Title	OLS, TSLSの小標本分布導出の一方法
Sub Title	Derivation of exact finite sample distributions of ordinary and two-stage least squares estimators
Author	松野, 一彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.5 (1976. 6) ,p.337(107)- 345(115)
JaLC DOI	10.14991/001.19760601-0107
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19760601-0107

研究ノート

OLS, TSLS の小標本分布導出の一方法

松野一彦

1 序

Basmann〔2, 3〕の研究以来，同時推定法の小標本分布論の内容もしだいに拡がってきた。特に Kabe〔5, 6〕及びそれに続く Richardson〔8〕, Sawa〔11〕, Richardson and Wu〔10〕, Richardson and Rohr〔9〕, Mariano and Sawa〔7〕によって種々の統計量の小標本分布導出に非心ウィッシャート分布が利用されるようになった。このことは計量経済学に現われる連立方程式モデルが，従来の統計学の確率モデルの中で，又はその延長上で，どこに位置するかが明確になってきた，ということを示している。

即ち，通常の多変量解析（例えば Anderson〔1〕）はウィッシャート分布する行列の関数として表わされる統計量（例えば回帰係数，相関係数，この行列の固有値，行列式の値）の標本分布を扱っている。これに対し連立方程式モデルについての小標本分布論では，通常のウィッシャート分布に代って非心ウィッシャート分布が議論の出発点になる。正規性の仮定等の下で，計量経済学での種々の統計量は非心ウィッシャート分布する行列の関数になることが示されるためである。

同時推定法の中でも二段階最小二乗法（TSLS）及び古典的最小二乗法（OLS）はよく研究されているものである。この2つの推定法の小標本分布導出の方法は，大まかに分けると (1) Basmann の方法，(2) Kabe-Richardson-Sawa の方法がある。しかし今の段階においても各推定量の分布導出は，必ずしも一般的なケースについて完成しているわけではない。例えば今までに議論されてきたモデルは，内生変数の個数が比較的少ないものである。内生変数2個もしくは3個を含むモデルの議論が多い。

そこでこのノートの目的は，内生変数を2個含む連立方程式モデルに対する OLS, TSLS の小標本分布導出の方法を吟味することである。それは，Basmann の方法，Kabe-Richardson-Sawa の方法を考察し，新たな導出方法を提示することから成っている。そしてこの方法は Basmann の方法における超特殊関数の積分法とか，Kabe-Richardson-Sawa の方法における非心ウィッシャート分布についての知識を必要としない。

§2は小標本分布論で扱われる問題を提示する。§3, 4では従来の2つの方法が考察される。§5では§2の問題を簡約化する。§6, 7で従来の方法に代わる別な方法を提示する。

2 問題

連立方程式モデルの中にある特定の構造方程式

$$(2.1)\quad y_{1t}=\beta y_{2t}+\gamma_1 z_{1t}+\cdots\cdots+\gamma_{K_1} z_{K_1t}+u_t \qquad t=1,\ \cdots\cdots,\ N$$

が OLS 又は TSLS で推定されるものとする。ここで y_{1t}, y_{2t} は内生変数，z_{1t}, …, z_{K_1t} は外生変数，u_t は攪乱項，β, γ_1, …, γ_{K_1} は推定される未知パラメタ，Nはサンプルサイズ。内生変数 y_{1t}, y_{2t} に関する誘導型は次のものである。

$$(2.2)\quad \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11}\cdots\cdots\pi_{1K_1}\pi_{1K_1+1}\cdots\cdots\pi_{1K} \\ \pi_{21}\cdots\cdots\pi_{2K_1}\pi_{2K_1+1}\cdots\cdots\pi_{2K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ \vdots \\ z_{K_1t} \\ z_{K_1+1t} \\ \vdots \\ z_{Kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix},$$

ただし π_{gk} は誘導型パラメタ；z_{K_1+1t}, ……, z_{Kt} は(2.1)以外の構造方程式に含まれている外生変数，v_{1t}, v_{2t} は誘導型攪乱項。誘導型パラメタには次の関係がある。

(2.3) $\begin{bmatrix}\pi_{11}\\ \vdots\\ \pi_{1K_1}\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}\pi_{21}\\ \vdots\\ \pi_{2K_1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_{K_1}\end{bmatrix}$,

(2.4) $\begin{bmatrix}\pi_{1K_1+1}\\ \vdots\\ \pi_{1K}\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}\pi_{2K_1+1}\\ \vdots\\ \pi_{2K}\end{bmatrix}$.

ここで次のように記号を定める。

$$Y=\begin{bmatrix}y_{11}\cdots y_{1N}\\ y_{21}\cdots y_{2N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_{1\cdot}\\ y_{2\cdot}\end{bmatrix}=[y_{\cdot 1}\cdots y_{\cdot N}],$$

$$\Pi=\begin{bmatrix}\pi_{11}\cdots\pi_{1K_1} & \pi_{1K_1+1}\cdots\pi_{1K}\\ \pi_{21}\cdots\pi_{2K_1} & \pi_{2K_1+1}\cdots\pi_{2K}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12}\\ \Pi_{21} & \Pi_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Pi_{1\cdot}\\ \Pi_{2\cdot}\end{bmatrix},$$

(2.5) $$Z=\begin{bmatrix}Z_1\\ \hline Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_{11} & \cdots z_{1N}\\ \cdot & \cdots\ \cdot\\ z_{K_1 1} & \cdots z_{K_1 N}\\ \hline z_{K_1+1 1} & \cdots z_{K_1+1 N}\\ \cdot & \cdots\ \cdot\\ z_{K1} & \cdots z_{KN}\end{bmatrix}=[z_{\cdot 1}\cdots z_{\cdot N}],$$

$$V=\begin{bmatrix}v_{11}\cdots v_{1N}\\ v_{21}\cdots v_{2N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{1\cdot}\\ v_{2\cdot}\end{bmatrix}=[v_{\cdot 1}\cdots v_{\cdot N}].$$

β, $\gamma'=[\gamma_1, \cdots, \gamma_{K_1}]$ に対する OLS, $b^{(1)}$, $c^{(1)\prime}=[c_1^{(1)}, \cdots, c_{k_1}^{(1)}]$ は

(2.6) $$\begin{bmatrix}b^{(1)}\\ c^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_{2\cdot}'y_{2\cdot} & y_{2\cdot}'Z_1\\ Z_1'y_{2\cdot} & Z_1'Z_1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_{2\cdot}' & y_{1\cdot}\\ Z_1' & y_{1\cdot}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y_{2\cdot}'M_1y_{2\cdot})^{-1}(y_{2\cdot}'M_1y_{1\cdot})\\ (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(y_{1\cdot}-y_{2\cdot}b^{(1)})\end{bmatrix},$$

