Title	比較静学と定性経済学I
Sub Title	Comparative statics and qualitative economics I
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.7 (1976. 10) ,p.501(1)- 522(22)
JaLC DOI	10.14991/001.19761001-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19761001-0001

比較静学と定性経済学 I

福岡　正夫

1　前稿[1]でとり扱った比較静学分析の理論構造は，その具体的なモデル内容を捨象して定式化すれば，つぎのごとくになるであろう[2]。

まず当該の体系は n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ と1個のパラメター α から成るものとし，つぎの n 個の均衡方程式

(1)　$f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \alpha)=0 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

が変数の均衡値 $x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_n^*$ を決定すると考える。f_i は微分可能であると仮定して，そのすべての偏導関数 $\partial f_i/\partial x_j$, $\partial f_i/\partial\alpha$ の値を均衡点において評価したものをそれぞれ f_{ij}^*, $f_{i\alpha}^*$ と書くことにすれば，われわれはつぎの比較静学の基本方程式

(2)　$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^* \dfrac{dx_j}{d\alpha}=-f_{i\alpha}^* \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

を得る。あるいは簡単化のため $f_{ij}^*=a_{ij}$, $-f_{i\alpha}=b_i$ とし，また $dx_j/d\alpha=y_j$ として，a_{ij} から成る $n\times n$ の行列を A, b_i から成る $n\times 1$ の列ベクトルを b，同じく y_j から成る $n\times 1$ の列ベクトルを y と記せば，(2)は一そう簡便な形で

(3)　$Ay=b$

のように書きあらわせる。比較静学の課題はいうまでもなく，ここで A, b について知られているさまざまな情報にもとづき，(3)から y の成分の符号を確定することに見出される。

ところで，いま A, b のすべての成分の値が量的に知られているとすれば，上記の問題はたんなる計算の問題に帰着してしまい，それを ad hoc に解けばすむことであるから，一般的な理論問題は提起されない。ヒックスやサムエルソンがもたらした顕著な貢献は，たとえ完全な量的情報が欠如するにせよ，なお均衡の安定性や主体の最大化行動の理論仮説が比較静学命題の源泉たりうることを明らかにし，その視点から比較静学の原理構造を定型化した点に求められる。しかし安定条件や最大値条件は係数の大小関係に制約を課するから，それらもまた厳密にいえば，広い意味での量的

注(1)　福岡正夫「均衡体系の変化の法則」,『三田学会雑誌』, 1976年2・3月号。
(2)　P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1947, pp. 10-14.

情報を含むものであるというべきであろう[3]。そこでいま，さらに問題を押し進めて，そのような定量的な情報はいっさい利用できず，分っているのはすべての構造係数の符号だけであるとしてみよう。すなわち a_{ij} や b_i の数値としての大きさはまったく分らないが，それらが正・負あるいはゼロのいずれであるかは判明しているとするのである。そのときわれわれはこれらのいわば定性的（qualitative）な情報のみから，y_j の符号についていくばくの帰結を導くことができるであろうか。以下でとり扱ういわゆる「定性経済学」（Qualitative Economics）が設定するのは，そのような問題視角である[4]。

さて定性経済分析の立場はサムエルソン自身がその主著のなかの “A Calculus of Qualitative Relations” という節で先駆的に開発したところであるが[5]，それが「定性経済学」の名の下に正面からとり扱われだしたのは，1962年のランカスターの論文[6]以来のことである。今日のこの分野の状況においては，問題のとり扱いに大きく分けて二つの流派があり，その一つはランカスターやゴーマンの，行列式や錐体の理論にもとづくアプローチ[7]，もう一つはカークならびにその協力者たちに負う，行列のサイクルの理論にもとづくアプローチ[8]である。以下われわれはこの順序で双方の流派の主張を概観検討するが，その前に本稿ならびに次稿の議論の荒筋を掲げておくのが，有益であろう。

まずわれわれは上記の定性経済学のプログラムにしたがい，構造係数 a_{ij}, b_i についてもっぱらその符号のみが知られている事例，いわゆる「純粋に定性的な事例」（“purely qualitative case”）につ

注(3) たとえば $a_{ij}=a_{ji}$ とか $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}=a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji}>0$ とかの条件は，すべて定量的（quantitative）な条件である。

(4) 尤もある数 x の正・負・ゼロの条件を定性的と呼ぶか定量的と呼ぶかについては，多少の恣意性が伴うであろう。なぜならたとえば $x\in[0, \infty)$ と $x\in(0, a]$ とは程度の差とも考えられ，後者は明らかに定量的な条件だからである。この点は，x の符号を記号上の分類と見るか実数線上の区間の分類と見るかにかかってくるわけであるが，後者のように考えるとしても，要するに「定性経済学」というのは，それだけの量的条件から比較静学の帰結を追及する分野と思えばよいであろう。

(5) Samuelson, *op. cit.*, pp. 23–29.

(6) K. J. Lancaster, “The Scope of Qualitative Economics,” *Review of Economic Studies*, February, 1962.

(7) W. M. Gorman, “More Scope for Qualitative Economics”, *Review of Economic Studies*, January 1964. K. J. Lancaster, “Partitionable Systems and Qualitative Economics,” *ibid.*, ditto, “The Theory of Qualitative Linear Systems,” *Econometrica*, April 1965. ditto, “The Solution of Qualitative Comparative Statics Problems,” *Quarterly Journal of Economics*, May 1966.

(8) J. Quirk and R. Ruppert, “Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium,” *Review of Economic Studies*, October 1965, L. Bassett, H. Habibagahi, and J. Quirk, “Qualitative Economics and Morishima Matrices,” *Econometrica*, April 1967, L. Bassett, J. Maybee, and J. Quirk, “Qualitative Economics and the Scope of the Correspondence Principle,” *ibid.*, July-October 1968, J. Quirk and R. Ruppert, “Maximization and the Qualitative Calculus,” in J. Quirk and A. Zarley, ed., *Papers in Quantitative Economics*, 1968, J. Quirk, “Complementarity and Stability of Equilibrium,” *American Economic Review*, June 1970. なおこれらのほか J. S. Maybee and J. P. Quirk, “Qualitative Problems in Matrix Theory,” *SIAM Review*, January 1969, J. Quirk, “The Competitive Equilibrium—A Qualitative Analysis,” in M. Beckmann and H. Künzi, ed., *Economic Models, Estimation and Risk Programming*, 1969 をも参照。

いて，比較静学命題が確定するための必要かつ十分条件を究明する。しかしこの場合の結論は，当然予想されるようにきわめて限定されたものでしかありえないから，つぎに若干の量的情報を援用して，体系が安定性を満たしている場合に，さらにどれだけの条件の緩和が可能になるかを検討し，あわせて(1)が何らかの関数の最大値条件に該当するケースについても考察を加える。これらの事例にあっては，実質的に行列Aが，メッツラーの粗代替財行列をスペシャル・ケースとして含む，いわゆる reduce された森嶋行列である場合のみが，比較静学命題を確立しうる唯一のトリヴィアルでない事例となることが知られるであろう。最後にわれわれは，体系がワルラス法則やゼロ次同次性をも満たしている場合について考察し，結局行列Aがメッツラーの粗代替財行列である場合のみが，唯一のトリヴィアルでない事例となることを明らかにするであろう。すなわちここにいたって，議論は前稿のそれと合流することになるのである。[9]

2　以下の議論をつうじて $a_{ij}>0$ なら $\mathrm{sgn}\ a_{ij}=+$，$a_{ij}<0$ なら $\mathrm{sgn}\ a_{ij}=-$，$a_{ij}=0$ なら $\mathrm{sgn}\ a_{ij}=0$，そして $\mathrm{sgn}\ A=[\mathrm{sgn}\ a_{ij}]$ と約束し，共通の符号の元素から成る行列の集合を

$$Q_A=\{B\,|\,\mathrm{sgn}\ B=\mathrm{sgn}\ A\},$$

同じく共通の符号の成分から成るベクトルの集合を

$$Q_y=\{z\,|\,\mathrm{sgn}\ z=\mathrm{sgn}\ y\}$$

と定義する。Q_A，Q_y はそれぞれ定性行列，定性ベクトルと呼ぶことができるであろう。そこでこれらの概念を用いて表現すれば，$Ay=b$ が定性的に可解 (qualitatively solvable) であるとは

(4)　$B\in Q_A$，$c\in Q_b$，$Bz=c$ なら $z\in Q_y$

ということであり，またAが定性的に可逆 (qualitatively invertible) であるとは

(5)　$B\in Q_A$ なら $B^{-1}\in Q_{A^{-1}}$

ということである。容易に分るように，一般には(5)は(4)が成立つために必要でもなければ十分でもない。しかしbの非ゼロ成分がただ1個たとえばb_i のみである場合には，(5)は(4)の十分条件となり，事実この場合要請されるのは，A^{-1} の第i列元素の符号が確定することのみである。

