Title	効用理論史のなかのワルラス :『要論』公刊百年を記念して
Sub Title	Léon Walras in the history of utility theory
Author	福岡, 正夫 丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.5 (1976. 6) ,p.231(1)- 250(20)
JaLC DOI	10.14991/001.19760601-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19760601-0001

効用理論史のなかのワルラス

——『要論』公刊百年を記念して——

福岡正夫
丸山徹

序

レオン・ワルラス研究の泰斗ウィリアム・ジャッフェ教授によって編纂された浩瀚な『ワルラス書簡集』[(1)] 全3巻は，きわめて多くの点でこの巨匠の業績に新しい光を照射する貴重な資料の宝庫である。なかんずくワルラスの precursor としてこれまで重視されてきたクールノーや父オーギュスト・ワルラスの影響ばかりでなく，ほかにも多数の学者たち，とりわけ彼の身近の数学者たちが主著『純粋経済学要論』の成熟に少なからず寄与した事実が明るみに出されたことは，ワルラスの思想の形成過程を知るうえにおいてもはなはだ有意義なことであった。本稿において筆者たちは，この『書簡集』所収のワルラスと他の学者たちとの若干の往復書簡を典拠としつつ，とくに標記の効用理論の分野に限定して，彼らの知的交流の一端を解明しておくことにした。以下テーマとしては，(1)効用概念の基数性・序数性，(2)加法的効用関数と一般的効用関数，(3)需要関数の導出，(4)積分可能条件，の四つに分け，その順序でとり上げていくことにしたい。

I

1890年代から1900年代の初めにかけての消費者均衡理論の進展が，フィッシャー(1892)およびパレート(1906)による序数的効用概念の提唱，そしてそれにもとづく無差別曲面アプローチによって特徴づけられていることは周知のところであるが，当該の期間においてまだ活発な学問活動に携っていたワルラスは，この効用概念の基数性と序数性あるいは可測性と非可測性の問題をどう受けとめたのであろうか。

『書簡集』から窺われるかぎりにおいては，この問題をめぐってのワルラスのもっとも熱心な議

注(1) W. Jaffé ed., *Correspondence of Léon Walras and Related Papers* (North-Holland; Amsterdam) 1965.

論の相手は，二人の数学者H・ロラン[(2)]とH・ポアンカレであったように思われる。

彼らとの議論が始まる1900年—1901年よりはるか以前から，ワルラスは効用の可測性問題を意識しており，これを論じているが，しかしそのほとんどすべては『要論』における所説の反復にすぎないものであった。そのなかで彼は効用の可測性に否定的な見解を述べつつも，ロランとの議論がかわされた1900年半ばの時点においてさえ，実はこの問題について十全な理解に達していたとはいい難い証拠がある。たとえば1900年5月22日付のロラン宛の書簡[(3)]で，ワルラスは効用の可測性を否定するつぎのような発言

> 「経済学の問題は，……μ〔価値尺度財の限界効用——引用者〕が尺度（mesuré）になるとか，それ自体可測的（mesurable）であるとか仮定することなしに……解決されるという事実に大いに注目していただきたいと存じます。わたくし自身としては，効用および限界効用の尺度（étalon）をまったく用いずに議論をしているわけなのです。」

を行なっているものの，同じ書簡のそのすぐあとの箇所では，何のためらいもなく限界効用の逓減について語っているのである。したがって結局ワルラスは，効用の可測性が需要法測の演繹にとって，一般にはまったく不要であることを認めながら，その認識と可測的な限界効用概念を内包するみずからの体系とのかかわり合いについては十分にその含意を看破することができなかったといわざるをえない。

ワルラス宛の書簡[(4)]で展開されたロランの議論は，効用関数の不確定性の問題を積分可能条件との関連で論じたものであったが，効用概念の序数性ないしは非可測性のもつ基本的な意味については直接に説くところが乏しかった。が，これと対蹠的に，1901年9月30日付のポアンカレからワルラスに宛てた書簡[(5)]は，問題の核心をきわめて明確に考究している点で，つとにシュンペーターが指摘したように[(6)]，まさしく序数的効用理論の「マグナカルタ」とも称すべき文献であった。この前後をつうじて二人のあいだにとりかわされた討論は，たんに効用理論史上決定的に重要な意味をもつばかりでなく，また科学哲学における量的概念とその測定問題の見地からも大きな意義を含むものである[(7)]。

そこで以下本節ではしばらくポアンカレとワルラスとの議論に焦点をあわせ，ロランの議論は後

注(2) Hermann Laurent (1841-1908) はフランスの数学者で，母校の Ecole polytechnique で教鞭を執ったのち，Institut des actuaires français を創設し，また Institut agronomique の教授になるなど多彩な学問活動に携った。

(3) **1454**（以下脚注の太文字数字は書簡の番号を示すものである。）Jaffé ed. *Correspondence*, Vol. III, pp. 118-120.

(4) **1452**, Vol. III, pp. 116-117 (1900年5月11日)。**1455** Vol. III, pp. 121 (1900年5月24日)。

(5) **1496** Vol. III, pp. 162-163. 当時パリ大学理学部の教授であったポアンカレ (Henri Poincaré 1856-1912) とワルラスとの文通は1901年9月10日付，ワルラスからの書簡 (**1492**, Vol. III, pp. 158-159) をもって始まり，以後全部で10通の書簡がとりかわされている。

(6) J. A. Schumpeter, *History of Economic Analysis* (George Allen & Unwin; London) 1954, p. 1056.