ただし，$M_1=I_N-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'$。又 TSLS, $b^{(2)}$, $c^{(2)}$ は，$\hat{y}_{2\cdot}=Z(Z'Z)^{-1}Z'y_{2\cdot}$ として，

(2.7) $$\begin{bmatrix}b^{(2)}\\ c^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{y}_{2\cdot}'\hat{y}_{2\cdot} & \hat{y}_{2\cdot}'Z_1\\ Z_1'\hat{y}_{2\cdot} & Z_1'Z_1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{y}_{2\cdot}'y_{1\cdot}\\ Z_1'y_{1\cdot}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y_{2\cdot}'M_2y_{2\cdot})^{-1}(y_{2\cdot}'M_2y_{1\cdot})\\ (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(y_{1\cdot}-y_{2\cdot}b^{(2)})\end{bmatrix}',$$

ただし，$M_2=Z(Z'Z)^{-1}Z'-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'$。このように表わされる $(b^{(\alpha)}, c^{(\alpha)})$, $\alpha=1, 2$ の分布を導くことが問題である。以下では特に $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ の分布の導出を議論する。

分布導出の議論で採用される確率的仮定は通常のものである。即ち，

(2.8) $v_{\cdot t}\sim N\begin{pmatrix}0 & \sigma_{11} & \sigma_{12}\\ 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\equiv N(0\ \Sigma)$,

(2.9) $v_{\cdot t}$ は $v_{\cdot s}$ と独立，

(2.10) Zは繰り返えされる標本抽出で一定，

という仮定をおく。分布導出の結果はこれらに大きく依存している。

以上の設定より次のことが導びかれる。

(2.11) $y_{\cdot t}\sim N(\Pi z_{\cdot t}\ \Sigma)$, $t=1, \cdots, N$,
$y_{\cdot t}$ と $y_{\cdot s}$ は独立。

議論を簡単にするための便宜としては，次の仮定を採用することもある。

(2.12) $\Sigma=I_2$,

(2.13) $\frac{1}{N}Z'Z=I_K$.

つづく2つの節でこの問題に対する2つの解答を考察する。

3 Basmann の方法

小標本分布論の初まりとなったBasmannの論文〔2〕では，上の問題に対して $b^{(2)}$ の分布があるケースについて導びかれている。それは，$K_2\equiv K-K_1$ が2と3のケースについてである。

簡単化の仮定，$\Sigma=I$ と $\frac{1}{N}Z'Z=I$ の下では，(2.7) での $b^{(2)}$ は

(3.1) $$b^{(2)}=\frac{\sum_{i=1}^{K_2}x_{1i}x_{2i}}{\sum_{i=1}^{K_2}x_{2i}^2}$$

と変換される。ただし，

(3.2) $\begin{bmatrix}x_{1i}\\ x_{2i}\end{bmatrix}\sim N\left(\begin{matrix}\beta\sqrt{N}\pi_{2K_1+i}\\ \sqrt{N}\pi_{2K_1+i}\end{matrix}\ \begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right)$, $i=1, \cdots, K_2$,

(3.3) $[x_{1i}\ x_{2i}]$ と $[x_{1j}\ x_{2j}]$ は独立，

である。(1) この $b^{(2)}$ の分布を導出する問題となる。

次の節で述べる Kabe-Richardson-Sawa の方法は任意の K_2 について適用可能であるが，Basmann の方法は今のところ $K_2=2, 3$ の2つのケースに対してのみ考察されている。以下で $K_2=2, 3$ を別々に取り扱う。

3.1 $K_2=2$ の場合

この時は$b^{(2)}$ の分布を求めるため (3.2) の (x_{1i}, x_{2i}), $i=1, 2$ の内の x_{2i} を次のように極座標変換する。

(3.4)
$$x_{21}=r\cos\theta,$$
$$x_{22}=r\sin\theta,\ 0<r<\infty,\ -\pi<\theta<\pi,$$
$$J[(x_{21}, x_{22}):(r, \theta)]=r.$$

又，$b^{(2)}=\sum_1^2 x_{1i}x_{2i}/\sum_1^2 x_{2i}^2$ は x_{2i} 上の x_{1i} の回帰の回帰係数である。従って $b^{(2)}$ はベクトル $[x_{11}, x_{12}]$ のベクトル $[x_{21}, x_{22}]$ への射影で決定される。$[x_{11}, x_{12}]$ から $[x_{21}, x_{22}]$ への垂線の長さを q として $[x_{11}, x_{12}]$ から $[b^{(2)}, q]$ へと次の変換を考える。

(3.5) $\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\cos\theta, & -\sin\theta\\ r\sin\theta, & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b^{(2)}\\ q\end{bmatrix}$,

注(1) このことの説明は，§5の議論に含まれているので，ここでは省略。

$-\infty<b^{(2)}<\infty,\ 0<q<\infty,$

$J[(x_{11},\ x_{12}):\ (b^{(2)},\ q)]=r.$

(3.4), (3.5) の $(x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22})$ から $(r,\ \theta,\ b^{(2)},\ q)$ への変換を得る。そして

(3.6) $J[(x_{11},\ x_{12},\ x_{21},\ x_{22}):\ (r,\ \theta,\ b^{(2)},\ q)]=r^2.$

(3.2) と (3.6) より $(r,\ \theta,\ b^{(2)},\ q)$ の密度関数 (d.f.) f_2 が得られる。故に, $b^{(2)}$ の d.f., f_3 は

(3.6) $f_3(b^{(2)})=\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty f_2\,dr\,d\theta\,dq$

を評価して得られる。ただし (3.6) の積分の評価はかなり複雑なものである。

以上のように Basmann の方法は, 後述の方法と比較するなら, 極座標変換と射影の変換からなっているのが特徴である。(2)