$Ay=b$ が定性的に可解であるとき，どの $B\in Q_A$ についても $|B|\neq 0$ の条件が保証されることは，つぎのような推論をつうじて明らかである。[10] いま $|B|=0$ と仮定して，かならず不合理が生じることを，$b=0$ の場合と $b\neq 0$ の場合とに分けて示す。まず $b=0$ で，しかも $|B|=0$ であるとすれば，$Bz=B(-z)$ を満たす $z\neq 0$ があり，いうまでもなく $-z\notin Q_z$ であるから，$Ay=b$ は定性的に可解たりえない，つぎに $b\neq 0$ であるとしよう。$|B|=0$ なら，どんなλについても $B(\lambda q)=0$ を

注(9)　本稿および次稿でとり扱う主題の簡単なサーヴェイとしては，J. Quirk and R. Saposnik, *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, 1968 の参照が，さらに詳細なサーヴェイ論文としては，M. G. Allingham and M. Morishima, "Qualitative Economics and Comparative Statics," in M. Morishima and others, *Theory of Demand Real and Monetary*, 1973 の参照が，それぞれきわめて有益である。

満たす $q\neq 0$ があり，したがってそれと $Bz=c$ から，どんな λ についても $B(z+\lambda q)=c$ となる。よって適当に λ を選べば，明らかに $z+\lambda q\notin Q_z$ とすることができ，ふたたび $Ay=b$ は定性的に可解たりえない。

こうして $Ay=b$ が定性的に可解であれば，$|A|\neq 0$ であるから，われわれは方程式あるいは変数の番号をそれぞれ独立につけ換えることにより，また必要ならそれらに -1 をかけることによって，それを

(6) $\tilde{A}\tilde{y}=\tilde{b}$

と書き換え，ここで $\tilde{A}$ がすべて負の対角元素をもち，かつ $\tilde{y}$, $-\tilde{b}$ がすべて非負の成分をもつようにするることができる。より具体的に述べれば，この変換はつぎのような手順から成るものと思えばよい。[11]

まず $|A|\neq 0$ なのであるから，A のどの行あるいは列も少くとも1個はかならず非ゼロの元素をもち，よって適当な置換行列 P を選べば，PA がかならず非ゼロの対角元素をもつようにすることができる。ここで $PA=\hat{A}$, $pb=\hat{b}$ とおけば，$\hat{A}y=\hat{b}$ もまた明らかに定性的に可解である。つぎに二つの対角行列 D, $\hat{D}$ を選び，D については $y_i>0$ なら $d_{ii}=1$, $y_i\leqq 0$ なら $d_{ii}=-1$ であるものとする。また $\hat{D}$ については $\hat{b}_i>0$ なら $\hat{d}_{ii}=-1$, $\hat{b}_i<0$ なら $\hat{b}_i=1$, $\hat{d}_{ii}=0$ なら $\hat{a}_{ii}d_{ii}<0$ のときは $\hat{d}_{ii}=1$, $\hat{a}_{ii}d_{ii}>0$ のときは $\hat{d}_{ii}=-1$ のようにそれを選ぶ。そして $\tilde{y}=Dy$, $\tilde{b}=\hat{D}\hat{b}$ とおけば，$\hat{A}y=\hat{d}$ から $\hat{D}\hat{A}y=\hat{D}\hat{b}=\tilde{b}$ であるから，明らかに

$$\tilde{A}\tilde{y}=\hat{D}\hat{A}D^{-1}Dy=\hat{D}\hat{A}y=\tilde{b}$$

となる。$\tilde{A}\tilde{y}=\tilde{b}$ はいうまでもなく定性的に可解であり，すべての i について $\tilde{a}_{ii}<0$ となることも容易に知られる。けだし $\hat{b}_i=\tilde{b}_i=0$ の場合，は上記の $\hat{d}_{ii}$ の定め方から明らかに $\tilde{a}_{ii}=\hat{d}_{ii}\hat{a}_{ii}d_{ii}^{-1}<0$ となり，他方 $\hat{b}_i\neq 0$ したがって $\tilde{b}_i<0$ の場合は，$\tilde{y}_i>0$ であるところから $\tilde{A}_{ii}/|\tilde{A}|<0$, したがって $\tilde{a}_{ii}<0$, となるからである。

3　この点を考慮にいれた上で，本節ではまずランカスター＝ゴーマンの線に沿うアプローチについて考察を加えよう。いま(3)の b を移項して，それを

(7) $Ay-b=0$ あるいは $Cv=0$

の形に書き換えるとする。ここで C が $n\times(n+1)$ の行列 $[A,\ -b]$, v が $(n+1)\times 1$ の列ベクトル $\{y,\ 1\}$ であることはいうまでもない。さて $[A,\ -b]$ ないしは C がすべて非ゼロの元素から成っている場合には，$n=1$ という些末なケースを除いて(7)が一般に定性的可解性をもたないことは明らかであるから，所期の目的を満たすためには上記の行列はかならず若干個のゼロ元素を含むので

注(10) Bassett, Maybee, and Quirk, *op. cit.*, p. 556, Lemma 9 参照。
(11) *op. cit.*, p. 556.

なくてはならない。そこでランカスターは，まずそのようなゼロ元素の必要最小個数が$\frac{1}{2}n(n-1)$個であることを主張した。

事実いま C から選ばれた $n\times n$ の行列の行列式が定まった符号をもつためには，それをある行（または列）について展開した展開式のなかに異符号の項が併存してはならないから，ある非ゼロ項以外の項に含まれる余因数はすべてゼロとなるのでなくてはならない。ところで一般に $(n-1)$ 次の行列式がゼロとなるための条件は，それが $r\times s$ 個（ここで $r+s=n$）のゼロ元素のブロックをもつことであり，なかでもゼロ元素が最小個数となるのは r, s のいずれか一方が 1，他が $n-1$ となる場合である。すなわちこの場合のゼロの最小個数は $n-1$ 個で，これはゼロ元素が 1 行か 1 列を占有する場合に該当している。(12) つぎに当該の非ゼロ項に含まれる $(n-1)\times(n-1)$ の行列式にも同様の議論が適用されて，こんどはゼロ元素の最小個数は$n-2$個となり，以下順次に同じ推論を繰返していって，結局必要なゼロの最小個数は全部で

(8) $N(0)=(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1=\frac{1}{2}n(n-1)$

となる。

さてゼロ元素の数がこれを下回る体系すなわち変数間の連結関係がこれより緊密な体系は，定性的には解けないという意味で，(8)はきわめて簡単なチェック・ルールを与えるが，それはいまだ可解性の十分条件ではない。ランカスターの先駆的な論文の最重要な貢献は，上記のゼロ元素の最小個数の事例について，さらにつぎの命題を樹立したことである。すなわちこのスペシャル・ケースについては，$Ay=b$ が定性的に可解となるための必要かつ十分条件は，前節で述べた番号のつけ換えと符号のつけ換えののち $\tilde{C}=[\tilde{A},\ -\tilde{b}]$ が彼のいう標準型 (Standard Form) すなわち

(9) $$\operatorname{sgn}\tilde{C}=\left[\begin{array}{ccccc|c} - & + & + & \cdots\cdots & + & + \\ & - & + & \cdots\cdots & + & + \\ & & - & \cdots\cdots & + & + \\ & 0 & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & - & + \end{array}\right]$$

の符号のパターンを満たすことである。あるいは同じことであるが，これは $\tilde{C}$ の元素が

(10) $\tilde{c}_{ii}<0,\ \tilde{c}_{ij}=0\,(i>j),\ \tilde{c}_{ij}>0\ (i<j)$

を満たすことであると書きあらわしてもよい。それが必要であることは前記の議論から明らかであり，また十分性は$\tilde{A}$の非ゼロ元素の余因数がそれらの元素とかならず同符号となることから明らか

注(12) 実はランカスターはこの点について不適切な叙述を行っており，このようにゼロ元素が 1 行か 1 列を占める場合が，当該の行列式がゼロとなる唯一の場合だと述べている。Lancaster, "The Scope of Qualitative Economics," p. 117. しかし，これはいうまでもなく誤謬であって，

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & + \end{vmatrix}=0$$

がその反例となる。正しい議論はゴーマンによって与えられた。Gorman; *op. cit.*, p. 68 参照。

であろう。

ところで $\tilde{C}$ がより多くのゼロ元素を含む場合には，(9)または(10)の $\tilde{c}_{ij}>0(i<j)$ の部分は $\tilde{c}_{ij}\geq 0$ $(i<j)$ と修正されねばならない。その場合にあっても，それらは(3)の定性的可解性のための十分条件ではあるが，もはや必要条件ではない。たとえばゴーマンが例示した

$$
\begin{aligned}
&c_{11}v_1+c_{12}v_2+c_{13}v_3+c_{14}v_4=0\\
&c_{21}v_1+c_{22}v_2 \qquad\qquad\qquad\quad =0\\
(11)\quad &\qquad\qquad\quad c_{33}v_3+c_{34}v_4=0
\end{aligned}
$$