(7) 測定問題については，R. Carnap, *Philosophical Foundations of Physics* (Basic Books; New York), 1966 のIIを参照。

に第Ⅳ節で積分可能条件を論ずるさいに立ち入ってとり扱うことにしたいと思う。

ポアンカレが9月30日付の短い書簡のなかで示した，基本的に重要な点はつぎのようなものである。

(i) 比較概念と可測概念の明確な区別を呈示したこと。

「一体満足というものは，果して測定できるものなのでしょうか。たしかにわたくしは一方のものを他方のものより選好するという理由で，前者の満足が後者の満足より一そう大きいということはできます。しかし一方の満足が他方のそれの2倍であるとか3倍であるとかいうことはできません。……したがって満足というものは一つの大きさではありますが，可測的な大きさではないのです。」

(ii) 比較概念を表現する一つの数値的な指標が構成されたとき，それに単調な変換を施した関数もまた，同様にその比較概念を表現する指標関数たりうる点をはっきりさせたこと。

「非可測的な大きさは，ただそれが非可測的だという理由だけで，どんな数学的思惟からも締め出されてしまうのでしょうか。決してそんなことはありません。〔たとえば比較概念としての温度を表示するのに〕水銀の膨脹をもってするのは恣意的なことなのですから，これで定義された温度の何らかの (quelconque) 関数によって温度を定義したとしても，この関数がつねに増加的なものであるかぎりにおいて，やはりまったく正当なことだったのです。まさしくこれと同様に，当面の関数がそれの示す満足とともに増加的なものであるかぎり，任意の関数によって満足を定義することができるはずなのです。」

(iii) 比較概念をあらわす指標関数は，それが(ii)の条件を満たすかぎりまったく恣意的なものであってよいが，それから導き出される関係はこの恣意性から独立なものでなければならない点を示しえたこと。

「あなた〔ワルラス——引用者〕の前提のなかにはいくつかの恣意的な関数がはいりこんでくるでしょうが，ひとたびこの前提が設けられたならば，計算によってそこから帰結をひき出すのでなくてはなりません。この帰結のなかになお恣意的な関数がはいっているとしても，この帰結は誤りではないでしょうが，しかしそれは当初に設定された恣意的な約束に従属したものですから，まったく関心の対象にはなりません。ですからこの恣意的な関数は消去されねばならず，まさにそれがあなた〔ワルラス——引用者〕のやっておられることにほかならないのです。」(8)(9)

注(8) もちろんこれは，恣意的に設定された効用関数を基礎として効用極大化条件が導かれ，それが当初の恣意性から独立であること，したがってさらにそれから導かれる需要関数もまた恣意性から独立であることを指しているものである。この手法が A. P. ピカールの教示を得て，はやくからワルラスの手中にあったことは後に論ずるとおりである。

ワルラスがこのポアンカレの示唆を絶大な好意をもって迎えたことは，後年彼がその最後の論文「経済学と力学」[10]に付して，ポアンカレの書簡の全文を公にした事実からも十分窺われるところである。問題は，このポアンカレの示唆を受けて，ワルラス自身の思想がいかに「進歩」したかであるが，それを見るには，上に挙げた「経済学と力学」中の彼の議論を眺めてみるにしくはない。なお，この時期のワルラスはすでにポアンカレの『科学と仮説』[11]をも読み，その（とりわけ古典力学に対する）理解が「経済学と力学」には色濃く投影している事実にも注意しておく必要があろう[12]。

「経済学と力学」におけるワルラスの進展は大略つぎの3点にあるとみてよい。

(i) 比較概念と可測概念との区別が明らかになったこと。

先にも触れたように，ポアンカレの示唆を受ける前のワルラスにとっては，いまだ効用の「可測性」ということの意味が十分に明らかではなかった。しかし晩年のワルラスは，この問題を基本的に理解しえたようである。まず彼は数量的事象をつぎの二つのカテゴリーに分類する。

第一は「物理的」事象と呼ばれるものであって，これは観察者の外にある「自然を舞台として」生起するという意味で「外的」(extérieur) なものである。このカテゴリーにおいては，それに属する「各事象についてそれを測定するのに役立つ客観的で誰にも共通な一つの単位，すなわち一つの大きさが存在する。」

第二は「心理的」事象と呼ばれるものであり，これは観察者の心のうちに生起するという意味で「内的」(intime) なものである。このカテゴリーにおいては，その性質からして個人間の比較は不可能であるとともに，各人が「その大きさ，たとえば強度の点について事象間の比較を行ないうる場合には，それはある事象が他の事象よりも大きいとか，より強いとか評価するものであって，……この評価は主観的で個人的なものにとどまるであろう。」

第一のカテゴリーはいうまでもなく可測概念の適用対象であり，第二のカテゴリーは比較概念のみが許容される対象であって，効用概念は当然後者に含まれるのでなければならない。ワルラスがこれら二つの概念を初めて明確に区別しえたのは，まさにこの最後の論文においてであった。

(ii) 比較概念のみに立脚する効用＝交換の一般均衡理論の構造を，可測概念に依拠しうる力学の理論構造と綿密に対比考証しえたこと。

注(9) これらの重要な論点のほかに，ポアンカレはさらに満足の個人間比較の不可能性についても，つぎのような評言を加えている。

「同一個人が感ずる満足については，わたくしは，それがある状況において他の状況におけるより大であるかどうかを語ることができます。しかし，二人の異った個人が感ずる満足を比較するとなると，わたくしはその手段をまったくもち合わせておりません。そしてこれが，消去されるべき恣意的な関数の数をさらに増加させるのです。」

(10) "Economique et mécanique", *Bulletin de la société vaudoise des sciences naturelles*, June 1909, 5th Series, Vol. 45, No. 166. これはまた G. H. Bousque の序文を付されて *Metroeconomica*, April 1960 に再録。

(11) H. Poincaré, *La science et l'hypothese*, 1902, 河野伊三郎訳（岩波文庫）1938.

