}^\tau \ \text{ for } k=2,\ \cdots\cdots,\ n\ ;\ \text{and } y'^\tau_j \in Y_j^\tau\} \tag{20}$$

$$\tau=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T_j$$

これらの意味は，不等式

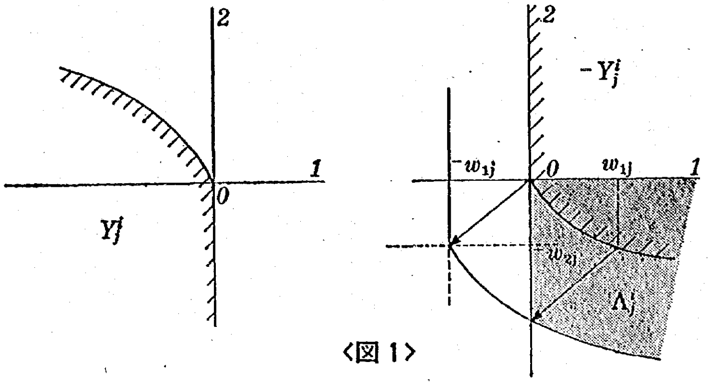
$$-y''^{\tau-1}_{kj} - y'^\tau_{kj} \leqq y_{kj}^\tau$$

の内容を考えてみれば自ら明らかであろう。つまり，第 k 財が本源的要素であれば，仮定によって $y''^{\tau-1}_{kj}=0$ であるから，生産計画 y'^τ_j が選ばれたときに，第 k 財の需要量は最低限 $-y'^\tau_{kj}$ でなければならない。また第 k 財が生産財の場合は，$(\tau-1)$ 週から持ち越された在庫 $y''^{\tau-1}_{kj}$ を利用できるので，生産計画 y'^τ_j を選んだときに，第 k 財の需要量は最低限 $-y''^{\tau-1}_j - y'^\tau_j$ である。さらに第 k 財が生産物のときは，同様にして，生産計画 y'^τ_j を選んだときに最大限可能な第 k 財の供給量は $y''^{\tau-1}_j + y'^\tau_j$ であろう。貨幣（第0財），債券（第1財）については全く free であって，これらに対

注(15)　この方法を単純なモデルに適用した例として，注(2)にあげた諸文献を見よ。
　(16)　§1の(2)式を参照。

する制約は後に他の関係式を以て定める。

理解を直感的ならしめるために，生産財・生産物各1財ずつの局面に限定して図示すれば次のようである。



〈図1〉

つまり，$\Lambda_j^\tau(w_j,\ \mathbf{y}_j^0,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1})$ は金融資産以外の部分については，$-Y_j^\tau$ を $-y''^{\tau-1}_j$ だけ translation したものと考えて概ねよろしいのである。(17)

するとただちに次の命題をうる。

レンマ1　集合値函数（$\tau=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T_j$）

$$w_j \longmapsto \Lambda_j^0(w_j)$$

$$(w_j,\ \mathbf{y}_j^0,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1}) \longmapsto \Lambda_j^\tau(w_j,\ \mathbf{y}_j^0,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1})$$

は非空・凸・閉値（in $\mathbf{R}^{n+1}$）で，かつ連続である。

資金面を考慮した需給計画　上に定義した，技術的に可能な需給計画とは，文字どおり技術的な関係だけから導かれたものであって，生産者に対する資金面＝金融面からの制約は，全くこれを考慮外とした概念であった。そこで次には資金面をも考慮した需給計画を検討する。そのためには若干の仮定を追加する必要があるので，それをまず列挙する。

仮定4　(i)　$\exists k \in O_j$ such that $w_{kj}>0$

(ii)　この k について，

$$y''^{\tau}_{kj} \geqq w_{kj}-\varepsilon_\tau \quad \text{for } \tau=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ T_{j-1}$$