ここで $c_{11},\ c_{12}<0,\ c_{13},\ c_{14}>0$

$c_{21}<0,\ c_{22}>0,\ c_{33}<0,\ c_{34}>0$

という体系は，決してランカスターの標準型にはもたらされえない

$$
(12)\quad \operatorname{sgn} C=\begin{bmatrix} - & - & + & + \\ - & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}
$$

という符号型をもっているが，容易に分るように v_i はすべて同符号をとり，したがって定性的に完全に可解なのである。[13]

(9)(10)をも(11)(12)をもともに含むような一般的な可解条件は，ゴーマンが始めて提示したところである。彼の考え方は，前例でも示されているように，変数の集合 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ を二つの部分集合たとえば $\{v_1, v_2\}$，$\{v_3, v_4\}$ に分け，さらにこの種の分割を単一元の集合にいたるまで続けていって，それぞれの段階で，当該の分割に応じ先行する方程式の前半部の係数と後半部の係数を異符号とする，ということから成っている。方程式は2個以上の変数を含まざるをえないから，たとえば前例でいえば方程式数は3個となる。ランカスターの場合は，上記の分割が $\{v_1\}$，$\{v_2, v_3, v_4\}$ そして $\{v_2\}$，$\{v_3, v_4\}$ のように，各段階で1個の変数のみが他から分たれるスペシャル・ケースと考えられる。

いまこれを一般化して，$n+1$個の変数$\{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{n+1}\}$を含む体系の k における分割を，つぎのように定義することにしよう。まず二つの部分集合を $v_{\mathrm{I}}=\{v_1, v_2, \cdots\cdots, v_k\}$，$v_{\mathrm{II}}=\{v_{k+1}, \cdots\cdots, v_{n+1}\}$ と記すとき，これらの集合の双方を含む方程式がちょうど1個なくてはならない。なぜなら，もしそうでなければ，その体系は完全に別々の二つの体系に分離されてしまい，一つの体系たりえないからである。つぎに他の方程式はすべて $\{v_1, \cdots\cdots, v_k\}$と$\{v_{k+1}, \cdots\cdots, v_{n+1}\}$ のいずれかの変数どおしの関係を含むが，$i\geq k$ の v_i と $j\geq k+1$ の v_j をともに含むことはできない。さらにまたこのような分割のそれぞれを同じ原則で分割することが可能であり，これはただ2個の変数を分つ最後の分割にいたるまで続いていく。一般に $n+1$ 変数の体系を v_{I}, v_{II} に分割するときには，1次従属

注(13) Gorman, *op. cit.*, p. 66.

の関係がないかぎり明らかに n 個の方程式が含まれるのでなくてはならず，同様に k 個の変数の分割には $k-1$ 個の方程式が含まれるのでなくてはならない。

こうした定義にもとづくならば，$Cv=0$ が k で分割可能なときには，われわれはランカスターに倣って[(14)]，C を

$$\text{(13)}\quad C=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\ \ }^{k} & \overbrace{\quad\ \ }^{n-k+1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{\mathrm{I}} & c_{\mathrm{II}} \\ C_{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & C_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \}\ 1 \\ \}\ k-1 \\ \}\ n-k \end{array}$$

の形に帰することができ，したがって $Cv=0$ を

$$\text{(14)}\quad \begin{aligned} c_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}v_{\mathrm{II}}&=0 \\ C_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{I}}\qquad\quad &=0 \\ C_{\mathrm{II}}v_{\mathrm{II}}&=0 \end{aligned}$$

の形で書くことができる。ここでさしあたり二つの部分体系 $C_{\mathrm{I}}v_{\mathrm{I}}=0$, $C_{\mathrm{II}}v_{\mathrm{II}}=0$ は定性的に可解で，一般性を失うことなく $v_{\mathrm{I}}>0$, $v_{\mathrm{II}}>0$ を与えると仮定しよう。するとこの解は最初の方程式をも満たすはずであるから，体系全体が可解であるためには，c_{I} の全成分が同符号，c_{II} の全成分が同符号で，かつ前者と後者が互いに異符号となることが，必要にして十分な条件を与えることになる。それゆえにわれわれは一般性を失うことなく，$c_{\mathrm{I}}\leq 0$, $c_{\mathrm{II}}\geq 0$ となるように定めることができる。ところで C_{I}, C_{II} はそのままないしは適当な番号，符号のつけ換えで(9)(10)のランカスターの標準型に合致するか，さもなければそれら自体が C と同じく，可解性の条件を満たす部分体系にまでさらに分割されるか，のいずれかである。よって結局，以上の議論をつうじて，一般的な可解条件に関するつぎの定理が成立したことになる。

定理 1　$Ay=b$ が定性的に可解であるための必要かつ十分条件は，行あるいは列の独立の番号換えか符号のつけ換えののち，$C\equiv[A,\ -b]$ がつぎの条件

(i) $\tilde{c}_{ii}<0$, $\tilde{c}_{ij}=0$ $(i>j)$, $\tilde{c}_{ij}\geq 0$ $(i<j)$

(ii) 分割標準型

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix} \tilde{c}_{\mathrm{I}} & \tilde{c}_{\mathrm{II}} \\ \tilde{C}_{\mathrm{I}} & 0 \\ C & \tilde{C}_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}\ 1 \\ \}\ k-1 \\ \}\ n-k \end{array}$$

で，$\tilde{c}_{\mathrm{I}}\leq 0$, $\tilde{c}_{\mathrm{II}}\geq 0$ かつ $\tilde{C}_{\mathrm{I}}$, $\tilde{C}_{\mathrm{II}}$ がそれぞれ(i)を満たす

のいずれかを満たすような $\tilde{C}$ に変換できることである。

注(14) Lancaster, "Partitionable Systems," p. 70.

上記の分割標準型におけるゼロ元素の個数は，右の0ブロックが $(k-1)\times(n-k+1)$，左の0ブロックが $(n-k)\times k$，$\tilde{C}_{\mathrm{I}}$ ブロックが $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$，$\tilde{C}_{\mathrm{II}}$ ブロックが $\frac{1}{2}(n-k)(n-k-1)$ で，計

(15) $N(0)=\frac{1}{2}(n^2-2k^2+2nk-3n+2k)$

である。この個数は，n が偶数なら $k=\frac{1}{2}(n+1)$ のとき，奇数なら $k=\frac{1}{2}n$ あるいは $\frac{1}{2}(n+2)$ のとき最大となり，$k=1$ あるいは n のとき最小となる。後者の場合に，$N(0)=\frac{1}{2}n(n-1)$ となり，もとのランカスターの条件(8)が得られることはいうまでもない。

4　ところで $Cv=0$ が正の解 $v>0$ をもつための条件は，やや異なる見地からすれば，またつぎのようにも表現できるであろう。すなわちよく知られた線型代数の定理によって，$Cv=0$ が解 $v>0$ をもつか，さもなければ $wC\leq 0$ が解をもつかのいずれかがかならず成立つのでなくてはならない。それゆえ，いま C の各列 C_j に対して $wC_j\leqq 0$ となるような w を含むベクトル空間 R_n の領域を考えてみたとき，もしすべての j $(j=1,2,\cdots\cdots,n+1)$ についてそれらが原点0以外に共通部分をもたないようであれば，われわれはそのことから $Cv=0$ が正の解をもつと主張することができるはずである。ランカスターは1965年の論文[(15)]では，このような見地から $wC\leq 0$ が解をもたないための条件を凸錐体の理論を用いて定式化し，前節までのクラーメル流の方法に対する代案として提唱した。

C の各列をなす定性ベクトルは，その非ゼロ成分の数を s 個，したがってゼロ成分の数を $n-s$ 個とするとき，R_n の部分空間 R_s のある象限の内部において定義され，当該の象限は R_n の適当な 2^{n-s} 個の象限の共通部分として定まると考えられる。そこでいまその象限を Ω_s，それの内部を ω_s であらわし，

$\omega_s{}^{\cup}=\{v\mid vu\leqq 0 \text{ for some } u\in\omega_s\}$

$\omega_s{}^{-}=\{v\mid vu\leqq 0 \text{ for all } u\in\omega_s\}$

$\omega_s{}^{+}=-\omega_s{}^{-}$

$\mathrm{int}\ \omega_s{}^{+}=\omega_s{}^{+}\sim(\omega_s$ に直交する部分空間$)$

などと定義すれば，$(\omega_s{}^{\cup})'=\mathrm{int}\ \omega_s{}^{+}$ の関係が成立つから（ここで $(\omega_s{}^{\cup})'$ は $\omega_s{}^{\cup}$ の補集合），C のすべての列についてそれらの和集合をとれば，$\cup(\omega_s{}^{\cup})'=\cup\mathrm{int}\ \omega_s{}^{+}$ となる。ところがいまもし

(16) $\cup(\mathrm{int}\ \omega_s{}^{+})=R_n-\{0\}$

が満たされるとすれば，上記の関係から $\cup(\omega_s{}^{\cup})'=R_n-\{0\}$ となり，$\cup(\omega_s{}^{\cup})'=(\cap\omega_s{}^{\cup})'$ であることから，$\cup\omega_s{}^{\cup}=\{0\}$ となる。ゆえに $\omega_s{}^{\cup}$ の定義から $wC\leqq 0$ は非ゼロの解 $w\neq 0$ をもたないことになり，$wC\leq 0$ は解をもたないと結論することができる。こうして(16)は一般に $n\times m$ の定性行列 C について $Cv=0$ が正の解 $v>0$ をもつための十分条件であることが知られ，またここでは推論を割

注(15)　Lancaster, "The Theory of Qualitative Linear Systems," pp. 398-401.