(12) この点については Walras, "Economique et mécanique" (in *Metroeconomica*), p. 9, n. 2 および p. 11, n. 2 を見よ。

まず，効用極大化の定理と，天秤のエネルギー極大化の定理における諸概念の対比を表にして掲げておこう。記号がやや煩雑であるが，ワルラスの用いたものをそのまま踏襲しておくことにする。

効用極大化定理

q_a, q_b は2財の需要量，v_a, v_b は2財の価格

(1) $u_a=\varphi_a(q_a)$, $u_b=\varphi_b(q_b)$

ここで $\varphi_a'>0$, $\varphi_b'>0$〔限界効用〕

(2)
$$\begin{cases} r_a=\dfrac{d\varphi_a(q_a)}{dq_a}=\varphi_a'(q_a) \\ r_b=\dfrac{d\varphi_b(q_b)}{dq_b}=\varphi_b'(q_b) \end{cases}$$

ここで $\varphi_a''<0$, $\varphi_b''<0$〔限界効用の逓減〕

(3) $$\frac{d\varphi_a(q_a)}{dq_a}dq_a+\frac{d\varphi_b(q_b)}{dq_b}dq_b=0$$

〔効用の極大条件〕

(4) $v_a \cdot dq_a+v_b \cdot dq_b=0$

〔交換の方程式〕

(5) $\dfrac{r_b}{r_a}=\dfrac{v_b}{v_a}$ 〔(2)－(4)より〕

限界効用の比が価格の比に等しくなったとき，効用極大化が満たされる。

天秤のエネルギー極大化定理

p, q は天秤の腕の長さ

(1′) $$\varepsilon_p=\varphi(p)=\int_0^p\varphi'(p)\,dp,\quad \varepsilon_q=\varphi(q)=\int_0^q\varphi'(q)\,dq$$

〔エネルギー〕

(2′)
$$\begin{cases} \mathrm{P}=\dfrac{d\varphi(p)}{dp}=\varphi'(p) \\ \mathrm{Q}=\dfrac{d\varphi(q)}{dq}=\varphi'(q) \end{cases}$$

〔力あるいは極限エネルギー〕

(3′) $$\frac{d\varphi(p)}{dp}\cdot dp+\frac{d\varphi(q)}{dq}dq=0$$

〔エネルギーの極大条件〕

(4′) $pdp+qdq=0$

〔均衡方程式〕

(5′) $\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\dfrac{q}{p}$ 〔(2′)－(4′) より〕

力の逆比が天秤の腕の長さの比に等しくなったとき，天秤は均衡する。

つぎに市場の一般均衡と天体の均衡における概念の対比をふたたび表にして掲げよう。

市場の一般均衡

$p_{c,a}$, $p_{c,b}$, …… は(A)財，(B)財……で表した(C)財の価格。$p_{c,a}=p_c$ とも書く。n, p, ……はm単位の(A)財と交換される(B)財，(C)財……の量。$r_{a,i}$, $r_{b,i}$……は第 i 個人の(A)財，(B)財……の限界効用。

(1) $$p_{c,b}=\frac{v_c}{v_b}=\frac{p_{c,a}}{p_{c,b}}=\frac{\dfrac{v_c}{v_a}}{\dfrac{v_b}{v_a}}$$

〔さや取引の不能〕

(2) $$p_b=\frac{r_{b,1}}{r_{a,1}}=\frac{r_{b,2}}{r_{a,2}}=\frac{r_{b,3}}{r_{a,3}}=\cdots\cdots$$

$$p_c=\frac{r_{c,1}}{r_{d,1}}=\frac{r_{c,2}}{r_{a,2}}=\frac{r_{c,3}}{r_{a,3}}=\cdots\cdots$$

$$p_d=\frac{r_{d,1}}{r_{a,1}}=\frac{r_{d,2}}{r_{a,2}}=\frac{r_{d,3}}{r_{a,3}}=\cdots\cdots$$

…………………………

〔全主体の効用極大〕

(3) $mv_a=nv_b=pv_c=\cdots\cdots$

$m=np_b=pp_c=\cdots\cdots$ 〔市場の実際の状態〕

天体の均衡

γ_t, γ_l, γ_s は天体 (T) (L) (S) の加速度 m_t, m_l, m_s はその質量。$\mu_l=\dfrac{m_l}{m_t}$, $\mu_s=\dfrac{m_s}{m_t}$. a_l は (L) の (T) に対する引力。a_t は (T) の (L) に対する引力。

(1′) $$\frac{\gamma_s}{\gamma_l}=\frac{\dfrac{\gamma_s}{\gamma_t}}{\dfrac{\gamma_l}{\gamma_t}}$$