3.2 $K_2=3$ の場合

この場合の $x_{2i},\ i=1,\ 2,\ 3$ に対する極座標変換は,

$$(3.7)\quad \begin{aligned} x_{21}&=r\sin\theta\cos\phi,\\ x_{22}&=r\sin\theta\sin\phi,\\ x_{23}&=r\cos\theta, \end{aligned}$$

$$0<r<\infty,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ -\pi<\phi<\pi,$$

$$J[(x_{21},\ x_{22},\ x_{23}):\ (r,\ \theta,\ \phi)]=r^2\sin\theta.$$

$b^{(2)}$ を決める射影を表わす変換は (3.5) の拡張,

$$(3.8)\quad \begin{bmatrix} x_{11}\\ x_{12}\\ x_{13} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\phi\\ r\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ r\cos\theta & \sin\phi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^{(2)}\\ q_1\\ q_2 \end{bmatrix},$$

$$-\infty<b^{(2)}<\infty,\ 0<q_1<\infty,\ 0<q_2<\infty,$$

$$J[(x_{11},\ x_{12},\ x_{13}):\ (b^{(2)},\ q_1,\ q_2)]=r$$

として与えられる。

全体として (3.7) (3.8) の変換より又 $(x_{11},\ \cdots,\ x_{23})$ の d.f. (3.2), (3.3) より $(r,\ \theta,\ \phi,\ b^{(2)},\ q_1,\ q_2)$ の d.f. を得る。$r,\ \theta,\ \phi,\ q_1,\ q_2$ を積分で消して $b^{(2)}$ の d.f. を得ることができる。

3.3 $K_2>3$ の場合

この場について Basmann の方法は実用化されていない。$K_2=2,\ 3$ の場合に現われた極座標変換, (3.4), (3.7) の一般形はよく知られており, $x_{21},\ \cdots,\ x_{2K_2}$ を, 例えば, $(r,\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_{K_2-1})$ へ変換することは可能である。Basmann の方法はもう1つの射影を表わす変換, (3.5), (3.8) を使っているが, この変換の多次元での一般形は利用可能でない。Basmann の方法を $K_2>3$ の場合に拡張するには, この変換の一般的な解析的形を導びかなければならない。更に, これが可能であっても, $K_2=2,\ 3$ の場合で見られるごとく, 続く積分の評価は取り扱い易いものではない。

§5, 6, 7 で示す分布導出の方法は, $K_2>3$ の場合でも利用可能である。そこでは, 射影を表わす変換の一般型を導びくことをせずに, 別の方法で問題を扱う。ただし Basmann の方法のように, 極座標変換は利用する。

4 Kabe-Richardson-Sawa の方法

計量経済学モデルと非心ウィッシャート分布の関係は, この分布の導出と共に意識されていたが, 実際に Basmann の問題を非心ウィッシャート分布を使って解いたのは Kabe である。そして Richardson, Sawa 等によって TSLS, OLS, 更には制限情報最尤法による推定量, 又検定量の標本分布導出にこの分布が利用されてきた。

非心ウィッシャート分布を利用すれば, TSLS, OLS の分布は全く同一の方法で導びけ, しかも Basmann の方法よりも簡単である。

Kabe-Richardson-Sawa の方法は次の定理に基づく。即ち, G×1 の確率ベクトル $y_{\cdot t}$ $t=1,\ \cdots,\ N$ が各々独立で正規分布 $N(\eta_{\cdot t}\ \Sigma)$ に従う時, M を $N\times N$ 巾等行列とすると,

(4.1) $YMY'\sim W(YMY',\ \Sigma,\ HMH',\ G,\ n,\ \tau),$

ただし, $Y=[y_{\cdot 1}\cdots y_{\cdot N}]$, $H=[\eta_{\cdot 1}\cdots\eta_{\cdot N}]$, $n=\rho(M)$, $\tau=\rho(HMH')$, $\rho(X)$ は行列 X の位数, 又 (4.1) の右辺は sigma matrix Σ, means sigma matrix HMH', 自由度 $\rho(M)$ をパラメタとする非心ウィッシャート分布を表わす。(4.1) は非心ウィッシャート分布の定義といえる。そしてこの分布を同時推定法の小標本分布論に利用するには, $W(YMY',\ \Sigma,\ HMH',\ G,\ n,\ \tau)$ の d.f. が導びかれていなければならない。

この分布は, τ の値によって分類される。$\tau=0$ の時, この分布は通常の (心) ウィッシャート分布である。$\tau=1$ の時は非心-linear-ウィッシャート分布と呼ばれる。$\tau=2$ の時は非心-planar-ウィッシャート分布と呼ばれる。この分布の d.f. の具体的形は, $\tau=0,\ 1,\ 2$ のケースについて得られている。今興味のあるのは $\tau=1$ の時の分布, 即ち非心-linear-ウィッシャート分布である。その d.f. は, $A=YMY'$, $T=HMH'$ とし

注(2) Basmann の方法は, 内生変数3個を含むモデルにまで拡張されている〔3〕。その時には上の2つの変換に加えてオイラーの変換が用いられる。

て，

(4.2) $W(A,\ \Sigma,\ T,\ G,\ n,\ \tau)$

$$=C|A|^{\frac{n-G-1}{2}}\exp-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,A\Sigma^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{tr}\,A\Sigma^{-1}T\Sigma^{-1})^i}{2^{2i}i!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+i\right)},$$

ここでCは分布の定数項。

§2の問題では，簡単化の仮定 $\Sigma=I$ も採用して，次のことが設定されている。

(4.3) $y_{\cdot t}\sim N(\Pi z_{\cdot t}\ I),\ t=1,\ \cdots,\ N,$
$y_{\cdot t}$ と $y_{\cdot s}$ は独立。

OLS $b^{(1)}$，TSLS $b^{(2)}$ を定義する (2.6), (2.7) に現われる M_1, M_2 はそれぞれ位数 $N-K_1$, K_2 の巾等行列である。そして 2×2 の行列の分布は

(4.4) $A^{(\alpha)}\equiv\begin{bmatrix}a_{11}{}^{(\alpha)} & a_{12}{}^{(\alpha)}\\ a_{21}{}^{(\alpha)} & a_{22}{}^{(\alpha)}\end{bmatrix}\equiv YM_\alpha Y'$

$\sim W(A^{(\alpha)},\ I,\ T_\alpha,\ 2,\ n_\alpha,\ \tau_\alpha),\ \alpha=1,\ 2.$

ここで

$$n_\alpha=\rho(M_\alpha)=\begin{cases}N-K_1, & \alpha=1,\\ K_2, & \alpha=2,\end{cases}$$

(4.5) $T_\alpha=\Pi ZM_\alpha Z'\Pi'$

$$=\begin{bmatrix}\beta\\ 1\end{bmatrix}\Pi_{22}Z_2M_1Z_2'\Pi_{22}'[\beta\ 1],\ \alpha=1,\ 2,$$