ここで，

$$0<\varepsilon_0<\varepsilon_1<\cdots\cdots<\varepsilon_{Tj-1}<w_{kj}$$

仮定5　$y_{1j}^\tau<0$ のときは，

注(17)　もちろんこれは直感的な表現であって厳密には translation でないことは図1だけからも明らかである。

$-y_{1j}^{\tau} \leqq D_j$ for some $D_j < \infty$

そこで以下の分析では，w_j を仮定4を満たすようにひとつ固定して考える。すると生産者 j の，各週において技術的にも資金的にも可能な需給計画の集合は，

$$\text{（第0週）}\quad \Gamma_j^0(p^0)$$
$$\equiv \{y_j^0 \in \Lambda_j^0(w_j) / y_j^0 \text{ は (17)，仮定4，5を満たす}\} \tag{21}$$
$$\text{for each } p^0 \in \mathbf{R}_{++}^{n+1}$$
$$\text{（第}\tau\text{週）}\quad \Gamma_j^{\tau}(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^{\tau})$$
$$\equiv \{y_j^{\tau} \in \Lambda_j^{\tau}(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}) / y_j^{\tau} \text{ は(18)，仮定4，5を満たす}^{(18)}\} \tag{22}$$
$$\text{for } \mathbf{y}_j^0 \in \Gamma_j^0(p^0),\ \mathbf{y}_j^1 \in \Gamma_j^1(\mathbf{y}_j^0; p^1),\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1} \in \Gamma_j^{\tau-1}(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-2}; p^{\tau-1}) \text{ and}$$
$$p^{\tau} \in \mathbf{R}_{++}^{n+1}$$

そこで，われわれの分析にとって，基本的に重要な次のレンマを証明しよう。

レンマ2 集合値函数

$$p^0 \longmapsto \Gamma_j^0(p^0)$$
$$(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^{\tau}) \longmapsto \Gamma_j^{\tau}(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^{\tau})$$
$$\tau = 1, 2, \cdots\cdots, T_j$$

は，非空・凸・コンパクト値（in $\mathbf{R}^{n+1}$）で，かつ連続である。

証明） まず，これらの函数が非空・閉凸値であることは明らかであるから，有界性と連続性のみを示せば十分であろう。

<u>有界性</u>： たとえば各 $p^0 \in \mathbf{R}_{++}^{n+1}$ について $\Gamma_j^0(p^0)$ の有界性は次のようにして示される。まず $y_{1j}^0 \geqq 0$ のときは，制約式(17)を

$$y_{0j}^0 + p_1^0 y_{1j}^0 + \sum_{k=2}^{l} p_k^0 y_{kj}^0 + \sum_{k \in I_j} p_k^0 y_{kj}^0 \leqq -\sum_{k \in O_j} p_k^0 y_{kj}^0 + w_j^0$$

と書きかえる。左辺は生産者 j の需要項目，右辺は供給項目である。仮定により Y_j^0 はコンパクトゆえ，右辺は有界であり，また $p^0 > 0$ であるから，左辺にあらわれる y_{kj}^0 はすべて有界である。右辺にあらわれる y_{kj}^0 も有界であるから，結局すべての y_{kj}^0 が有界となる。

他方，もし $y_{1j}^0 < 0$ であるならば，ふたたび(17)を

$$y_{0j}^0 + \sum_{k=2}^{l} p_k^0 y_{kj}^0 + \sum_{k \in I_j} p_k^0 y_{kj}^0 \leqq -p_1^0 y_{1j}^0 - \sum_{k \in O_j} p_k^0 y_{kj}^0 + w_{0j}$$

注(18) ただし，第 T_j 週については，仮定4は不要である。

と書きかえて考える。ここでも左辺が需要項目，右辺が供給項目をあらわしていることは言うまでもない。すると仮定5および Y_j^0 のコンパクト性から，右辺にあらわれる y_{kj}^0 はすべて有界で，したがって右辺全体も有界である。$p^0>0$ であるから，左辺にあらわれる y_{kj}^0 もすべて有界である。