〔相対加速のバランス〕

(2′) $$\gamma_t=\frac{a_l}{m_t}=\frac{km_lm_t}{m_t}=km_l$$

$$\gamma_l=\frac{a_t}{m_l}=\frac{km_lm_t}{m_l}=km_t$$

〔作用・反作用均等の法則〕

(3′) $\gamma_tm_t=\gamma_lm_l=\gamma_sm_s$

$\gamma_t=\gamma_l\mu_l=\gamma_s\mu_s$

〔宇宙の実際の状態〕

(iii) 比較概念の指標関数を理論体系中に導入するさいの方法論的基礎を明確にしえたこと。

(ii)の二組の対比をつうじて知られることは，効用理論の演繹と力学＝物理学のそれとがきわめて多くの類似点をもっていること，ところが後者は外的な事象であるために「共通の尺度が存在し」，そのことによって均衡の状態を客観的に観察することが可能となっているのに対して，前者は内的な事象であるために「共通の尺度が存在せず」，客観的観察が不可能であること，である。

しかしながら，「測定されるべき事象が物理的なものであるか心理的なものであるかに応じて，尺度が外的なものになったり内的なものになったりするという事実は，いまだ尺度が存在すること，すなわち量および量的比率の比較が可能であることを妨げるものではない。したがってまた，その事実は，当該の科学が数学的なものであることを妨げるものではないのである。」

こうして，外的な事象であるにせよ，内的な事象であるにせよ，それらが比較概念たりうるかぎりにおいて，それがまた数学的科学の基礎たりうることには何のかわりもない。

「効用や限界効用という概念は，質量や力という概念と同様，われわれが物理的数理科学あるいは心理的数理科学を厳密かつ簡明に，また数学的言語をつうじて精確明晰な形に洗練しようとする場合，原因と結果とを結びつけようとする計算中に不可避的かつ正当に現われる仮説的因子に対して与えられた名称にすぎないものである。」

すなわち，ワルラスによれば質量や力がある物理現象の仮説的原因であると考えられる以上は，それとまったく同様に，効用や限界効用にも需要供給現象の仮説的原因としての位置が確保されてよいと考えられるのである。

この点についてワルラスはポアンカレの書物から「質量とは計算に導入すると便利な係数である」[(13)]という一句を引用したが，さらにそれにつづけてつぎの一節を引用してもよかったであろう。

「われわれはあらゆる質量に〔いままでと——引用者〕異なる値を与えて力学全体をつくり直すこともできよう。この新しい力学は実験とも矛盾しないであろうし，また力学の一般的原理……とも矛盾しないであろう。」[(14)]

要するに以上のところからワルラスが体得した認識は，つぎのようなものであった。すなわちポアンカレがとり扱ったような可測概念の指標関数の場合であれ，経済学がとり扱う比較概念の指標関数の場合であれ，それらはあくまで理論的帰結をうるための基礎概念なのであって，その導入はある条件に従ったうえで，できうるかぎり単純で扱いやすい形で行なわれるのがよいということ，しかしそれらの指標関数から導出される理論的帰結は，当初の恣意性からはまったく独立なもので

注(13) Poincaré，前掲書，邦訳 p. 133.
(14) Poincaré，前掲書，邦訳 p. 133.

なくてはならないということ，がそれである。上に引用したポアンカレの一文は，「力学」を「経済学」に，「質量」を「効用」に読みかえれば，まったく効用概念についてワルラスが述べたかったところに一致すると考えられよう。

ただ最後に一言しておかねばならないが，こうして「経済学と力学」の中ではワルラスの認識に顕著な進歩が示されたにもかかわらず，そこでも可測的効用理論の残滓は依然として存続した。逓減的な限界効用の概念は，ついに主著の決定版 (1926) においてさえ削除されるところとはならなかったのである。[15][16]

II

ワルラスはその主著においてもっぱら加法的な効用関数，すなわち

$$U^1(x_1)+U^2(x_2)+\cdots\cdots+U^n(x_n)$$

の形に書かれる効用関数を採用し，その姿勢は前節でも触れた彼の最後の論文「経済学と力学」にいたるまでまったく変わることがなかった。

ところがすでに世紀の変わり目には，エッジワース (1881)[17] やフィッシャー (1892)[18] が一般的効用関数

$$U(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

を提示しており，彼らの主著はいずれもワルラスの手許に送られているから，この効用関数の形態も当然ワルラスの目にとまったはずである。ではこの点についてのワルラスの真の見解はどのようなものであったろうか。

われわれはこの問いに対するもっとも明快な答えをつぎの２つの資料の中に見出すことができよう。

(i) 1892 年 7 月 28 日付，フィッシャー宛の書簡。[19]

フィッシャーはワルラスの論文「価格決定の幾何学的理論」[20]の英訳にさいして，みずから監訳者

注(15) Walras, *Eléments d'economie politique pure*, 1926, p. 103 を見よ。

(16) パレートは 1911 年 8 月 8 日付の書簡 (G. Sensini, *Corrispondenza di Vilfredo Pareto*, 1948) の中で「ワルラスはポアンカレに手紙を書き，事実を曲げて，ポアンカレが量にかんする概念化についてわたくしと見解が不一致であることを信じさせるような歪曲を用いたのです。……」と記しているが，ワルラスの『書簡集』を仔細に調べたかぎりでは，そのような事実はない。パレートの書簡については松浦保「ワルラスとパレート」『三田学会雑誌』1971 年 11 月 p. 67 を見よ。

(17) F. Y. Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881, pp. 20, 34, 104, 108 を参照。

(18) I. Fisher, *Mathematical Investigations in the Theory of Value and Price*, 1892, Part II を参照。

(19) 1064, Vol. II, pp. 498-499.