$\tau_\alpha=\rho(T_\alpha)=1,\ \alpha=1,\ 2.$

この d.f., $f_4(A^{(\alpha)})$, $\alpha=1, 2$ は (4.2) で $\Sigma=I$, $G=2$ とし $(T,\ n,\ \tau)$ に $(T_\alpha,\ n_\alpha,\ \tau_\alpha)$ を入れ代えたものである。

(2.6), (2.7) より OLS $b^{(1)}$, TSLS $b^{(2)}$ は

(4.6) $b^{(\alpha)}=\dfrac{a_{21}{}^{(\alpha)}}{a_{22}{}^{(\alpha)}},\ \alpha=1,\ 2$

と表わせる。$A^{(\alpha)}$ の分布 $f_4(A^{(\alpha)})$ より $b^{(\alpha)}$ の分布を導くためには次の変換をする。

(4.7)
$a_{11}{}^{(\alpha)}=q^{(\alpha)}+a_{22}{}^{(\alpha)}b^{(\alpha)},$
$a_{12}{}^{(\alpha)}=a_{22}{}^{(\alpha)}b^{(\alpha)},$
$0<q^{(\alpha)}<\infty,\ -\infty<b^{(\alpha)}<\infty,$
$J[(a_{11}{}^{(\alpha)},\ a_{12}{}^{(\alpha)}):\ (q^{(\alpha)},\ b^{(\alpha)})]=a_{22}{}^{(\alpha)}.$

$f_4(A^{(\alpha)})$ と (4.7) より $(q^{(\alpha)},\ b^{(\alpha)},\ a_{22}{}^{(\alpha)})$ の d.f. を得る。$b^{(\alpha)}$ の d.f. はこれを $q^{(\alpha)}$, $a_{22}{}^{(\alpha)}$ について積分することによって得られる。分布導出に含まれるめんどうな積分は (4.2) の導出までにすまされているので，それ以後の積分はあまり複雑なものとはならない。

この方法を，内生変数の個数の大きいモデルに拡張するには，より複雑な（τの大きい）非心ウィッシャート分布の d.f. を利用しなければならない。

5 問題の変形

以上で，TSLS, OLS の分布導出の2つの方法を検討した。次に同じ設定の下で，適用可能な別の導出方法を試みるが，この節ではそのための準備をする。(3)

$b^{(\alpha)}$ は $N(\Pi z_{\cdot t}\ \Sigma)$ に従う $y_{\cdot t}=\begin{bmatrix}y_{1t}\\ y_{2t}\end{bmatrix}$, $t=1,\ \cdots,\ N$ の関数として次のように表わせた。

(5.1) $b^{(\alpha)}=y_{1\cdot}'M_\alpha y_{2\cdot}/y_{2\cdot}'M_\alpha y_{2\cdot},$

ただし $y_{g\cdot}'=[y_{g1},\ \cdots,\ y_{gN}]$。

巾等行列 M_α を対角化，

(5.2) $C_\alpha'M_\alpha C_\alpha=\begin{bmatrix}In_\alpha & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

する直交行列 C_α を考える。すると，

(5.3) $M_\alpha=C_\alpha\begin{bmatrix}In_\alpha\\ 0\end{bmatrix}[In_\alpha\ 0]C_\alpha'$。

従って

(5.4) $y_{g\cdot}'M_\alpha y_{h\cdot}=y_{g\cdot}'C_\alpha C_\alpha'M_\alpha C_\alpha C_\alpha'y_{h\cdot}$

$$=x_{g\cdot}'\begin{bmatrix}In_\alpha\\ 0\end{bmatrix}[In_\alpha\ 0]x_{h\cdot}$$

$$=\sum_{i=1}^{n\alpha}x_{gi}x_{hi},\quad g,\ h=1,\ 2.$$

ここで

(5.5) $x_{g\cdot}\equiv\begin{bmatrix}x_{g1}\\ \vdots\\ x_{gN}\end{bmatrix}=C_\alpha'y_{g\cdot}$

は正規分布に従う。そのモメントは次のように計算される。$x_{\cdot i}=\begin{bmatrix}x_{1i}\\ x_{2i}\end{bmatrix}$ とすると，まず，

(5.6) $\mathrm{cov}(x_{g\cdot}x_{h\cdot})=\sigma_{gh}I$

より並びかえて

(5.7) $\mathrm{cov}(x_{\cdot i}x_{\cdot j})=\delta_{ij}\Sigma,\quad \delta_{ij}\equiv\begin{cases}1 & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$

更に

(5.8) $E\begin{bmatrix}x_{11} & \cdots & x_{1n\alpha} & x_{1n\alpha+1} & \cdots & x_{1N}\\ x_{21} & \cdots & x_{2n\alpha} & x_{2n\alpha+1} & \cdots & x_{2N}\end{bmatrix}$

$$=E\begin{bmatrix}y_{1\cdot}'\\ y_{2\cdot}'\end{bmatrix}C_\alpha=\begin{bmatrix}\Pi_{1\cdot}Z\\ \Pi_{2\cdot}Z\end{bmatrix}C_\alpha.$$

故に，

(5.9) $E[x_{\cdot 1}\ \cdots\ x_{\cdot n\alpha}]=\begin{bmatrix}\Pi_{1\cdot}Z\\ \Pi_{2\cdot}Z\end{bmatrix}C_\alpha\begin{bmatrix}I_{n\alpha}\\ 0\end{bmatrix}$

注(3) OLS, TSLS の分布の導出を同時に展開する。以下の議論は $\alpha=1$ とだけ考えれば OLS の分布を考えていることになり，$\alpha=2$ とだけ考えれば TSLS を考えていることになる。

$$=\begin{bmatrix}\Pi.ZC_\alpha E_\alpha\\ \Pi.ZC_\alpha E_\alpha\end{bmatrix},$$

ただし $E_\alpha'=[I_{n\alpha}\ 0]$. (5.9) を次のような記号で表わす。

(5.10) $E[x_{\cdot 1}\ \cdots\ x_{\cdot n\alpha}]=\begin{bmatrix}\xi_{11} & \cdots & \xi_{1n\alpha}\\ \xi_{21} & \cdots & \xi_{2n\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_{1\cdot}'\\ \xi_{2\cdot}'\end{bmatrix}.$

$$=[\xi_{\cdot 1}\ \cdots\ \xi_{\cdot n\alpha}]=\Xi_\alpha.$$

ξ は添え字 α を持つべきであるが省略して書く。

以上より §2 の問題は，仮定

(5.11) $x_{\cdot i}\sim N(\xi_{\cdot i}\ \Sigma),\ i=1,\ \cdots,\ n_\alpha$

(5.12) $x_{\cdot i}$ と $x_{\cdot j}$ は独立

(5.13) $\Xi_\alpha=\Pi ZC_\alpha E_\alpha$

(5.14) $\beta\Pi_{12}=\Pi_{22}$

の下で

(5.15) $b^{(\alpha)}=\sum_1^{n\alpha}x_{1i}x_{2i}/\sum_1^{n\alpha}x_{2i}^2,\ \alpha=1,\ 2,$