要するが，それは $n\times(n+1)$ の C については必要条件にもなることが証明される[16]。それゆえ C の各列の定性ベクトルについて，いずれの象限が $\omega_s{}^+$ を構成するかを調べ，それから ω_s に直交する部分空間をとり去って定義される int $\omega_s{}^+$ のすべてが，原点を除く R_n の全空間をつくすかどうかを検討すれば，前の所論をつうじて $Cv=0$ が解 $v>0$ をもつかどうかが判定できる，というのがランカスターの「定性計算」(“qualitative calculus”) の趣旨である。

これを分りやすく $n=3$ の簡単な事例

$$C=\begin{bmatrix} - & + & + & + \\ 0 & - & + & + \\ 0 & 0 & - & + \end{bmatrix}$$

で説明すれば，つぎのとおりである。まず C の第1列の定性ベクトル$\{-,\ 0,\ 0\}$は R_3 の部分空間 R_1 の一つである$\{*,\ 0,\ 0\}$の負の象限の内部として定義され，この象限は R_3 の $2^{n-s}=2^{3-1}=4$ 個の象限の共通部分によって定められる。それら4個の象限の内部は$\{-,\ 0,\ 0\}$のゼロ成分の箇所をそれぞれ $+$，$-$ のあらゆる可能なパターンで置き換えたもの，すなわち$\{-,\ +,\ +\}$，$\{-,\ +,\ -\}$，$\{-,\ -,\ +\}$，$\{-,\ -,\ -\}$から成っている。$\{-,\ 0,\ 0\}$の $\omega_1{}^+$ は，これらにさらにそのすべての境界を加えたものにほかならないから，その構成要素は(イ)$\{-,\ 0,\ 0\}$の非ゼロ成分の箇所をそれぞれもとの符号のままに保存するかゼロに置き換えるかの 2^s 個の選択，すなわちいまの場合は$\{-,\ *,\ *\}$か$\{0,\ *,\ *\}$かの $2^1=2$ 個の選択，そして(ロ)(イ)の$\{*,\ *\}$の部分を $+$，$-$，0 のあらゆる可能なパターンで特定化する 3^{n-s} 個の選択，すなわちいまの場合は$\{+,\ +\}$，$\{+,\ -\}$，$\{+,\ 0\}$，$\{-,\ +\}$，$\{-,\ -\}$，$\{-,\ 0\}$，$\{0,\ +\}$，$\{0,\ -\}$，$\{0,\ 0\}$の $3^{3-1}=9$ 個の選択，のあらゆる組合わせから成っている。したがってその数は $2^s3^{n-s}=2^13^{3-1}=18$ 個である。int $\omega_1{}^+$ はさらにこれから ω_1 に直交する部分空間をとり去ったものであるから，以上の構成要素から $(-,\ 0,\ 0)\times\{0,\ *,\ *\}=0$ となるような $3^{n-s}=3^{3-1}=9$ 個のベクトル$\{0,\ *,\ *\}$をとり除く。こうして第1列$\{1,\ 0,\ 0\}$の int $\omega_1{}^+$ は，上記の手続をつうじて結局$\{-,\ +,\ +\}$，$\{-,\ +,\ -\}$，$\{-,\ -,\ +\}$，$\{-,\ -,\ -\}$，$\{-,\ +,\ 0\}$，$\{-,\ -,\ 0\}$，$\{-,\ 0,\ +\}$，$\{-,\ 0,\ -\}$，$\{-,\ 0,\ 0\}$の都合 $18-9=9$ 個の要素から構成されることが分る。

まったく同様に，第2列の$\{+,\ -,\ 0\}$については，(イ)の段階が$\{+,\ -,\ 0\}$の非ゼロ成分の箇所を$\{+,\ -,\ *\}$，$\{+,\ 0,\ *\}$，$\{0,\ -,\ *\}$，$\{0,\ 0,\ *\}$のいずれかとする $2^s=2^2=4$ 個の選択，(ロ)の段階が$\{*\}$の箇所を$\{+\}$，$\{-\}$，$\{0\}$のいずれかとする $3^{3-2}=3$ 個の選択で，それらの組合わせが計12個。このようにして構成される $\omega_2{}^+$ からとり除く部分空間が$\{0,\ 0,\ *\}$の $*$ 部分を $+$，$-$，0 のいずれかとするもの3個で，その結果第2列の int $\omega_2{}^+$ は，$\{+,\ -,\ +\}$，$\{+,\ -,\ -\}$，$\{+,\ -,\ 0\}$，$\{+,\ 0,\ +\}$，$\{+,\ 0,\ -\}$，$\{+,\ 0,\ 0\}$，$\{0,\ -,\ +\}$，$\{0,\ -,\ -\}$，$\{0,\ -,\ 0\}$ の計 $12-3=9$ 個の要素をもって構成される。

注(16) Lancaster, *op. cit.*, p. 399.

以下，第3列，第4列についても同様であるから，詳論は省くが，前者のint ω_3^+ は{+，+，−}，{+，+，0}，{+，0，−}，{+，0，0}，{0，+，−}，{0，+，0}，{0，0，−}の7個の要素をもって，後者の int ω_3^+ は同じく{+，+，+}，{+，+，0}，{+，0，+}，{+，0，0}，{0，+，+}，{0，+，0}，{0，0，+}の7個をもって構成されることが容易に分る。

そこでこれらをすべて併合すれば，原点を除く R_3 のすべての空間をつくすことが明らかであるから，ここでこの事例の定性的な可解性がチェックされえたというわけである。

上記の事例はランカスターの標準型(9)を満たす事例であるが，読者は同様にゴーマンの事例(12)についても，この手法にもとづく検定を試みることができるであろう。

5　ここで転じて，もう一つの流派であるカークたちの研究の概観に移ることにする。序論でも触れたように，彼らの手法は行列のサイクルの理論を援用して議論の展開を図る点に特徴を見出すことができよう。

行列 A のサイクルとは

$$a_{ik}a_{kl}\cdots\cdots a_{pq}a_{qi}$$

のような形の元素の積をいい，そこに含まれる元素の数が r 個であるとき，それは長さ r のサイクルであるという。(17) 長さ1のサイクルはいうまでもなく対角元素 a_{ii} であり，長さ2のサイクルは $a_{ik}a_{ki}$ である。また A の i から j へのチェインとは

$$a_{ik}a_{kl}\cdots\cdots a_{pq}a_{qj}\qquad(i\neq j)$$

のような形の元素の積をいい，同じくそこに含まれる元素の数が r 個であるとき，それは長さ r のチェインであるという。以下 i と j のあいだに挟まれる元素の添数が重要でないときは，i から j へのチェインをたんに $a(i\to j)$ のように記す。$a(i\to j)$ が長さ r のチェインであるとき $a(i\to j)a_{ji}$ は長さ $r+1$ のサイクルであるから，チェインはサイクルの最終元素が脱落したものともみなすことができ，またサイクルはチェインに両端の添数をもつ元素がかけられたものともみなすことができよう。長さ1のチェインは明らかに a_{ij} そのものであり，長さ2のチェインは $a_{ik}\ a_{kj}$ のごとくである。

サイクルやチェインが有用なのは，それを用いて行列式の展開式を便利にあらわすことができるからである。いま添数のベクトル{1，2，……，n}の置換を{$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$}で示し，後者が前者から偶数回の互換によって得られるときに $\varepsilon(p_1, p_2, \cdots\cdots p_n)=1$，奇数回の互換によって得られるときに $\varepsilon(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)=-1$ と定める。すると A の行列式 $|A|$ は，周知のように多項式

(17)　$|A|=\Sigma\varepsilon(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)\ a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$

注(17)　これらの定義については，Bassett, Maybee,and Quirk, *op. cit.*, pp. 547-548 および Allingham and Morishima, *op. cit.*, pp. 10-11 参照。

の形で書くことができ，ここで右辺の総和は 1, 2, ……, n のすべての置換にわたるものと解される。$a_{1p_1}\,a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$ は A の長さ n の1個のサイクルから成るか，それより短かい2個以上のサイクルの積から成っており，この点は $|A|$ をつぎの便利な展開式

$$(18)\quad |A|=a_{J'J'}|A_J|+\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{n+1-r}\sum_{K\in S(r,J)}A_{(K')}|A_K|$$