(20) "Théorie géométrique de la détermination des prix", *Bulletin de la société des ingénieurs civils de Paris*, janvier 1860, およびローザンヌ大学の *Recueil Inaugural*, 1892. 英訳は *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, July 1892.

の任にあたったが，その Translator's Note の中で，およそ4点にわたってワルラス理論に批判を加えた。それらのうち当面のわれわれの関心事項にとって問題となるのは，第一の論点であって，それはまさしく加法的な効用関数に対する批判である。すなわち，

「〔ワルラスは──引用者〕ある個人にとってある商品の一定量についての限界効用が，当該財の量ばかりでなく，他のすべての財の量の関数になっている，と述べるのを省略した。」

この批判に対して，ワルラスはフィッシャーに宛てた1892年7月28日付の書簡の中で，つぎのように応答している。

「わたくしは，相互に連関をもっている諸商品の効用（そしてまた相互に補完的な役割を果す諸商品の効用）を研究してまいりましたし，それについてのノートをも作りました。……しかし，わたくしはただ話を単純にするために，それらをみんな放りっぱなしにしてしまったのです。[21]」

こうしてワルラスは自己の研究の目的がもっぱら議論の第一段階としての，経済均衡問題のごく大ざっぱな輪郭を提供することにのみおかれていたこと，さらに詳細な点については他の世代の数学者や経済学者に委ねるつもりであったことを釈明したのであった。

(ii) パレートの批判に対する応答。

パレートはその著『純粋経済学』[22]の中で直接，間接にワルラス理論に対する批判を加えた。[23]

これに対してワルラスはヴィニアルスキー（Léon Winiarski）に宛てた1901年11月15日付の書簡[24]の中で，パレートによる批判に関するノートを作った旨を伝えているが，ジャッフェは日付の記入がない2枚の大判用紙にしたためられたこの問題のノートを発見することができた。[25] そこではワルラスはパレートの所論を7つの論点に整頓し，そのそれぞれに対するみずからの見解を表明している。当面問題となるのは，「限界効用はかならずしもつねに単一変数の関数であるとはかぎらない」というパレートの批判に対するつぎのような彼の解答である。

「限界効用を多数商品の消費量の関数と仮定するのは，きわめて簡単なことである。そのと

注(21) この書簡で言及されている「ノート」がいかなる内容をもつものであるのか，今日のわれわれはそれを見ることができない。おそらくこの「ノート」には連関財に関するワルラスの見解も含まれているものと思われるが，後に述べるように，ワルラスの書簡中にもこの問題についての立ち入った議論は見当らないので，学史研究上はこの「ノート」の確認が非常に望まれる。

(22) V. Pareto, *L'economic pure*, 1901-1902.

(23) ただしこの書物の中でパレートが直接にワルラスの名をあげて批判したのは，後者の限界生産力説に言及したただ一箇所のみである。

(24) 1502, Vol. III, pp. 170-171.

(25) Vol. III, pp. 171-173 を参照。ただしこのノートが（注21）で問題にしたノートとは別のものであることは，フィッシャー宛の書簡が1892年，パレートの『純粋経済学』出版が1901-1902年であることに照らして明らかである。

き限界効用は，さまざまな商品の消費量に関する総効用関数の偏導関数に比例する。ただわたくしはこのやり方に伴う複雑さと，限界効用関数の不連続性に伴う複雑さとを断固として遠ざけたいのである。」

以上の資料から明らかなように，ワルラスはエッジワース流に一般化された効用関数についても考察を加えたのであるが，しかしそれに伴う議論の複雑化を回避するために，最後まで加法的効用関数を使用しつづけたのであった。

さて効用関数の形態についての議論と関連して，いわゆる連関財の問題にふれておくのが適当であろう。

限界革命の推進者の１人であるジェヴォンスはすでに商品が「同等な」（代替的な）関係をもつ場合に気づいてそれを分析しようとしたが，彼が想定した効用関数は依然として加法的な形をもつものであったために，その意図を全うすることができなかった。[(26)]

したがって，連関財の理論は，エッジワースによる効用関数の一般化を俟って初めてスタートをきったのである。しかしエッジワース自身はその著『数学的精神科学』の中ではこの問題の定式化がいささかあいまいであったから，実は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$$

の符号による連関財の定義の成立[(27)]は1889年のアウシュピッツ＝リーベンの業績[(28)]において初めて確立したといってよい。フィッシャーやエッジワースは，その後になってこの定義を踏襲したのであった。[(29)]

ワルラスが主著『要論』の中で用いた効用関数は一貫して加法的なものであったから，これからエッジワース流の連関財の理論への道が開けて来ないのは当然である。すでに紹介した1892年7月28日付のフィッシャー宛書簡によって，ワルラス自身，一般的効用関数と連関財の研究を行なっていたことが知られるが，『書簡集』について見るかぎり連関財に関する議論はほとんど無に等しい。

注(26)　W. S. Jevons, *Theory of Political Economy*, 4th ed. (Macmillan; London), 1911, p. 134. ジェヴォンスは２財の限界効用の比が一定である場合に，それらは「同等な」財（代替財）であると規定した。しかしこの点で彼は自己矛盾を犯している。彼は $U^1(x_1)+U^2(x_2)$ の形の効用関数を想定しているにもかかわらず，もし第１財と第２財が「同等」であるなら，各財の限界効用は他財の量にもまた依存することになるからである。

(27)　この連関財の定義が効用の可測性を含意することについては，P. A. Samuelson, *Foundations of Economics Analysis* (Harvard; Cambridge), 1947, pp. 183–184 を見よ。

(28)　R. Auspitz-R. Lieben, *Untersuchungen über die Theorie des Preises* (Dunker & Humblot, Leipzig), 1889, pp. 482, 154 ff, 170 ff.