の分布を導びくことに縮約された。

このような縮約は，Basmann の方法の中にも，又 Kabe-Richardson-Sawa の方法の中にも暗に含まれていた。

6　$b^{(\alpha)}$ の分布導出，$\Sigma=I$

§5 で変形された問題をこの節で解くことにする。まず簡単化の仮定 $\Sigma=I$ を採用する。次の節でこの仮定をはずすが，議論の中心はこの節で与えられる。

$b^{(\alpha)}=\sum_1^{n\alpha}x_{2i}x_{1i}/\sum_1^{n\alpha}x_{2i}^2$ は $x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha}$ を所与とした時，正規分布する $x_{11},\ \cdots,\ x_{1n\alpha}$ の線型結合である。従って，x_{2i} が与えられた時の $b^{(\alpha)}$ の条件付き分布も正規分布でその d.f. は次で与えられる。

(6.1) $f_5(b^{(\alpha)}|x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})$

$$=N(\sum x_{2i}E(x_{1i})/\sum x_{2i}^2,\ 1/\sum x_{2i}^2)$$

$$=N(\sum x_{2i}\xi_{1i}/\sum x_{2i}^2,\ 1/\sum x_{2i}^2)$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\sum x_{2i}^2)^{\frac{1}{2}}\exp-\frac{\sum x_{2i}^2}{2}\left[b^{(\alpha)}-\frac{\sum x_{2i}\xi_{1i}}{\sum x_{2i}^2}\right]^2.$$

x_{2i} がもともと指定変数である（古典的）回帰モデルでは，恒等的に $x_{2i}\equiv\xi_{2i}$ と考えられる。従って (6.1) は $b^{(\alpha)}\sim N(\beta,\ 1/\sum\xi_{2i}^2)$ と読め，通常の最小二乗法の標本分布となる。

現在の場合 x_{2i} は確率変数で，その分布は次のように与えられている。

(6.2) $f_6(x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})=N(\xi_{2\cdot}\ I)$

$$=(2\pi)^{-\frac{n\alpha}{2}}\exp-\frac{1}{2}\sum(x_{2i}-\xi_{2i})^2.$$

従って (6.1) 及び (6.2) より $b^{(\alpha)},\ x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha}$ の同時分布の d.f. は，整理した後，

(6.3) $f_7(b^{(\alpha)},\ x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})=f_5\cdot f_6$

$$=(2\pi)^{-\frac{n\alpha+1}{2}}\exp-\frac{1}{2}\sum\xi_{2i}^2\cdot(\sum x_{2i}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})\sum x_{2i}^2$$

$$\exp\sum x_{2i}(b^{(\alpha)}\xi_{1\alpha}+\xi_{2\alpha})\ \exp-\frac{\sum_i\sum_j x_{2i}\xi_{1i}\xi_{1j}x_{2j}}{2\sum x_{2i}^2}$$

$$=C_{n\alpha}\exp-\frac{1}{2}\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot}(x_{2\cdot}'x_{2\cdot})^{\frac{1}{2}}$$

$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})x_{2\cdot}'x_{2\cdot}$$

$$\exp-\frac{1}{2}x_{2\cdot}'(b^{(\alpha)}\xi_{1\cdot}+\xi_{2\cdot})\ \exp-\frac{x_{2\cdot}'\xi_{1\cdot}\xi_{1\cdot}'x_{2\cdot}}{2x_{2\cdot}'x_{2\cdot}},$$

ただし $C_{n\alpha}=(2\pi)^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$

このように，Basmann の方法における射影の方法を使わずに，$b^{(\alpha)}$ を含む分布を得た。この f_7 より $x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha}$ を積分することによって $b^{(\alpha)}$ の分布を得ることができる。その段階では Basmann のように極座標変換を使う。しかしその前にもう1つの準備が必要である。

次のように構成される直交行列 D_α を考える。

(6.4) $D_\alpha'=\begin{bmatrix}(\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot})^{-\frac{1}{2}}\xi_{2\cdot}'\\ D_{2\alpha}'\end{bmatrix}.$

今の場合 D_α が直交行列であるための条件，

(6.5) $D_{2\alpha}'\xi_{2\cdot}=0,$

(6.6) $D_{2\alpha}'D_{2\alpha}=I,$

が満たされていると設定する。このような直交行列 D_α' が作れることはグラム・シュミットの方法によって示される。この時次の関係も成り立つ。

(6.7) $D_\alpha'\xi_{2\cdot}=\begin{bmatrix}(\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot})^{-\frac{1}{2}}\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot}\\ D_{2\alpha}'\xi_{2\cdot}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot})^{\frac{1}{2}}\\ 0\end{bmatrix}.$

この直交行列を使って次の変換をする。

(6.8) $w=\begin{bmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_{n\alpha}\end{bmatrix}=D_\alpha'x_{2\cdot},$

$$J(x_{2\cdot}:w)=|D_\alpha|=1.$$

この変換と (6.3) より $b^{(\alpha)}$ と w の分布を得る。

(6.9) $f_8(b^{(\alpha)},\ w)=C_{n\alpha}\exp-\frac{1}{2}\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot}(w'w)^{\frac{1}{2}}$

$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})w'w$$

$$\exp-\frac{1}{2}w'(b^{(\alpha)}D_\alpha'\xi_{1\cdot}+D_\alpha'\xi_{2\cdot})$$

$$\exp-\frac{1}{2}\frac{w'D_\alpha'\xi_{1\cdot}\xi_1'D_\alpha w}{w'w}.$$

整理をするために，次のことに注意しておく。まず，

(6.10) $\xi_{2\cdot}'\xi_{2\cdot}=\Pi_{2\cdot}ZC_\alpha E_\alpha E_\alpha'C_\alpha'Z'\Pi_{2\cdot}'$

$$=\Pi_{2\cdot}ZM_\alpha Z'\Pi_{2\cdot}'$$

$$=\Pi_{22}Z_2M_1Z_2'\Pi_{22}' \quad (\equiv\mu^2),\ \alpha=1,\ 2.$$

さらに，(6.5) の条件は，

$$(6.11)\quad 0=D_{2\alpha}'\xi_{2\cdot}=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha'Z'\Pi_{2\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'E_\alpha E_\alpha'C_\alpha'Z'\Pi_{2\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha C_\alpha'E_\alpha E_\alpha'C_\alpha Z'\Pi_{2\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha M_\alpha Z'\Pi_{2\cdot}'=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha M_1Z_2'\Pi_{22}'$$