のように書きあらわせば，一そう明瞭となる。ここで J は $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ から選ばれた $n-1$ 個の添数の集合，したがって J' はのこりの1個の添数から成るその補集合をあらわしており，$S(r, J)$ はさらに J から r 個の元を選んでできる集合の族をあらわしている。A_J, A_K はそれぞれ J, K に含まれる添数の行と列から成る A の主座部分行列，$|A_J|$, $|A_K|$ はそれらの主座小行列式であり，また $A_{(K')}$ は $A_{K'}$ における長さ $n-r$ のあらゆるサイクルの総和である。$r=0$ すなわち $K=\phi$ の場合はいうまでもなく $|A_K|=1$ と約束する。いまこれを分りやすく，$n=4$, $J=\{1, 2, 3\}$, $J'=\{4\}$ の事例で示せば，

$$|A|=a_{44}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{4+1-2}\left\{a_{34}a_{43}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+a_{24}a_{42}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{14}a_{41}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\right\}$$

$$+(-1)^{4+1-1}\{(a_{23}a_{34}a_{42}+a_{32}a_{24}a_{43})a_{11}+(a_{13}a_{34}a_{41}+a_{31}a_{14}a_{43})a_{22}+(a_{12}a_{24}a_{41}+a_{21}a_{14}a_{42})a_{33}\}$$

$$+(-1)^{4+1-0}\{a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{24}a_{41}+a_{13}a_{34}a_{43}a_{31}+a_{14}a_{42}a_{23}a_{31}+a_{14}a_{43}a_{32}a_{21}\}$$

のようである。

同様に $|A|$ の a_{ii} に関する余因数 A_{ii} についても(18)に準ずる公式が妥当することは明らかであり，さらにその a_{ij} $(i\neq j)$ に関する余因数については，それは

$$(19)\quad A_{ij}=(-1)a_{ji}|A_H|+\sum_{r=0}^{n-3}(-1)^{n+1-r}\sum_{K\in S(r,H)}A_{(ij)(K')}|A_K|$$

の形をとる。ここで H は $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ から i, j をとり除いた $n-2$ 個の添数の集合，$S(r, H)$ は H から r 個の元を選んでつくられる集合の族をあらわしており，A_H, A_K はそれぞれ H, K に含まれる添数の行と列から成る A の主座部分行列，したがって $|A_H|$, $|A_K|$ はそれらの主座小行列式をあらわしている。また $A_{(ij)(K')}$ は A から第 i 行と第 j 列をとり去った非主座部分行列 $A_{(ij)}$ における長さ $n-1-r$ のあらゆるサイクルの総和である。$A_{(ij)}$ のサイクルが，もとの A の $a(j\to i)$ の形のチェインをなしていることはいうまでもない。ふたたびこの場合も分りやすく $n=4$, $i=3$, $j=4$ の場合について例示すれば，

$$A_{31}=(-1)\ a_{43}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{4+1-1}\{(a_{42}a_{23})a_{11}+(a_{41}a_{13})a_{22}\}$$
$$+(-1)^{4+1-0}\{a_{41}a_{12}a_{23}+a_{42}a_{21}a_{13}\}$$

のようであり，ここで a (4→3) の形のチェインがAの公式のサイクルの役割を演じていることは明らかであろう。

さて以上の準備にもとづき，バセット=メイビー=カークはつぎの一連の定理を証明した。

補助定理1　Aの対角元素がすべて負であるとき，$\mathrm{sgn}|A|$ が確定するための必要かつ十分条件は，Aのすべてのサイクルが非正となることである。

証明(18)

必要性。帰謬法を用い，長さrが1より大きいサイクルで正のものがあったとする。（長さ1のサイクルは，仮定からすでに負であるから，問題としなくてよい。）いま一般性を失うことなく，当該のサイクルを

$$a_{12}\cdots\cdots a_{r-1,r}\ a_{r1}>0$$

としよう。(17)によって$|A|$の展開式のなかには，かならず対角元素ばかりから成る

$$\varepsilon(1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)\ a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn}$$

のような項と

$$\varepsilon(2,\ \cdots\cdots,\ r,\ 1,\ r+1,\ \cdots\cdots,\ n)\ a_{12}\cdots\cdots a_{r-1,r}\ a_{r1}\ a_{r+1,r+1}\cdots\cdots a_{nn}$$

のような項とが含まれており，前者は仮定と約束からかならず $(-1)^n$ の符号をとる。ところが後者は $\varepsilon(2,\ \cdots\cdots,\ r,\ 1,\ r+1,\ \cdots\cdots,\ n)$ の部分が $(-1)^{r-1}$, $a_{r+1,r+1}\cdots\cdots a_{nn}$ の部分が $(-1)^{n-r}$ の符号をとり，$a_{12},\ \cdots\cdots,\ a_{r1}$ の部分は帰謬法の仮定から正であるから，全体の符号は$(-1)^{r-1}(-1)^{n-r}=(-1)^{n-1}$ となる。よってこれら二つの項は互いに符号を異にし，それらの和を含む $|A|$ の符号は不決定とならざるをえない。

十分性。展開式の一般項 $\varepsilon(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)\ a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$ がh個の対角元素と，長さが1より大きいk個のサイクルをもつとすれば，

$$\varepsilon(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)=(-1)^{n-h-k}$$

であることが容易に分る。ゆえに $a_{1p_1}\ a_{2p_2}\cdots\cdots a_{np_n}$ が含むk個のサイクルがすべて負であれば，$\varepsilon(p_1,\ \cdots\cdots,\ p_n)\ a_{1p_1}\cdots\cdots a_{np_n}$ の符号は明らかに $(-1)^{n-h-k}\ (-1)^h\ (-1)^k=(-1)^n$ となって $\varepsilon(1,\ \cdots\cdots,\ n)\ a_{11}\cdots\cdots a_{nn}$と同符号となる。また上記の$k$個のサイクルのなかにゼロのものが1個

注(18)　この定理の証明については Bassett, Maybee, and Quirk, *op. cit.*, pp. 550-551, Allingham and Morishima, *op. cit.*, pp. 18-19 参照。

でもあれば，$\varepsilon(p_1, \cdots\cdots, p_n)\, a_{1p_1}\cdots\cdots a_{np_n}=0$ となり，いずれにしても$|A|$の展開式の各項は弱い意味で同符号となる。

ところで前にも述べたように，A の $n-1$ 次の主座小行列式はすべてAと同様に展開できるから，対角元素の余因数 A_{ii} についても補助定理１がそのまま適用できることはいうまでもない。また同じく前に述べたところから，この議論はAの非対角元素の余因数A_{ij} $(i \neq j)$ についても準用でき，sgn A_{ij} が確定するための必要かつ十分条件は，Aのすべてのチェイン $a(j \to i)$ が弱い意味で同符号となること，すなわちすべて非正となるか非負となるかのいずれかが成立つことである。

以上の結果をすべてまとめて，Aの定性的可逆性に関するつぎの定理が成立する。

定理２　Aの対角元素がすべて負であるとき，Aが定性的に可逆となるための必要かつ十分条件は，そのすべてのサイクルが非正となること，かつその非対角余因数A_{ij} に現われるすべてのチェイン $a(j \to i)$ が弱い意味で同符号となることである。

さてここで第２節で述べたような $\tilde{A}\tilde{y}=\tilde{b}$ の形への変換を考え，上記の帰結を適用すれば，ランカスター＝ゴーマンの定理１に対応するつぎの基本定理が導かれる。

定理３　$Ay=b$ が定性的に可解であるための必要かつ十分条件は，行あるいは列の独立の番号換えか符号のつけ換えののち，それがつぎの条件

(i)　$\tilde{A}$ のすべてのサイクルが非正，かつ

(ii)　$\tilde{b}_i<0$ なら$\tilde{A}$ の添数 i で終わるすべてのチェイン $\tilde{a}(j \to i)$ が非負

を満たすような $\tilde{A}\tilde{y}=\tilde{b}$ に変換できることである。

証明

$\tilde{A}$ の対角元素がすべて負であるときに，$|\tilde{A}|$ が定符号となることは，それが $(-1)^n$ の符号をとることにひとしいが，そのための必要かつ十分条件が(i)であることはすでに補助定理１で示したところである。つぎに $\tilde{b}_i<0$ であれば，$\tilde{y}_j \geqq 0$ であることは $\tilde{A}_{ij}/|\tilde{A}| \leqq 0$ であることにひとしく，さらにそれは $\tilde{A}_{ij}$ が $(-1)^{n-1}$ の符号をとることにひとしい。そのための必要かつ十分条件が(ii)であることも，サイクルの公式を$\tilde{A}$の部分行列に，したがってチェインの公式を$\tilde{A}$ そのものに適用すれば，容易に知られるところである。

とりわけすべての i について $\tilde{b}_i<0$ となる場合には，条件(ii)からすべての i について$\tilde{a}(j-i) \geqq 0$ とならねばならず，これは$\tilde{A}$のすべての非対角元素が非負となることを意味すると同時に，条件(i)とあわせて$\tilde{A}$の１より長いすべてのサイクルがゼロとなることをも意味するであろう。すなわち