(29)　I. Fisher, *Mathematical Investigations*, pp. 65-66, 68, 70–71, F. Y. Edgeworth, "Teoria pura del monopolio" *Giornale degli economisti*, 1897. 英訳は *Papers Relating to Political Economy*, 1925, I に含まれている。とくに p. 117 n. を見よ。

この関連でわれわれの注意を惹く最後の事実は，彼が『純粋経済学要論抄』[30]の冒頭に近い部分で述べている一つの態度表明である。かつてルロワ＝ビューリュー（P.P. Leroy-Beaulieu）は，ワルラスが用いたたぐいの数学的分析用具は代替財の問題をとり扱うことができないから効力が弱いという趣旨の批判を下した。[31] ワルラスの態度表明は，この批判への応答と考えられるものであるが，ここでワルラスはエッジワース，フィッシャー，バローネおよびパレートの著作において，連関財の問題が数学的に処理されている功績に言及しながら，つぎのように述べている。

「この〔エッジワースたちの――引用者〕方法はどうしても不可欠なものなのであろうか。純粋な分析に専念するには，ただちに曲線を用いて議論するやり方は放棄しなくてはならないのであろうか。……非代替的ならびに代替的の2つの場合を区別し，前者はもっぱら中等課程においてこれを考え，後者は高等課程のためにとっておくというのが，経済学のように複雑な学問においては話を簡単にする有効な方法となるのではなかろうか。」

ここでもまたワルラスは，議論の複雑化を惧れて連関財の問題を回避してしまったことが知られるわけである。

こうして本節でとりあげた主題をめぐっては，ワルラスはきわめて消極的な発言しか公にしておらず，われわれの史的解明もドラマになんの盛り上がりもないまま終りを告げなければならない。

III

効用関数からその極大化の条件をつうじて需要関数を演繹する論理は，消費者均衡理論における重要な基礎を与えたものとして，ワルラスの顕著な貢献の一つに数えられる。ところが学説史上興味深いことには，この需要関数導出の議論の完成は決してワルラスの独力の貢献によるものではなく，実はローザンヌの数学者アントワーヌ・P・ピカール[32]に負うものであったのである。[33]

ワルラスは二度の機会に自分の業績がピカールに負うところがあることを公に認めた。その第一

注(30) L. Walras, *Abrégé des éléments d'economie politique pure*, 1938, pp. 5-8.

(31) ルロワ＝ビューリューの見解についても *Abrégé* を参照。

(32) Antoine Paul Piccard (1844-1920?) 彼は有名な双子の物理学者オーギュスト・ピカール，ジャン・F・ピカールのおじ（伯父か叔父か不詳）にあたり，彼自身もエンジニアで，1869年ローザンヌ大学力学教授に就任，1881年，ある企業の設立のためにその職を離れるまで教授の地位にあった。

(33) この事実はジャッフェの『書簡集』が出版されるまでまったく明らかにされていなかった。著名な学説史家の著作 J. A. Schumpeter, *History of Economic Analysis*, T. W. Hutchison, *A Review of Economic Doctrines* (Oxford, London), 1953, G. J. Stigler, "The Development of Utility Theory", *Journal of Political Economy*, August & October, 1950 などにおいてもこの点は少しも触れられていない。なおジャッフェ自身による研究としては，W. Jaffé, "The Role of Walras in Marginal Revolution", in R. D. C. Black, A. W. Coats, C. D. W. Goodwin, ed., *The Marginal Revolution in Economics: Interpretation and Evaluation* (Duke University Press), 1973 参照。

はピカール宛の1873年10月25日付[34]の書簡においてであり，第二は1882年11月の日付を付された「最近の三つの覚書への序文」("Préface des trois derniers mémoires"[35]) においてである。

後者の中では彼は，「第一論文を書くとき，わたくしはしばしば彼〔ピカール――引用者〕と相談して成果をあげることができた」と述べ，地代理論の発展についてピカールに負うところがあると述べている。前者については後に引用するが，いずれにしても以下に紹介するピカールの貢献の大きさに較べれば，ワルラスの謝辞はいささか軽きに失するように思われる。なぜなら簡単な2財のケースについて効用の極大化条件を定式化し，そこから需要関数を導く分析手法は，ピカールによって初めてワルラスに伝授されたものと考えられるからである。

まず問題となるのは，ピカールの覚書がいつ書かれたものであるかという点であろう。遺憾なことに，この覚書には日付が付されていないからである。

ワルラスは1872年10月19日付でアンリ・ブローシュ (Henri Brocher de la Fléchère) に書簡[36]を送り，交換の数学的理論に関する論文（これはもちろん翌年の8月に精神科学アカデミーで報告されるにいたったものである）についてそれを「印刷に付するに先立ち，代数式を修正するためにピカール氏と再検討いたしました」と述べている。また翌1873年10月25日，ピカール自身に宛てた書簡の中では，つぎのように記している。

「わたくしは去る8月16日と23日に，パリの精神科学アカデミーで開かれた学会で『交換の数学的理論』の原稿を報告しました。それはあなたにしたがって考えられたものであり，昨冬あなたが検討する労をとって下さったものであります。」(強調は引用者のもの)