$\tau\geqq 1$ についても同様にすればよい。

<u>連続性</u>： 仮定4を満たすように w_j を固定したとき，集合値函数

$$(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^\tau) \longmapsto \Gamma_j^\tau(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^\tau)$$

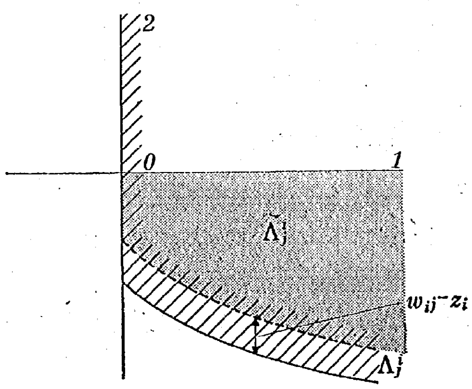
が，各パラメータについて連続となることを示す。ここでもちろん

$$y_j^0 \in \Gamma_j^0(p^0), \cdots\cdots, y_j^{\tau-1} \in \Gamma_j^{\tau-1}(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-2}; p^{\tau-1})$$

である。まず，集合値函数 $\tilde{\Lambda}_j^\tau$ を

$$\tilde{\Lambda}_j^\tau : (\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}) \longmapsto \{y_j^\tau \in \Lambda_j^\tau(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}) / y_j^\tau \text{ は仮定4，5を満たす}\}$$

と定義すれば，これは明らかに非空・閉・凸値で下に有界なる連続集合値函数である。



〈図2〉

仮定4によって

$$y''^{\tau-1}_{0j} + y^{\tau-1}_{1j} \neq \mathrm{Min}\ p_\tau \cdot \tilde{\Lambda}_j^\tau \text{ 。}$$

ゆえに丸山[20]の定理によって，集合値函数

$$(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^\tau) \longmapsto \{y_j^\tau \in \tilde{\Lambda}_j^\tau / p^t \cdot y_j^\tau \leqq y'^{\tau-1}_{0j} + y^{\tau-1}_{1j}\}$$

は連続であり(19)，所望の帰結をうる。

（証了）

いま，計画期間をわたる需給計画と生産計画の流れ

注(19) 丸山〔20〕の記号にあわせて書けば，f としては函数 $(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}) \longmapsto y'^{\tau-1}_{0j} + y^{\tau-1}_{1j}$，$X$ としては Λ_j^τ，γ としては

$$(\mathbf{y}_j^0, \cdots\cdots, \mathbf{y}_j^{\tau-1}; p^t) \longmapsto \{y_j^\tau \in \Lambda_j^\tau / p^t y_j^\tau \leqq y^{\tau-1}_{0j} + y^{\tau-1}_{1j}\}$$

を考えているのである。

$$c_j=\{(y_j^\tau)_{\tau=0}^{T_j},\ (y'^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}\}\in\mathbf{R}^{(n+1)(T_j+1)}\times\prod_{\tau=0}^{T_j}Y_j^\tau \tag{23}$$

が与えられた $(p^\tau)_{\tau=0}^{T_j}$ について

$$\begin{aligned}&y_j^0\in\Gamma_j^0(p^0)\\&y_j^\tau\in\Gamma_j^\tau(\mathbf{y}_j^0,\ \cdots\cdots,\ \mathbf{y}_j^{\tau-1};\ p^\tau)\\&\qquad\tau=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T_j\end{aligned} \tag{24}$$

を満たしているとき，これを技術的にも資金的にも可能な計画の流れと考えることができるであろう。そこで，

$$C_j((p^\tau)_{\tau=0}^{T_j}\equiv\{c_j/c_j \text{ は } (p^\tau)_{\tau=0}^{T_j} \text{ について(24)を満たす}\} \tag{25}$$