$\tilde{b}<0$の場合，バセット＝メイビー＝カークの条件は本質的にランカスターの標準型(9)の条件に帰着するのである。[19]

6　ところで以上の可解性条件はとくに体系の安定性に依拠するところはなかったわけであるが，比較静学がもっぱら新旧両与件の下での均衡状態の比較にのみかかわることを思うならば，そのこと自体に別に不思議はないであろう。しかし前稿でも述べたように，もし当該の体系が不安定であったとすれば，そこでの比較分析の有用性はいちじるしく限定されるといわねばならない。ふたたびその理由を記すならば，比較静学分析の目的は与件の変化が変数の均衡値に与える変化を予測するところにあり，したがってもし変数の時間的径路が新均衡状態に収束しえないとすれば，その予測上の価値は激減せざるをえないからである。

こうした理由にもとづき，本節以下の分析では，われわれは均衡の安定性の仮説を導入し，その下で当面の主題に新しい光が照射されるかどうかを確かめてみることにする。ところで，その目的からしてもなお可能なアプローチには二つの途があり，その一つはあくまで純粋に定性的な見地から定性的安定性の概念を定義して問題を再構成すること，そして他の一つは通常の意味での安定性を満たす体系にのみ限定して，それに伴い若干の定量的情報の加わった準定性体系をとり扱うことである。本節および次節の課題は，これらのうち最初のルートを探索したカーク＝ラッパートの業績をとりあげ，それを検討してみることである。[20]

問題は，体系の行列がその元素の符号の型のみによって（すなわちその量的な大きさのいかんにかかわりなく）安定性を規定するとして，その仮定の下で比較静学体系の可解性を導くところに求められる。当面の動学的調整方程式を

(20)　$\dot{x}=A(x-x^*)$

であらわすならば，[21] この体系が定性的に安定（qualitatively stable）であるとは，

(21)　$B\in Q_A$ のようなすべての B が安定となる

ことである。Aのこのような性質を以下ではAのQ安定性と略称することにしよう。[22] いまDを正の対角行列とするとき，$DA\in Q_A$ となることは自明であるから，AがQ安定なら，それはまたD安定である。[23] またAのk次の主座小行列式を $A^{(k)}$ と記せば，ラウス＝フルヴィッツの定理から，Aが安定であるための必要かつ十分条件は

$$h_k=\sum_t(-1)^k A_t^{(k)}>0$$

注(19)　Bassett, Maybee, and Quirk, *op. cit.*, p. 557.

(20)　J. Quirk and R. Ruppert, "Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium," *ibid.*

(21)　以下では簡単化のため，調整速度はすべて1とする。

(22)　この概念はまた符号安定性（sign stability）とも呼ばれることがある。

(23)　D安定性とは，すべての正の対角行列 D に対して DA が安定となることである。これについては 福岡「市場均衡の安定性 III」，『三田学会雑誌』，1975年6月号，p. 9 参照。

$$(22)\quad \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ 0 & h_2 \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_1 & h_3 & h_5 \\ 1 & h_2 & h_4 \\ 0 & h_1 & h_3 \end{vmatrix} > 0,\ \cdots\cdots,\ \begin{vmatrix} h_1 & h_3 \cdots\cdots & 0 \\ 1 & h_2 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & h_n \end{vmatrix} > 0$$

であるから，Aがすべて負の対角元素をもつ場合は，AのQ安定性はAの全安定性[24]をも意味している。というのは，上記の条件からAの安定性がその主座小行列式の値にのみ依存することが明らかであり，それらの主座小行列式を展開すれば，そのそれぞれにかならず対角元素のみから成る非ゼロ項が含まれるからである。このことはまた，AがQ安定なら，Aの主座部分行列もすべてQ安定となることを意味している。

さて(22)から，われわれはQ安定性のための必要条件をただちに導き出すことができる。まず$h_1=-\sum_i a_{ii}>0$がa_{ii}の数値から独立に満たされるためには，すべてのiについて$a_{ii}\leqq 0$（そして少くとも一つのiについては$a_{ii}<0$）となるのでなくてはならない。つぎに$h_2=\sum_i\sum_{j>i}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji})>0$が同じく定性的に満たされるためには，明らかにすべての$i,\ j\ (i\neq j)$について$a_{ij}a_{ji}\leqq 0$とならねばならず，これはAが弱い意味で定性的に歪対称となることを意味している。さらに3次の条件$h_3>0$に進めば，それと上記の議論から，まったく同様にすべての$i,\ j,\ k\ (i\neq j\neq k\neq i)$について$a_{ij}a_{jk}a_{ki}\leqq 0$とならねばならないことが分り，他方(22)からまた

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_3 \\ 1 & h_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{すなわち}\quad h_1h_2>h_3$$

が満たされねばならないから，これによって$a_{ij}a_{jk}a_{ki}\geqq 0$とならねばならないことが知られる。よって二つの帰結をあわせて，すべての$i,\ j,\ k\ (i\neq j\neq k\neq i)$について$a_{ij}a_{jk}a_{ki}=0$とならねばならないことになる。上記の条件はまた長さ1および2のサイクルがすべて非正となり，長さ3のサイクルがすべてゼロとなることとしてもあらわすことができるであろう。そして$n=3$の場合には，これらの条件は必要条件であるばかりでなく，また十分条件でもあることが容易に知られるのである。

カーク＝ラッパートはこれらの議論を一般の次数の場合に拡張し，Q安定性の必要かつ十分条件に関する基本定理を確立した[25]。われわれは以下その証明にたずさわるが，その前にいくつかの補助定理を確立しておくのが便利であろう。

まずAの元素$a_{i,i+1}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$をその上対角元素と呼び，$a_{i+1,i}(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$を下対角元素と呼ぶならば，つぎの命題が成立する。

補助定理 2　Aの対角元素がすべて負であり，かつその上対角元素がすべて非ゼロであれば，

注(24)　全安定性とは，Aのすべての主座部分行列がD安定となることである。これについても福岡，前掲論文，p. 9 参照。
(25)　*op. cit.*, p. 318, Theorem 3.

Aはその下対角元素の左下の元素がすべてゼロとなるときにのみ，Q安定となることができる。[26]

証明

帰謬法によるとして下対角元素の左下のある元素 a_{ij} $(i>j+1)$ が非ゼロであるとし，Aが決してQ安定とはなりえないことを示すことにしよう。以下ではこれを対角元素ならびに上対角元素以外の元素が，仮定された非ゼロの a_{ij} を除いてすべてゼロであるスペシャル・ケースについてのみ証明する。事実この場合にAがQ安定性を満たしえないことが分れば，ゼロ元素を非ゼロ元素に置き換えても，それがQ安定性を満たしえないことは明白である。

いま一般性を失うことなく，仮定された非ゼロ元素 a_{ij} が第n行の第1元素 a_{n1} であるとする。すると1から $n-1$ までのAの主座小行列式の展開式は目下の仮定の下ではすべて対角元素の項のみであらわせるから，$a_{ii}<0$ の仮定から $h_i>0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ の条件はすべて満たされる。しかし h_n については

$$h_n=(-1)^n\left[\prod_{i=1}^{n} a_{ii}+a_{n1}\prod_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}\right]$$

となり，第1項はかならず正となるが，第2項 $\prod_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}$ の部分は仮定によって非ゼロしかも正負が不定であるから，a_{n1} がゼロでないかぎり h_n の符号は不定となって，Q安定性を満たしえない。

ところで前にも述べたように，Aの対角元素がすべて負である場合には，AがQ安定ならAの主座部分行列もまたすべてQ安定となる。したがってそのm次の主座部分行列の上対角元素 a_{12}, a_{23}, ……, $a_{m-1,m}$ が非ゼロであるとすれば，上に証明した補助定理によって a_{m1} はかならずゼロとなり，したがってサイクル $a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{m-1,m}a_{m1}$ はゼロとなる。よって $a_{ii}<0$, all i の場合には，長さ3以上のサイクルがすべてゼロとなることが，AのQ安定性のための必要条件となるのである。

つぎにAがどの $i\neq j$ についても，$a_{ij}\neq 0$ なら $a_{ji}\neq 0$ の条件を満たすとき，それはゼロ対称的であるといい，他方ある $i\neq j$ について，$a_{ij}\neq 0$, $a_{ji}=0$ となるとき，それはゼロ対称的でないということにしよう。すると，この分類とAの分解可能性・不可能性の分類との関連について，つぎの定理を主張することができるであろう。

補助定理3　Aの長さ3以上のサイクルがすべてゼロであるとき，Aがゼロ対称的でないとすれば，それは分解可能である。[27]

証明

仮定によってある $i\neq j$ について $a_{ij}\neq 0$, $a_{ji}=0$ であるから，一般性を失うことなく $a_{12}\neq 0$,

注(26)　*op. cit.*, p. 316, Lemma 1.
(27)　*op. cit.*, p. 317, Lemma 2.