そうであるとすれば，ピカールがワルラスに覚書を送ったのは，1872年の晩秋と冬のあいだと考えられるのであるが，実は前記の1872年10月19日付の書簡以前にワルラスが書いたもの[37]の中には，効用極大化条件から需要関数を導出する議論はまったく見あたらないのである。したがって，一応ワルラスがこの理論を完成しえたのは，1872年の上記の期間のことと見て間違いなかろう。

よく知られているように，ローザンヌへ赴任した当時のワルラスの数学的能力は初等解析幾何のそれを越えるものではなく，ピカールによって与えられた説明でさえ，その数学的含蓄を十分に理解しえたかどうかは疑わしいものといわねばならない。もっともピカールの覚書の余白に施されたワルラスの書込みを考慮にいれると，その経済的含意がただちにワルラスに理解されたことは明ら

注(34) 239, Vol. I, pp. 345–347.

(35) L. Walras, *Théorie mathematique de la richesse sociale*, 1883, pp. 117–118 所収。またこれは *Etudes d'economie sociale*, 1896 の序文 (p. VII) の中にも逐語的にくり返されている。

(36) 211, Vol. I, p. 307.

(37) ワルラスがローザンヌへ移る以前の二つの習作論文 (Vol. I, pp. 216–221), 書簡 171, 194, 198(2), 202, 210 Enclosure などを参照のこと。

かなようである。

そこで以下に，この重要なピカールの覚書をすべて訳出しておくことにしよう。[38]

「2つの商品AとBがあり，そのうち商品Aだけを所有する1人の個人がいるとする。その個人の2つの商品についての欲望曲線が与えられると，それから商品Bに対する需要曲線が導かれる。

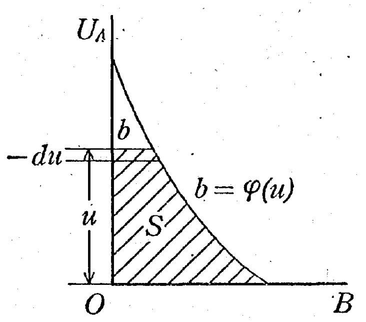

図1

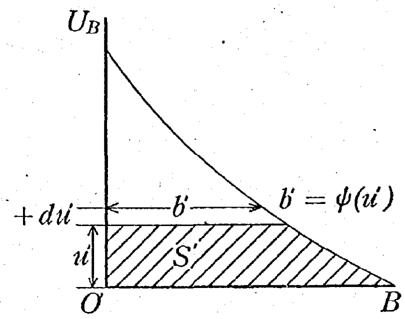

図2

図1はX氏の商品Aについての欲望曲線を示しており，その曲線は $b=\varphi(u)$ とあらわされる。ここで b＝欲望，u＝商品Aの単位数である。

図2は同じX氏の商品Bについての欲望曲線を示しており，その曲線は $b'=\psi(u')$ とあらわされる。ここで b'＝上と同一の測定単位で測られた欲望，u'＝図1の場合と同一の尺度で示された商品Bの単位数である。

われわれは上の2つの曲線についてつぎの性質を認めておく。すなわち，u あるいは u' が増加するとき b は減小する，というのがそれである。この性質は明らかにつねに妥当性をもつものといいうるであろう。

いまX氏は商品Aを一定量 Q_A だけもっており，商品Bはまったく持っていないが，ある価格の下でAとBとを交換することができると仮定しよう。そこでX氏のとる行動を研究してみることにする。

欲望充足についてのあなたの定義からすれば，X氏が商品Aを u 単位だけ持っており，それをすっかり消費しきってしまう場合には，面S（図1）が，彼の持っている商品Aを全部消費することによって満たされる欲望の量をあらわすはずである。ところが，X氏はそのような行動をとらないであろう。なぜなら，一般には彼は自分の所有する商品Aの一部分しか消費せず，残りをBと交換するのが有利だからである。そしてその有利さは，彼がこの交換によってより大きな欲望の量を満足するときに生じてくるのである。

X氏がAの u 単位と，交換をつうじて獲得したBの u' 単位を消費するとすれば，彼は $S+S'$

注(38)　Vol. I, pp. 309-311.

に相当する欲望の量を享受するであろう。そしてX氏は，最大限可能な欲望を享受するために，

面 (S+S′)＝極大

となるように手筈を整えるであろう。

このようにして問題は何の困難もない数学の問題に還元されることになる。

解。X氏は図1および図2に示されたような状況にいるものと考えよう。彼はAのu単位を保有し，交換をつうじて価格P_aの下でBのu'単位を獲得した。

この点に到達したとき，X氏は無限小量――それを du と呼ぼう――を売ることによって交換を継続し，商品Bの一定量 du' を獲得する。それによって彼は欲望満足 bdu を失い，$b'du'$ を得る。そこで，われわれの図に示された場合のように $b'du'>bdu$ であれば，彼は失うものより得るもののほうが多く，したがって $b'du'=bdu$ となる瞬間まで交換を続けるであろう。この瞬間が達せられれば，彼は交換を止める。なぜなら，それを継続すれば交換は不利となり，損失を蒙るからである。つまりそれは曲線の形状が，交換を継続したなら，明らかに $b'du'<bdu$ となってしまうようなものだからである。