と定義する。

レンマ3　各 $(p^\tau)_{\tau=0}^{T_j}$について，集合 $C_j((p^\tau)_{\tau=0}^{T_j})$ は凸である。

証明）　いま C_j の任意の元を

$$\dot{c}_j=\{(\dot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{T_j},\ (\dot{y}'^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}\}$$

$$\ddot{c}_j=\{(\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{T_j},\ (\ddot{y}'^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}\}$$

とし，これらの凸結合を c_j とする。つまり，

$$c_j=\{(\alpha\dot{y}_j^\tau+(1-\alpha)\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=0}^{T_j},(\alpha y'^\tau_j+(1-\alpha)y'^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}\}。$$

$$0<\alpha<1。$$

そこで $c_j\in C_j$ となることを示せばよい。$\dot{c}_j$, $\ddot{c}_j$, c_j のそれぞれに対応する在庫計画の流れを $(\dot{y}''^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}$, $(\ddot{y}''^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}$, $(y''^\tau_j)_{\tau=0}^{T_j}$ と書くことにする。

(a)　技術面の制約

任意の τ，k について

$$\begin{aligned}\dot{y}_{kj}^\tau&\geqq-\dot{y}''^{\tau-1}_{kj}-\dot{y}'^\tau_{kj}\\&=-(\dot{y}_{kj}^{\tau-1}+\dot{y}'^{\tau-1}_{kj}+\cdots\cdots+\dot{y}_{kj}^0+\dot{y}'^0_{kj}+w_{kj})-\dot{y}'^\tau_{kj}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{kj}^\tau&\geqq-\ddot{y}''^{\tau-1}_{kj}-\ddot{y}'^\tau_{kj}\\&=-(\ddot{y}_{kj}^{\tau-1}+\ddot{y}'^{\tau-1}_{kj}+\cdots\cdots+\ddot{y}_{kj}^0+\ddot{y}'^0_{kj}+w_{kj})-\ddot{y}'^\tau_{kj}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\alpha\dot{y}_{kj}^\tau+(1-\alpha)\ddot{y}_{kj}^\tau\\&\geqq-\{\alpha\dot{y}_{kj}^{\tau-1}+(1-\alpha)\ddot{y}_{kj}^{\tau-1}+\alpha\dot{y}'^{\tau-1}_{kj}+(1-\alpha)\ddot{y}'^{\tau-1}_{kj}+\cdots\cdots+\alpha\dot{y}_{kj}^0+(1-\alpha)\ddot{y}_{kj}^0\\&\quad+\alpha\dot{y}'^0_{kj}+(1-\alpha)\ddot{y}'^0_{kj}+w_{kj}\}-(\alpha\dot{y}'^\tau_{kj}+(1-\alpha)\ddot{y}'^\tau_{kj})\end{aligned}$$

ここでもちろん

$$(\alpha\dot{y}'^\tau_{kj}+(1-\alpha)\ddot{y}'^\tau_{kj})_{k=2}^n\in Y_j^\tau$$

であることに注意しておこう。

(b) 資金面の制約

任意の τ について

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^\tau \dot{y}_{kj}^\tau \leqq \dot{y}_{0j}^{\tau-1} + \dot{y}_{1j}^{\tau-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^\tau \ddot{y}_{kj}^\tau \leqq \ddot{y}_{0j}^{\tau-1} + \ddot{y}_{1j}^{\tau-1}$$

であるから，

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^\tau (\alpha \dot{y}_k^{\tau j} + (1-\alpha)\ddot{y}_{kj}^\tau)$$

$$\leqq (\alpha \dot{y}_{0j}^{\tau-1} + (1-\alpha)\ddot{y}_{0j}^{\tau-1}) + (\alpha \dot{y}_{0j}^{\tau-1} + (1-\alpha)\ddot{y}_{1j}^{\tau-1})$$