$a_{21}=0$ であるとしよう。そのとき第2行の対角元素 a_{22} より右に非ゼロ元素がなければ，Aは分解可能となる。ゆえに議論を続けるために，そこに非ゼロ元素があるものとして，それを a_{23} としよう。すると仮定から $a_{12}a_{23}a_{31}=0$ であるから，a_{31}は0でなければならないことになる。同じステップを繰返していって，第n行にいたるまで対角元素の右に非ゼロ元素がないという事態が生じないようであれば，a_{21}, a_{31}, ……, a_{n1} のすべてがゼロとなるから，ふたたび A は分解可能となる。そこでいま $m<n$ のようなある第m行で，はじめて対角元素 a_{mm} の右に非ゼロ元素がなくなったと仮定してみよう。そのとき a_{21}, ……, a_{m1} はすべてゼロであるから，第2行から第 $m-1$ 行までの第m列から右に少くとも1個は非ゼロ元素があるのでなければ，Aは再三分解可能となる。そこでそのような非ゼロ元素があるものとして，それを $a_{k,m+1}$ ($k=2$, ……, $m-1$) とする。するとふたたび仮定から $a_{12}a_{23}\cdots\cdots a_{k,m+1}a_{m+1,1}=0$ であるから，$a_{m+1,1}=0$ たらざるをえず，このプロセスを続けることによって，Aの分解可能性に立ちいたることが必至である。

上記の補助定理の重要性は，以下での基本定理の証明にあたって，分解不可能な行列をもっぱらゼロ対称的な行列としてとり扱いうる点に見出される。ところでAが分解不可能であれば，任意の i, j についてかならず非ゼロのチェイン $a_{ik}a_{kl}\cdots\cdots a_{qj}$ が見出されるから，それは対角元素の上方（または下方）に少くとも $n-1$ 個の非ゼロ元素をもつのでなければならない。ところがAがそのサイクルについて補助定理3の仮定を満たす場合には，それらの数が**正確に** $n-1$ 個となることが証明できるのである。

補助定理4　Aが分解不可能で，その長さ3以上のサイクルがすべてゼロであるとすれば，それは対角元素の上方（または下方）に正確に $n-1$ 個の非ゼロ元素をもつ。[28]

証明　対角元素の片側に少くとも $n-1$ 個存在する非ゼロ元素はチェインをなしているから，それらは第1列を除く各列に1個ずつ含まれているのでなくてはならない。そこでいま第j列 ($j\neq1$) の a_{jj} より上に2個の非ゼロ元素があったとして，それらを a_{ij} と a_{hj} としよう ($i<j$, $h<j$, $i\neq h$)。すると仮定と補助定理3から $a_{jh}\neq0$ とならねばならないから，チェイン $a(h\to i)$ に $a_{ij}a_{jh}$ をかければ非ゼロのサイクルが生じ，仮定に反する結果となる。

以上の補助定理にもとづいて，つぎのQ安定性定理が導かれる。

定理4　Aの対角元素がすべて負であるとき，AがQ安定であるための必要かつ十分条件は，

(i)　長さ2のサイクルがすべて非正

(ii)　長さ3以上のサイクルがすべてゼロ

となることである。

注(28)　*op. cit.*, p. 318, Lemma 4.

証明

必要性。前に述べたところ，とりわけ補助定理2の帰結として述べたところから明らかである。

十分性。Aが分解可能な場合には，それをそれぞれ次数 m_s の分解不可能な対角ブロックの形に分割すれば，それらの対角ブロックの行列は補助定理3からゼロ対称的となり，かつ補助定理4から対角元素の片側に m_s-1 個の非ゼロの非対角元素をもつ。

そこでそのような各ブロック行列 A_s ごとに，つぎのように定義される行列 G_s をそれぞれ対応させるとする。すなわち G_s は

(23)

$i \neq j$ については $g_{ij}=0$

A_s で $a_{ij} \neq 0$ の i, j $(i, j=2, \cdots\cdots, m_s)$ に応じて

$$g_{ii}=-\frac{a_{ji}}{a_{ij}}g_{jj}$$

$$g_{11}=1$$

の要領で構成する。非ゼロの a_{ij} の数は m_s-1 対であるから，m_s-1 個の g_{ii} を定義する上で非斉合性は生じない。そして補助定理3と仮定(i)から $a_{ij} \neq 0$ なら $a_{ji} \neq 0$, $\mathrm{sgn}\ a_{ij} \neq \mathrm{sgn}\ a_{ji}$ であるから，$-a_{ji}/a_{ij}>0$ であり，したがって $g_{11}=1$ とすれば，すべての i $(i=2, \cdots\cdots, m_s)$ について $g_{ii}>0$ とすることができる。

こうして G_s は正の対角行列，したがって当然正定符号の対称行列であり，これを用いて $G_sA_s+A_s'G_s$ をつくれば，ただちに分るようにこれは負の対角行列，したがって負の定符号の対称行列となる。ゆえに著名なリヤプーノフの定理[29]が使えて，A_s は安定である。そして各ブロックの A_s が安定であれば，Aもまたいうまでもなく安定であり，しかもこの議論は $B \in Q_A$ のすべてのBについて妥当するから，AはQ安定である。

7　上記の定理をつうじてAのQ安定性が成立つための必要かつ十分条件が明らかとなった。そこで本節ではそれが主題である比較静学分析に対してどれだけ寄与するかを考察することにしよう。

まずAの対角元素がすべて負であるならば，AのQ安定性はその全安定性を意味し，後者はAがヒックス行列であることを意味するから[30]，A^{-1} の対角元素はAの数値のいかんにかかわりなく負の符号をとることになる。ゆえにもしパラメターαが均衡方程式 $f_i(x, \alpha)=0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ のうちの1個のみ，たとえば第j番目のもののみをシフトさせ，すべての $i \neq j$ については $f_{i\alpha}=0$ と考えうるのであれば（いわゆる “conjugate pairs” の場合），y_j すなわち $dx_j/d\alpha$ の符号のみはかならず

$$\mathrm{sgn}\ y_j=-\mathrm{sgn}\ b_j$$

注(29)　福岡，前掲論文，p. 19 参照。
(30)　福岡，前掲論文，p. 9 参照。

と確定する。すなわち，それだけの部分的な比較静学情報はかならず得られることになる。

が，加えてAが分解不可能であれば，さらに一そう強力な結果が得られ，Q安定性からすべての$dx_i/d\alpha(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$の符号を確定する，すなわち完全な比較静学情報を獲得する途が開かれる。ただしこの場合もbすなわち$\{-f_{i\alpha}\}$ベクトルはただ1個の非ゼロ成分しか含みえないことが，つぎの補助定理をつうじて明らかとなる。[31]

補助定理5　Aが分解不可能で，かつQ安定であるとき，$Ay=b$が定性的に可解であるためには，bはたかだか1個の非ゼロ成分しか含みえない。

証明

$Ay=b$が定性的に可解であるためには，前に述べたゴーマン＝ランカスターの定理によって，$[A, -b]$が

$$[A, -b]=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\overbrace{\quad}^{k} & \overbrace{\quad}^{n-k} & \overbrace{\quad}^{1}\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc} a_{\mathrm{I}} & a_{\mathrm{II}} & -b_1 \\ A_{\mathrm{I}} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{II}} & -b \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \}\ 1 \\ \}\ k-1 \\ \}\ n-k\end{array}$$

のような形に分割されるのでなくてはならない。Aは仮定から分解不可能でQ安定であるから，補助定理3からそれはゼロ対称的でなくてはならず，したがってa_{II}はゼロの行ベクトルとならねばならない。ところがもしa_{II}の成分がゼロばかりであれば，それは0次元でないかぎりAが分解可能となって仮定に反するから，結局$k=n$でなければならないことが分る。ところが$k=n$であれば，ただちに

$$[A, -b]=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\overbrace{\quad}^{n} & \overbrace{\quad}^{1}\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc} a & -b_1 \\ A & 0 \end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ \}\ 1 \\ \}\ n-1\end{array}$$

となることが知られ，パラメターは明らかに1個の方程式のなかにしか入ることができない。

定理5　Aが分解不可能でQ安定であり，かつその対角元素がすべて負であるとすれば，$Ay=b$が定性的に可解であるための必要かつ十分条件は，bがたかだか1個の非ゼロ成分しか含まないことである。

証明[32]

必要性はすでに明らかであるから，以下ではもっぱら十分性を証明する。そのためにはAが定性

注(31)　Quirk and Rupper, *op. cit.*, p. 321, Lemma 7.
(32)　*op. cit.*, pp. 322-323, Lemma 8, 9, 10 および Theorem 6参照。

的に可逆であること，すなわちすべての i, j について $A_{ij}/|A|$ の符号がすべて定性的に確定することを示せばよい。ところが A が Q 安定なら $\mathrm{sgn}|A|=(-1)^n$ となるから，結局は余因数 A_{ij} の符号がすべて確定することを示せばよい。証明はつぎの各ステップを踏んで行われる。