と書きなおせる。従って，

$$(6.12)\quad D_\alpha'\xi_{1\cdot}=\begin{bmatrix}(\xi_{2\cdot}'\xi_2)^{-\frac{1}{2}}\xi_{2\cdot}'\xi_{1\cdot}\\ D_{2\alpha}'\xi_{1\cdot}\end{bmatrix}$$

の要素について次が言える。一行目については，

$$(6.13)\quad \xi_{2\cdot}'\xi_1=\Pi_{2\cdot}ZC_\alpha E_\alpha E_\alpha'C_\alpha'Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=\Pi_{2\cdot}ZM_\alpha Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=\beta\Pi_{22}Z_2M_1Z_2'\Pi_{22}',\ \alpha=1,\ 2.$$

残りの部分については (6.11) より，

$$(6.14)\quad D_{2\alpha}'\xi_{1\cdot}=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha'Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'E_\alpha E_\alpha'C_\alpha Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha C_\alpha'E_\alpha E_\alpha'C_\alpha Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha M_\alpha Z'\Pi_{1\cdot}'$$
$$=D_{2\alpha}'E_\alpha'C_\alpha M_1Z_2'\Pi_{22}=0.$$

故に

$$(6.15)\quad D_\alpha'\xi_{1\cdot}=\begin{bmatrix}\beta\mu\\ 0\end{bmatrix},$$

$$(6.16)\quad D_\alpha'\xi_{1\cdot}\xi_{1\cdot}'D_\alpha=\begin{bmatrix}\beta^2\mu^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

従って (6.9) は次のように書き改められる。

$$(6.17)\quad f_8(b^{(\alpha)},\ w)=C_{n_\alpha}e^{-\frac{1}{2}\mu^2}(w'w)^{\frac{1}{2}}$$
$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})w'w$$
$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu w_1\quad \exp-\frac{1}{2}\beta^2\mu^2\frac{w_1^2}{w'w}.$$

ここにきて次の極座標変換[(4)]をする。

$$w_1=r\sin\theta_1$$
$$w_2=r\cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$w_3=r\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_3$$
$$(6.18)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_{n_\alpha-1}=r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_{n_\alpha-2}\sin\theta_{n_\alpha-1}$$
$$w_{n_\alpha}=r\cos\theta_1\cos\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_{n_\alpha-2}\cos\theta_{n_\alpha-1}$$
$$J[w:\ (r,\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n_\alpha-1})]$$
$$=r^{n_\alpha-1}\cos^{n_\alpha-2}\theta_1\cos^{n_\alpha-3}\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_{n_\alpha-2},$$
$$0<r<\infty,\ -\frac{1}{2}\pi<\theta_i<\frac{1}{2}\pi,\ i=1,\ \cdots,\ n_\alpha-2,$$
$$-\pi<\theta_{n_\alpha-1}<\pi.$$

注(4) Anderson〔1, pp. 175～6〕参照。

この変換によれば次を得る。

$$(6.19)\quad w'w=r^2.$$

以上より $(b^{(\alpha)},\ r,\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n_\alpha-1})$ の分布の d.f. は，

$$(6.20)\quad f_9(b^{(\alpha)},\ r,\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n_\alpha-1})$$
$$=C_{n_\alpha}e^{-\frac{1}{2}\mu^2}r^{n_\alpha}\cos^{n_\alpha-2}\theta_1\cos^{n_\alpha-3}\theta_2\cdots\cdots\cos\theta_{n_\alpha-2}$$
$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})r^2$$
$$\exp(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu r\sin\theta_1$$
$$\exp-\frac{1}{2}\beta^2\mu^2\sin^2\theta_1.$$

これから $r,\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_{n_\alpha-1}$ の積分に取りかかる。まず，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n_\alpha-3}\theta_2\,d\theta_2=\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-2}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n_\alpha-4}\theta_3\,d\theta_3=\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-2}{2}\right)},$$

$$(6.21)\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta_{n_\alpha-3}\,d\theta_{n_\alpha-3}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta_{n_\alpha-2}\,d\theta_{n_\alpha-2}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}d\theta_{n_\alpha-1}=2\pi,$$

より，

$$(6.22)\quad f_{10}(b^{(\alpha)},\ r,\ \theta_1)$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}f_9\,d\theta_{n_\alpha-1}\,d\theta_{n_\alpha-2}\cdots d\theta_2$$
$$=C_{n_\alpha}2\pi^{\frac{n_\alpha-1}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}r^{n_\alpha}$$
$$\exp-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})r^2\ \exp(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu r\sin\theta_1$$
$$\exp-\frac{1}{2}\beta^2\mu^2\sin^2\theta_1\cdot\cos^{n_\alpha-2}\theta_1.$$

ここで指数関数のテイラー展開により，

$$(6.23)\quad f_{10}=C_{n_\alpha}'e^{-\frac{1}{2}\mu^2}e^{-\frac{1}{2}\beta^2\mu^2\sin^2\theta_1}\cos^{n_\alpha-2}\theta_1$$
$$e^{-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})r^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu\sin\theta_1]^i}{i!}r^{n_\alpha+i}$$

ただし $C_{n_\alpha}'=C_{n_\alpha}2\pi^{\frac{n_\alpha-1}{2}}/\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)$. 更に

(6.24) $$\int_0^\infty r^{n\alpha+i}e^{-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})r^2}dr$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{\frac{n\alpha+i-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(1+b^{(\alpha)2})t}dt$$
$$=\frac{2^{\frac{n\alpha+1+i}{2}}\Gamma\left(\frac{n_\alpha+i+1}{2}\right)}{2\,(1+b^{(\alpha)2})^{\frac{n\alpha+i+1}{2}}}$$

より (6.23) を項別積分して,

(6.25) $$f_{11}(b^{(\alpha)},\ \theta_1)=C_{n\alpha}''e^{-\frac{1}{2}\mu^2}e^{-\frac{1}{2}\beta^2\mu^2\sin^2\theta_1}$$
$$\cos^{n\alpha-2}\theta_1\cdot(1+b^{(\alpha)2})^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{i}{2}}\Gamma\left(\frac{n_\alpha+i+1}{2}\right)}{i!\,(1+b^{(\alpha)2})^{\frac{i}{2}}}[(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu\sin\theta_1]^i,$$

ただし $C_{n\alpha}''=C_{n\alpha}'2^{\frac{n\alpha-1}{2}}$.