をうる。

(c) 仮定4，5が満たされていることは明らかである。（証了）

いま $\mathbf{y}_j^0 = (y_j^0,\ y_j'^0)$，$y_j^0 \in \Gamma_j^0(p^0)$ と $(p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ の集合値函数

$$\Phi_j : (\mathbf{y}_j^0,\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) \longmapsto \{(\mathbf{y}_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj} / (\mathbf{y}_j^0,\ (\mathbf{y}_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}) \in C_j((p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\} \tag{26}$$

を定義すれば，レンマ2から容易に，

レンマ4 Φ_j は非空・コンパクト値で，各パラメータについて連続である。

次に，

$$\hat{\Phi}_j : (\mathbf{y}_j^0,\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$
$$\longmapsto \{(y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj} / \exists \{y_j'^\tau \in Y_j^\tau\}_{\tau=1}^{Tj} \text{ such that } (y_j^\tau,\ y_j'^\tau)_{\tau=1}^{Tj} \in \Phi_j(\mathbf{y}_j^0,\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\} \tag{27}$$

とすれば，これは，Φ_j の像を需給計画の流れの空間 $\mathbf{R}^{(n+1)T_j}$ へ射影したものであり，射影の性質とレンマ4とから，

レンマ5 $\hat{\Phi}_j$ は非空・コンパクト値で，各パラメータについて連続である。

最適計画（うしろ向きの動的計画） 以上の分析を基礎として，いよいよ最適化の原則を厳密に定式化し，それを解くこととする。その際，分析の鍵となるのは，周知の「最大値の定理」(Maximum Theorem) であり，これを繰り返し用いるので，まず定理そのものを述べておくのが便利であろう。[20]

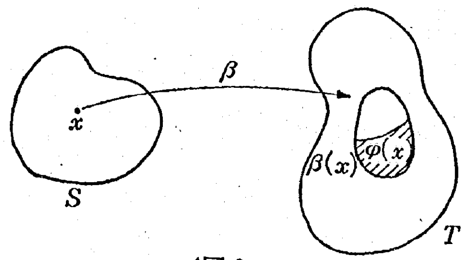
〈最大値の定理〉 β を距離空間 S から距離空間 T へのコンパクト値・連続な集合値函数とす

注(20) 詳しい解説と証明については Hildenbrand [16] pp. 29-30 を参照のこと。

る。また $f: S\times T\longrightarrow\mathbf{R}$ を連続な実函数とすれば，

(i) 函数 $x\longmapsto m(x)\equiv\mathrm{Max}\{f(x, y)/y\in\beta(x)\}$ は連続，

(ii) 集合値函数 $x\longmapsto\{y\in\beta(x)/f(x, y)=m(x)\}$ は非空・コンパクト値でupper hemi-continuous (u. h. c.)。



〈図3〉

そこでまず，$\mathbf{y}_j^0=(y_j^0, y'^0_j)$, $y_j^0\in\Gamma_j^0(p^0)$ と，$(p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ を固定して，次のような問題を考える。

問題1 Maximize $v_j(y_j^0, (y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$ on $\widehat{\Phi}_j(\mathbf{y}_j^0, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$

レンマ5と最大値の定理とからこの問題は解けて，

(1°) 函数

$$(\mathbf{y}_j^0, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$\longmapsto\underset{\Phi_j(\cdot)}{\mathrm{Max}}\ v_j(y_j^0, (y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})\equiv v_j^*(\mathbf{y}_j^0, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) \tag{28}$$

は連続，

(2°) 集合値函数

$$(\mathbf{y}_j^0, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$\longmapsto\{(y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}\in\widehat{\Phi}_j(\mathbf{y}_j^0, (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})/(y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}\ \text{はの問題1の解}\} \tag{29}$$