(イ) まず $a_{ij}\neq 0$ の場合について考えることにし，この場合にはかならず $A_{ij}\neq 0$ となることを示す。事実 $i=j$ のときは，A_{ii} の展開式のなかに a_{ii} 以外の対角元素のみから成る項がかならず含まれ，その項が仮定から $(-1)^{n-1}$ の符号をとる。また $i\neq j$ のときは，i を n に，j を1に置換すれば，仮定 $a_{n1}\neq 0$ と補助定理3から $a_{1n}\neq 0$。ところが A_{n1} を展開すれば，$a_{1n}a_{22}a_{33}\cdots\cdots a_{n-1,n-1}$ の項がかならず含まれるから，$A_{n1}\neq 0$ である。

こうして $a_{ij}\neq 0$ なら $A_{ij}\neq 0$ とならねばならないが，展開式 $|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ の各非ゼロ項は，$\mathrm{sgn}|A|=(-1)^n$ であるところから $(-1)^n$ の符号をもたねばならず，そのことから

$$\mathrm{sgn}\ A_{ij}=(-1)^n\ \mathrm{sgn}\ a_{ij}$$

となるのでなくてはならない。よって a_{ij} の符号が与えられれば，A_{ij} の符号は確定する。

(ロ) つぎに $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ の場合について考えよう。まずこの場合，定理の仮定の下では，A_{ij} の展開式 $A_{ij}=\sum_{h\neq j} a_{gh}A_{ij,gh}$ はたかだか1個の非ゼロ項しかもちえないことを示す。

証明は帰謬法によるとし，いま i を n に，j を1に置換して，$a_{n1}=0$ としたとき，A_{n1} の展開式に2個の非ゼロ項 $a_{12}A_{n1,12}$, $a_{13}A_{n1,13}$ があったとする。A はゼロ対称的であるから，$a_{n1}=0$ なら $a_{1n}=0$ で，上記の番号換えはつねに可能である。また以下ではしばらくのあいだ $a_{jn}=0$ $(j=2, \cdots\cdots, n-2)$ と仮定して論を進める（この仮定はのちにとり外す）。

さて $a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$ であるから，$a_{21}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$ であり，A の Q 安定の仮定と定理4から $a_{12}a_{23}a_{31}=0$, $a_{13}a_{32}a_{21}=0$ であるから，$a_{23}=a_{32}=0$ でなくてはならない。ゆえに $A_{n1,13}\neq 0$ であれば，A の第3行は a_{33} の右すなわち a_{34} から $a_{3,n-1}$ までのどこかに非ゼロ元素をもつのでなくてはならず，それを a_{34} であるとする。仮定から $a_{3n}=0$ であるから，この番号換えはつねに可能である。

するとふたたび定理4から $a_{21}a_{13}a_{34}a_{42}=0$ であるから，$a_{42}=0$。よって $A_{n1,13}$ の展開式を考えれば，非ゼロ元素 a_{34} にかかる行列式が非ゼロとなるためには，A の第4行は a_{44} の右に1個は非ゼロ元素をもたねばならず，それを a_{45} とする。

以下同様に第 $n-1$ 行まで続けていき，その都度必要な非ゼロ元素を $a_{j,j+1}$ とする。すると結局 $a_{jn}=0$ $(j=2, \cdots\cdots, n-2)$ の仮定の下では，$A_{n1,13}$ の非ゼロ項の一つは $a_{22}a_{34}a_{45}\cdots\cdots a_{n-1,n}$ となり，ここには $n-3$ 個の非ゼロの非対角元素が含まれる。加うるに，$a_{12}\neq 0$, $a_{13}\neq 0$ であるから，A の対角元素右上には少くとも $n-1$ 個の非ゼロ元素が含まれることが分った。

ここでこんどは $A_{n1,12}$ を考えれば，これが非ゼロであるためには，同様の理由で非ゼロ元素 a_{2j} $(j>2)$ がなくてはならず，すると対角元素から右上に合計 $n-1$ 個より多くの非ゼロ元素があることになる。ところが補助定理4により，これらの非ゼロ元素の数は正確に $n-1$ 個でなくてはな

らないから，これは不合理である。

つぎに $a_{jn}=0$ $(j=2, \cdots\cdots, n-2)$ という特殊な仮定をとり除き，いくつかの j について $a_{jn}\neq 0$ とした場合も，それは要請される非ゼロ元素の資格において，第 j 行では前の $a_{j,j+1}$ の代りとなり，第 n 列では $a_{n,n-1}$ の代りとなる。よって非ゼロ元素の数については同様の議論が成立ち，帰謬法の仮定が同種の不合理を導くことは明らかである。

さて以上の推論によって A_{ij} の展開式にはたかだか1個の非ゼロ項しか含まれないことが分ったわけであるが，ここでこの命題にもとづき，$a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ の場合にも A_{ij} の符号が確定することを証明する段取りに進む。ふたたび i を n に，j を1に番号換えして，A_{n1} について考える。sgn A_{n1} が確定しないとすれば，その理由は $A_{n1}=\sum_{j=2}^{n} a_{1j}A_{n1,1j}$ が符号の相反する二つの項をもつか，ある $A_{n1,1j}$ そのものの符号が不定であるか，のいずれかに帰せられるのでなくてはならない。ところが前者の可能性は，いま上で証明したように A_{n1} の展開式がただ1個の非ゼロ項しか含みえないところから，排除される。そこで残る可能性として後者のような場合のみを考え，$a_{12}A_{n1,12}$ の符号が不定であると想定してみよう。もしそうであれば，かならず $a_{nj}=0$ $(j=2, \cdots\cdots, n-1)$ とならねばならないことを以下で示す。すると仮定から $a_{1n}=a_{n1}=0$ であるから，Aは分解可能となって矛盾が生ずる。

事実$|A|$の展開式のなかには $a_{11}a_{n2}A_{n1,12}$ が一つの項として含まれるが，定理の仮定から$|A|$は $(-1)^n$ の符号をとり，a_{11} は負であるから，$A_{n1,12}$ が不定符号であれば a_{n2} がゼロとなるのでなくてはならない。そこで $a_{n2}=0$ の条件の下で，A_{11} に前に証明した主張を適用すれば，その a_{n2} に関する余因数 $A_{11,n2}$ は展開式のなかにたかだか1個の非ゼロ項を含むにすぎない。いまその展開が第2行に沿うてなされるものとして，問題の非ゼロ項が $a_{23}A_{11,n2,23}$ であるとしてみよう。いうまでもなく $A_{11,n2}=A_{n1,12}$ であるから，上記の非ゼロ項はまた $A_{n1,12}$ の展開式での唯一の非ゼロ項でもあり，ゆえに $A_{n1,12}$ の符号が不定であれば，$A_{11,n2,23}$ の符号もまた同様に不定である。ところが$|A|$の展開式のなかには $a_{11}a_{n2}a_{n3}A_{n1,12,23}$ が含まれるから，$|A|$が $(-1)^n$ の定符号である以上は，上記の帰結から a_{n3} がゼロとならざるをえず，以下同様に続けていくことによって，$a_{n2}, a_{n3}, \cdots\cdots, a_{n,n-1}$ のすべてがゼロとなるほかはない。

こうしてAが分解不可能でその対角元素がすべて負であれば，Q 安定性は conjugate pairs の場合にかぎって完全な比較静学情報をもたらすことが判明した。しかし，この結論はAが分解可能な場合には拡張できないことに注意しなければならない。たとえば

$$A=\begin{bmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ - \end{bmatrix}$$

とすれば，AはQ安定であるが，その余因数 A_{31} の符号が不定となるところから，$dx_1/d\alpha$ の符号は決定できないことになる。他方AがQ安定性を満たさなくても，完全な比較静学情報が得られる可能性があることは，つぎのような事例

$$A=\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$$

を考えてみれば明らかであろう。

8　総じて本稿でとり上げてきたような純粋に定性的な体系において，完全な比較静学情報が得られるためには，体系のヤコービ行列はきわめて特殊な符号構造をもたねばならず，なかんずく正のサイクルの欠如と数多くのゼロ元素の存在が要請されるのでなければならない。比較命題に予測的価値を付与する見地からQ安定性を想定するとしても，そのこと自体がまた定理4で述べたような厳しい条件を要請するから，分析の視野は依然としてきわめて限定されたものというべきであろう。(33)

これらの限定を考えるならば，われわれがより広範な体系の比較分析に興味をもつのである以上，いくばくかの定量的情報の援用は避けられないところであろう。われわれは次稿においては第6節で触れた第二のアプローチを採用し，そのような定性・定量を混合した見地から，非負のサイクルをもち一そう相互連結的な体系の比較分析をとり扱うであろう。

（経済学部教授）

注(33)　たとえばQ安定性が満たされるためには $a_{ij}a_{ji}>0$ であってはならないが，これはその経済的内容においては，第i財が第j財に対して粗代替財であれば，第j財は第i財に対して粗代替財であってはならないことを意味している。同様にQ安定性は，ヒックス＝森嶋のチェイン・ルールすなわち（粗の意味で）代替財の代替財および補完財の補完財は代替財であり，かつ代替財の補完財および補完財の代替財は補完財であるというルールをも棄却する。