再びテイラー展開によって

(6.26) $$f_{11}=C_{n\alpha}''e^{-\frac{1}{2}\mu^2}(1+b^{(\alpha)2})^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu]^i\,2^{\frac{i}{2}}\Gamma\left(\frac{n_\alpha+i+1}{2}\right)}{i!\quad(1+b^{(\alpha)2})^{\frac{i}{2}}}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\beta^2\mu^2}{2}\right)^j}{j!}\sin^{2j+i}\theta_1\cos^{n\alpha-2}\theta_1.$$

θ_1 に関して積分するために，まず

(6.27) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2j+i}\theta_1\cos^{n\alpha-2}\theta_1\,d\theta_1$$
$$=\begin{cases}0 & i=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2j+2k}\theta_1\cos^{n\alpha-2}\theta_1\,d\theta_1 & i=2k=0,\ 2,\ 4,\ \cdots\end{cases}$$

更に

(6.28) $$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2j+2k}\theta_1\cos^{n\alpha-2}\theta_1\,d\theta_1$$
$$=2\int_0^1 t^{2j+2k}(1-t^2)^{\frac{n\alpha-3}{2}}dt$$
$$=\int_0^1 s^{j+k}(1-s)^{\frac{n\alpha-3}{2}}ds$$
$$=\frac{\Gamma\left(j+k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+j+k\right)}.$$

(6.26) を θ_1 に関して項別積分すると，(6.27) で示されるように i が偶数の部分だけ残る。残る部分の値は (6.28) で示される。従って,

(6.29) $$f_{12}(b^{(\alpha)})=C_n'''e^{-\frac{1}{2}\mu^2}(1+b^{(\alpha)2})^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{[(1+b^{(\alpha)}\beta)\mu]^{2i}\,2^{\frac{2i}{2}}\Gamma\left(\frac{n_\alpha+2i+1}{2}\right)}{(2i)!\quad(1+b^{(\alpha)2})^{\frac{2i}{2}}}$$
$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\beta^2\mu^2}{2}\right)^j\Gamma\left(j+i+\frac{1}{2}\right)}{j!\quad\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+j+i\right)},\quad \alpha=1,\ 2,$$

ただし $C_{n\alpha}'''=C_{n\alpha}\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)=\pi$. これが求めるべき OLS $b^{(1)}$ と TSLS $b^{(2)}$ の d.f. である。

以上で導出過程を終るが，分布形の見通しをよくするため又従来の結果と符合していることを示すため (6.29) を整理しなおす。

まずガンマ関数の二倍公式,

(6.30) $$(2i)!=2^{2i}\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(i+1),$$

及び表記法

(6.31) $${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+j)\Gamma(c)x^j}{\Gamma(a)\Gamma(c+i)j!}$$

を使うと

(6.32) $$f_{12}(b^{(\alpha)})$$
$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu^2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}(1+b^{(\alpha)2})^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha+1}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}{i!\,\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+i\right)}\left[\frac{(1+b^{(\alpha)}\beta)^2\mu^2}{2(1+b^{(\alpha)2})}\right]^i$$
$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}+i;\ \frac{n_\alpha}{2}+i;\ -\frac{\beta^2\mu^2}{2}\right)$$

を得る。更に Kummer の変換[5]

(6.33) $${}_1F_1(a\ ;\ c\ ;\ x)={}_1F_1(c-a\ ;\ c\ ;\ -x)\,e^x$$

を使うと,

(6.34) $$f_{12}(b^{(\alpha)})$$
$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+\beta^2)\mu^2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}(1+b^{(\alpha)2})^{-\frac{n\alpha+1}{2}}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha+1}{2}+i\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)}{i!\quad\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+i\right)}\left[\frac{(1+b^{(\alpha)}\beta)^2\mu^2}{2(1+b^{(\alpha)2})}\right]^i$$

注(5) Erdélyi et al [4, p. 253] 参照。

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}+j\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+i\right)\left(\frac{\beta^2\mu^2}{2}\right)^j}{j!\ \Gamma\left(\frac{n_\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+i+j\right)}$$

を得る。この結果が Richardson の結果に等しいことも容易に確かめられる。

以上長々とした議論によって，特別の予備知識なしに，Basmann, Kabe, Richardson, Sawa の方法とは別の方法によって，OLS, TSLS の小標本分布が導びかれることが示された。

7 $\Sigma\neq I$ の場合

簡単化の仮定 $\Sigma=I$ を採用しない時でも，$b^{(\alpha)}$ の分布導出は§6とほぼ同様である。この結果は Richardson〔8〕の変換と同一になる。

$x_{\cdot i}\sim N\left(\xi_{\cdot i}\ \begin{matrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{matrix}\right)$ であるから，x_{2i} が与えられた時の x_{1i} の条件付き分布は

(7.1) $N(\xi_{1i}+\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(x_{2i}-\xi_{2i}),\ \sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21})$

$i=1,\ \cdots,\ n_\alpha$

従って $x_{21}\ \cdots\ x_{2n\alpha}$ が与えられた時 $b^{(\alpha)}$ は x_{1i} の線型結合で，その条件付き分布は

(7.2) $f_{13}(b^{(\alpha)}|x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})=$

$$N\left(\frac{\sum x_{2i}(\xi_{1i}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\xi_{2i})}{\sum x_{2i}^2}+\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21},\ \frac{\sigma^{11}}{\sum x_{2i}^2}\right),$$

ただし $\sigma^{11}=\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}$. $x_{21},\ \cdots,\ x_{2n}$ の分布は

(7.3) $f_{14}(x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})=\prod_{i=1}^{n\alpha}N(\xi_{2i},\ \sigma_{22}).$

(7.2)，(7.3) より，$\Sigma\neq I$ の時の $b^{(\alpha)}$, x_{21}, …, $x_{2n\alpha}$ の同時分布の d.f. は

(7.4) $f_{15}(b^{(\alpha)},\ x_{21},\ \cdots,\ x_{2n\alpha})=f_{13}\cdot f_{14}$

$$=(2\pi\sigma^{11})^{-\frac{1}{2}}(\sum x_{2i})^{\frac{1}{2}}\exp-\frac{\sum x_{2i}^2}{2\sigma_{22}^2\sigma^{11}}\left[(\sigma_{22}b^{(\alpha)}-\sigma_{12})-\frac{\sum x_{2i}(\sigma_{22}\xi_{1i}-\sigma_{12}\xi_{2i})}{\sum x_{2i}^2}\right]^2$$

$$(2\pi\sigma_{22})^{-\frac{n\alpha}{2}}\exp-\frac{1}{2\sigma_{22}}\sum(x_{2i}-\xi_{2i})^2.$$