は非空・コンパクト値で u. h. c. 。

上の結果から v_j^* は $(p^\tau)_{\tau=1}^{Tj}$ について連続ゆえ，$\mathbf{R}_{++}^{(n+1)Tj}$ 上で Borel－可測である。また仮定3からそれは有界であるので，各 $(\mathbf{y}_j^0, p^0)$ について，次の積分が確定する。

$$\mathrm{V}_j(\mathbf{y}_j^0, p^0)=\int_{\mathbf{R}_{++}^{(n+1)Tj}} v_j^*((\mathbf{y}_j^0, p^0), (p^\tau)_{\tau=1}^{Tj})\, d\Psi_j(p^0) \tag{30}$$

レンマ6 $\mathrm{V}_j(\mathbf{y}_j^0, p^0)$ は連続である。

証明） 点列 $\{(\mathbf{y}_j^0(\lambda), p^0(\lambda)\}_\lambda$ が

$$(\mathbf{y}_j^0(\lambda), p^0(\lambda))\longrightarrow(\mathbf{y}_j^0, p^0)\quad \text{as } \lambda\to\infty \tag{31}$$

を満たすとき。

$$V_j(\mathbf{y}_j^o(\lambda),\ p^o(\lambda)) \longrightarrow V_j(\mathbf{y}_j^o,\ p^o) \quad \text{as } \lambda\to\infty \tag{32}$$

を示せばよい。被積分函数 v_j^* に注目すると，それは各 $(\mathbf{y}_j^o(\lambda),\ p^o(\lambda))$ に対応して，$\mathbf{R}_{++}^{(n+1)Tj}$ 上の連続函数族

$$F\equiv\{v_j^*(\mathbf{y}_j^o(\lambda),\ p^o(\lambda)),\ \cdot\,)\}_\lambda$$

を形成する。ただちに知られることは，

(a) F は一様に有界。

(b) $\mathbf{R}_{++}^{(n+1)\tau}$ の任意の一点において，F は $v_j^*(\mathbf{y}_j^o,p^o),\cdot)$ に連続収束する(continuously convergent)。

また仮定1によって，

(c) $\Psi_j(p^o(\lambda))\longrightarrow\Psi_j(p^o)$ as $\lambda\to\infty$

ゆえに Rao〔25〕Theorem 3.1[21] の条件がすべて満たされ，(32)が示された。

（証了）

$V_j(\mathbf{y}_j^o,\ p^o)$ は，$(\mathbf{y}_j^o,\ p^o)$ に応じて最大可能な生産者 j の効用の期待値である。ここで，生産者の最適化行動に関するわれわれの基本仮説を厳密に述べれば次のとおりである。

基本仮説 各生産者 j は，各 p^o に応じて $V_j(y_j^o,\ p^o)$ を最大化するように $\mathbf{y}_j^o$ を選択する。

このような最適化行動の解は二段に分けて求めることができる。

問題2 Maximize

$$V_j((y_j^o,\ y_j'^o),\ p^o) \quad \text{given } (y_j^o,\ p^o)$$

on

$$\Delta_j^o(y_j^o)\equiv\{y_j'^o\in Y_j^o\,/\,y_{kj}'^o\geqq-y_{kj}^o-w_{kj}\ \ k=2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

$$\text{where } y_j^o\in\Gamma_j^o(p^o)$$

明らかに，集合値函数

$$y_j^o\longmapsto\Delta_j^o(y_j^o) \tag{33}$$

は非空・コンパクト値で連続ゆえ，最大値の定理とレンマ6から，

(1°) 函数

$$(y_j^o,\ p^o)\longmapsto\max_{\Delta_o^j(y^o_j)} V_j((y_j^o,\ y_j'^o),\ p^o)\equiv V_j^*(y_j^o,\ p^o)$$

は連続，

(2°) 集合値函数

$$(y_j^o,\ p^o)\longmapsto\{y_j'^o\in\Delta_j^o(y_j^o)/y_j'^o \text{ は問題2の解}\}$$

は非空・コンパクト値で u. h. c. 。

注(21) 定理の証明およびその応用に関しては Rao 自身の論文〔25〕と丸山〔21〕を参照。

問題3 Maximize

$$V_j^*(y_j^0,\ p^0)$$

on

$$\Gamma_j^0(p^0)$$

これが，われわれのモデルの枠組で生産者行動理論を考える際の最終的な問であり，その解は次の形式で与えられる。

命題1 $\eta_j : p^0 \longmapsto \{y_j^0 \in \Gamma_j^0(p^0) / y_j^0$ は問題3の解$\}$
は一価連続函数である。

証明） η_j が非空・コンパクト値で，u. h. c. であることは，$V_j^*(y_j^0,\ p^0)$ の連続性，レンマ2および最大値の定理によって明らかである。したがって η_j が一価であることさえ示せば十分であり，その目的のためには，$V_j^*(y_j^0,\ p^0)$ が y_j^0 について強い意味での凹函数となることを証明すればよい。

まず，

$$\dot{y}_j^0,\ \ddot{y}_j^0 \in \Gamma_j^0(p^0)$$

を任意にとり，生産計画 $\dot{y}'^0_j \in \Delta_j^0(\dot{y}_j^0)$, $\ddot{y}'^0_j \in \Delta_j^0(\ddot{y}_j^0)$ はそれぞれ

$$V_j((\dot{y}_j^0,\ \dot{y}'^0_j),\ p^0) = V_j^*(\dot{y}_j^0,\ p^0)$$

$$V_j((\ddot{y}_j^0,\ \ddot{y}'^0_j),\ p^0) = V_j^*(\ddot{y}_j^0,\ p^0)$$

を満たすものとする。さらに $(p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}$ を固定したとき

$$(\dot{y}_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj} \in \widehat{\Phi}_j((\dot{y}_j^0,\ \dot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$(\ddot{y}_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj} \in \widehat{\Phi}_j((\ddot{y}_j^0,\ \ddot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

はそれぞれ

$$v_j^*((\dot{y}_j^0,\ \dot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$v_j^*((\ddot{y}_j^0,\ \ddot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

を実現する計画の流れとする。そこで

$$y_j^\tau = \alpha \dot{y}_j^\tau + (1-\alpha)\ddot{y}_j^\tau \quad \text{for all } \tau$$

$$0 < \alpha < 1$$

とおく。

仮定2から，

$$\alpha v_j^*((\dot{y}_j^0,\ \dot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})+(1-\alpha)v_j^*((\ddot{y}_j^0,\ \ddot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$<v_j((y_j^0,\ y_j^1,\ \cdots\cdots,\ y_j^{Tj}),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) \tag{34}$$

しかるにレンマ3により，C_jは凸集合であるから，

$$(y_j^\tau)_{\tau=1}^{Tj}\in\hat{\Phi}_i(y_j^0,\ \alpha\dot{y}'^0_j+(1-\alpha)\ddot{y}'^0_j,\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

ゆえに，定義によって

$$(34)\text{の右辺}\ \leqq v_j^*((y_j^0,\ \alpha y'^0_j+(1-\alpha)y'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) \tag{35}$$

(34)(35)から，

$$\alpha v_j^*((\dot{y}_j^0,\ \dot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})+(1-\alpha)v_j^*((\ddot{y}_j^0,\ \ddot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj})$$

$$<v_j^*((y_j^0,\ \alpha\dot{y}'^0_j+(1-\alpha)\ddot{y}'^0_j),\ (p^\tau)_{\tau=0}^{Tj}) \tag{36}$$

そこで(36)の両辺を測度 $\Psi(p^0)$ について積分すれば，所望の帰結をうる。

（証了）

参考文献

〔1〕 青山秀夫『経済変動理論の研究』第一巻（日本評論社，東京）1949.

〔2〕 Arrow, K. J. and G. Debreu "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy" *Econometrica* **22**, July 1954, 265-290.

〔3〕 Arrow, K. J. and F. H. Hahn *General Competitive Analysis* (Holden Day, San Francisco) 1971.