整理すると，

(7.5) $f_{15}=C_{n\alpha}{}^*e^{-\frac{\sum\xi_{2i}^2}{2\sigma_{22}}}(\sum x_{2i}^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\exp-\frac{1}{2}\left[\frac{(\sigma_{22}b^{(\alpha)}-\sigma_{12})^2}{\sigma_{22}^2\sigma^{11}}+\frac{1}{\sigma_{22}}\right]\sum x_{2i}^2$$

$$\exp\sum x_{2i}\left\{\frac{(\sigma_{22}b^{(\alpha)}-\sigma_{12})(\sigma_{22}\xi_{1i}-\sigma_{12}\xi_{2i})}{\sigma_{22}^2\sigma^{11}}+\frac{1}{\sigma_{22}}\xi_{2i}\right\}$$

$$\exp-\frac{1}{2\sum x_{2i}^2}\frac{[\sum x_{2i}(\sigma_{22}\xi_{1i}-\sigma_{12}\xi_{2i})]^2}{\sigma_{22}^2\sigma^{11}},$$

ただし $C_{n\alpha}{}^*=(2\pi)^{-\frac{n\alpha+1}{2}}\sigma_{22}{}^{-\frac{n}{2}}(\sigma^{11})^{-\frac{1}{2}}$. ここで

(7.6) $b^{(\alpha)*}=\frac{\sigma_{22}b^{(\alpha)}-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{22}\sigma^{11}}}$

(7.7) $\xi_{1i}{}^*=\frac{\sigma_{22}\xi_{1i}-\sigma_{12}\xi_{2i}}{\sigma_{22}\sqrt{\sigma^{11}}}$

(7.8) $\xi_{2i}{}^*=\frac{\xi_{2i}}{\sqrt{\sigma_{22}}}$

と書きかえると，

(7.9) $f_{15}=C_{n\alpha}{}^*e^{-\frac{1}{2}\sum\xi_{2i}^{*2}}(\sum x_{2i}^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\exp-\frac{1}{2\sigma_{22}}[1+b^{(\alpha)*2}]\sum x_{2i}^2$$

$$\exp\frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}}\sum x_{2i}[b^{(\alpha)*}\xi_{1i}{}^*+\xi_{2i}{}^*]$$

$$\exp-\frac{1}{2}\frac{[\sum x_{2i}\xi_{1i}{}^*]^2}{\sum x_{2i}^2}$$

を得る。

(7.9) は§6で $\Sigma=I$ の時の (6.3) に対応し同じ形のものである。そして x_{21}, …, $x_{2n\alpha}$ についての積分も $\Sigma=I$ の場合と同様に行なえる。

例えば§6の場合と同じように $x_{2\cdot}$ から w へ変換するには，先の D_α (6.4) にかわって直交行列

(7.10) $D_\alpha{}^{*\prime}=\begin{bmatrix}(\xi_{2\cdot}{}^*\xi_{2\cdot}{}^*)^{-\frac{1}{2}}\xi_{2\cdot}{}^{*\prime}\\ D_{2\alpha}{}^{*\prime}\end{bmatrix},$

$\xi_{2\cdot}{}^{*\prime}=[\xi_{21}{}^*,\ \cdots,\ \xi_{2n\alpha}{}^*]$

を使えばよい。更に w を積分するには極座標変換を使えばよい。ただし，(7.10) による変換の前に $x_{2\cdot}$ を $\sqrt{\sigma_{22}}$ で割る変換が追加される必要がある。

以上より§6の方法は，$\Sigma\neq I$ の時でも適用可能であることが示された。

8 結 語

OLS, TSLS の小標本分布導出の2つの方法，Basmann の方法，非心ウィッシャート分布の方法，が考察された。

それらに代わる新たな方法が試みられた。この方法は，種々の変数変換を繰り返えす。そして，複雑な積分をせずに，通常のベータ，ガンマ積分だけで間に合うようになる。又，この種の小標本分布論でよく利用される非心ウィッシャート分布の密度関数を使わずに問題が解ける。

内生変数3個を含むモデルの分布導出が可能になるということが報告されている[(6)]。ここで提示された方法が大きいモデルの分布導出に適用可能となるかは，こ

れからの問題として残っている。

〈参考文献〉

〔1〕 Anderson, T. W., *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley (1958)

〔2〕 Basmann, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-Identified Cases," *Journal of the American Statistical Association*, 56 (1961)

〔3〕 Basmann, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in a Leading Three Equations Case," *Journal of the American Statistical Association*, 58 (1963)

〔4〕 Erdélyi, et al., *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1, McGraw-Hill (1953)

〔5〕 Kabe, D. G., "A Note on the Exact Distribution of the GCL Estimators in Two Leading Over-identified Cases," *Journal of the American Stastistical Association*, 58 (1963)

〔6〕 Kabe, D. G., "On the Exact Distribution of the GCL Estimators in a Leading Three-Equation Case," *Journal of the American Statistical Association*, 59 (1964)

〔7〕 Mariano, R. S. and T. Sawa, "The Exact Finite Sample Distribution of the Limited Information Maximum Likelihood Estimator in the Case of Two Included Endogenous Variables", *Journal of the American Statistical Association*, 67 (1972)

〔8〕 Richardson, D. H., "The Exact Distribution of a Structural Coefficient Estimator," *Journal of the American Statistical Association*, 63 (1968)

〔9〕 Richardson, D. H. and R. J. Rohr, "Distribution of a Structural *t*-Statistic for the Case of Two Included Endogenow Variables", *Journal of the American Statistical Association*, 66 (1971)

〔10〕 Richardson, D. H. and D. Wu, "A Note on the Comparison of Ordinary and Two Stage Least Squares Estimators", *Econometrica*, 39 (1971)

〔11〕 Sawa, T., "The Exact Sampling Distribution of Ordinary Least Squares and Two Stage Least Squares Estimators, *Journal of the American Statistical Association*, 64 (1969)

注(6) R. L. Basmann, "Exact Finite Sample Distributions for Some Economic Estimators and Test Statistics" Chapt. 4 in *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. II, ed. Intriligator and Kendrick, 1974, North Holland