〔4〕 Billingsley, P. *Convergence of Probability Measures* (Wiley, N.Y.) 1968.

〔5〕 Debreu, G. "Market Equilibrium" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A.* **42**, 1956, 876-878.

〔6〕 ——— *Theory of Value* (Wiley, N.Y.) 1959.

〔7〕 Drandakis, E. M. "On the Competitive Equilibrium in a Monetary Economy" *International Economic Review* **7**, September 1966, 304-328.

〔8〕 Drèze, J. H. *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality* (Macmillan, London) 1974.

〔9〕 Grandmont, J. M. "Continuity Properties of a von Neumann-Morgenstern Utility" *Journal of Economic Theory* **4**, 1972, 45-57.

〔10〕 ——— "On the Short-run Equilibrium in a Monetary Economy" in 〔8〕

〔11〕 ——— and W. Hildenbrand "Stochastic Process of Temporary Equilibria" *Journal of Mathematical Economics* **1**, December 1974, 247-277.

〔12〕 Green, J. R. "Temporary General Equilibrium in a Sequential Trading Model with Spot and Future Transactions" *Econometrica* **41**, November 1973, 1103-1123.

〔13〕 Hahn, F. H. "On Some Problems of Proving the Existence of an Equilibrium in a Monetary Economy" in F. H. Hahn and F. P. R. Brechling (eds.) *The Theory of Interest Rates* (Macmillan, London) 1965.

〔14〕 Halmos, P. R. *Measure Theory* (van Nostrand, N. Y.) 1950.

〔15〕 Hicks, J. R. *Value and Capital* (Clarendon Press, Oxford) 1946.

〔16〕 Hildenbrand, W. *Core and Equilibria in a Large Economy* (Princeton University Press, Princeton) 1974.

〔17〕 Kamiya, D. "On the Financial Constraint of Production" *Keio Economic Studies* **12**, 1975, 61-86.

〔18〕 Malinvaud, E. "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources" *Econometrica* **21**, April 1953, 233-267.

〔19〕 丸山徹「効用函数の論理的基礎」『三田学会雑誌』66巻9号, 1973, 69-81.

〔20〕 ——— 「予算集合の連続性」〈本稿(その2)への付録〉『三田学会雑誌』69巻8号, 1976.

〔21〕 ——— 「確率測度の弱収束——理論と均衡分析への応用」『三田学会雑誌』近刊 (ただしその一部分は火曜会講義ノートとして, 既に私的に配布されている。)

〔22〕 森嶋通夫『動学的経済理論』(弘文堂, 東京) 1950.

〔23〕 Parthasarathy, K. R. *Probability Measures on Metric Spaces* (Academic Press, N. Y.) 1967.

〔24〕 Radner, R. "Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets" *Econometrica* **40**, 1972, 289-303.

〔25〕 Rao, R. R. "Relations between Weak and Uniform Convergence of Measures with Applications" *Annals of Mathematical Statistics* 33, 1962, 659-680.

〔26〕 Samuelson, P. A. "What Classical and Neoclassical Monetary Theory Really Was" *Canadian Journal of Economics* 1, February, 1968.

〔27〕 瀬古美喜「短期中期長期貸出をもつ現物経済における『一時的均衡』の存在」『三田学会雑誌』66巻9号, 1973, 36-68.

〔28〕 Sonderman, D. "Temporary Competitive Equilibrium under Uncertainty" in 〔8〕

〔29〕 Stigum, B. "Competitive Equilibria under Uncertainty" *Quarterly Journal of Economics* 83, November 1969, 533-561.

〔30〕 ——— "Resource Allocation under Uncertainty" *International Economic Review* 13, October 1972, 431-459.

〔31〕 安井琢磨「企業の動学理論」『日本経済学年報』第2輯, 1942 (『安井琢磨著作集』第二巻, (創文社, 東京) 1970に再録)

次号へつづく

(カリフォルニア大学数学科)