したがって，面 S+S′ の極大は

$bdu=b'du'$　あるいは　$\varphi(u)du=\phi(u')du'$

となったときに達せられる。

しかし，交換は価格 P_a の下で行なわれるのであるから，$du=P_adu'$。(39) よって，$\varphi(u)du=\phi(u')\frac{du}{P_a}$ あるいは

$$P_a\varphi(u)=\phi(u') \quad (40) \qquad (1)$$

しかしX氏はかつて交換の当初においては Q_A 以外のなにものも持っていなかったのであるから，同様にして次式をうる。

$$u+P_au'=Q_A \quad (41) \qquad (2)$$

この2つの方程式(1)と(2)は完全に問題を解決するものである。なぜなら，1つの価格 P_a の下で，2つの未知数uおよびu'のあいだに2つの方程式が存在するからである。

しかしながら，われわれはさらに議論を進め，P_a の関数としての A の供給曲線の関数を見出すことができる。(42)

A_0を価格 P_a の下で供給されるAの量としよう。すると，$Q_A-u=A_0$ となる。

注(39)　ワルラスはこの部分にアンダーラインを施し，余白に $du=\frac{1}{P_a}du'$ と書いている。

(40)　ワルラスはこの部分にもアンダーラインを施したうえで，棒線を引いてこれを打ち消し，さらに余白に $\frac{1}{P_a}\varphi(u)=\phi(u')$ と書いている。

(41)　ワルラスは再三これにアンダーラインを施したうえで，棒線を引いてこれを打ち消し，さらに余白に $u+\frac{1}{P_a}u'=Q_A$ と書いている。

(42)　この部分にはまたワルラスのアンダーラインが施されている。

(2)から，$u'=\frac{Q_A-u}{P_a}=\frac{A_0}{P_a}$。そこで(1)の u' をこの値に置き換え，u を Q_A-A_0 で置き換えよう。そうすれば，$P_a\varphi(Q_A-A_0)=\phi\left(\frac{A_0}{P_a}\right)$ をうる。[43]

この方程式が求める曲線の方程式にほかならない。なぜなら，それは変数に関して P_a および A_0 以外は何も含んでいないからである。　　P・ピカール」

以上のピカールによる覚書の末尾に，ワルラスはつぎのように書き加えている。

$\frac{1}{P_a}\cdot\varphi(Q_a-O_a)=\phi(A_0P_a)$　(A)の供給曲線

$P_b\cdot\varphi(Q_a-B_dP_b)=\phi(B_d)$　(B)の需要曲線

さて1873年10月25日付のピカール宛書簡の中で，ワルラスが，精神科学アカデミーでの自分の報告が彼に負うところ大であることを認め，そのことについて感謝の辞を送っていることはすでに述べた。それにつづいてワルラスは，ピカールにつぎのような依頼事項を述べている。すなわちそれは，もし自分の業績がヴォー州自然科学学会（la Société vaudoise des sciences naturelles）会員諸氏の関心を幾分でも引くことができると考えられるなら，よろしく配慮してくれるようにという趣旨のものであり，その目的のために彼は2財の事例について自分の理論のいささか長文の要約を書き送っている。そして効用を極大化する条件については結論的にこう述べている。

「単純容易な微積分計算を適用すれば，その条件は限界効用（raretés）の比が価格に等しいことであることがわかります。それはわたくしがあなたにその問題を呈示するやいなや，あなたご自身が思いつかれ述べられたところのものにほかならないのです。」

しかし，こうしたピカールへの謝辞はやや軽きに過ぎるとともに，ワルラスの主著をはじめとしてこの点に関するピカールの貢献に直接言及する文章はまず皆無と言ってよい。このことが『書簡集』が出るまでは，学史研究者がピカールの演じた甚大な役割にほとんど盲目となってしまった原因であったといえるであろう。

ただワルラスのためにいっておかねばならないのは，ピカールの覚書はもっとも単純な2財の事例に限られており，それを一般の n 財システムに拡張して定式化したのは，まさしくワルラスの貢献であったという点である。限界生産力説の展開途上で明らかにされたように，ワルラスは当時ラグランジュの未定乗数法を理解しえなかったから，求める効用極大化条件の導出を援けたものは，彼の直観的理解以外の何ものでもなかったと思われる。[44]

注(43)　ワルラスはまたこれにアンダーラインを施したうえで，棒線を引いてこれを打ち消し，さらに余白に $\frac{1}{P_a}\varphi(Q_A-A_0)=\phi(A_0P_a)$ と書き改めている。

(44)　ワルラスがこれを導くさいに用いた推論はつぎのようであり，これは1900年5月22日付，H. ロラン宛（前出）の書簡などから明瞭に読みとることができる。U を効用関数，x_1, x_2, ……, x_n を財の消費量とすれば，求める条件は

ところで，一そう厳密にいえば，制約条件付の効用極大化の条件としては，無差別曲面が原点に対して凸であることが満たされていなければならない。ワルラスの採用したような加法的効用関数については，すべての財の限界効用が逓減するという仮定によって，無差別曲面の凸性がかならず保証される。しかし，その逆はかならずしも真ではない点に注意しておこう。ワルラス自身はつねに限界効用の逓減を仮定していたから，もちろん無差別曲面の凸性は約束されていた。しかし，限界効用逓減の仮定が必要でないという点に，ワルラスは最後まで気がつかなかったのである。

Ⅳ

効用理論における積分可能条件の意義は今日すでによく知られたところであり，[45] この問題の正しい解決は1886年，イタリア人の技師G・アントネッリ[46]によって与えられた。[47]

このアントネッリの業績は，ジェヴォンズ『経済学の理論』第3版（1888），フィッシャー『価値および価格理論の数学的研究』（1892），さらにパレート「経済学への 数学の応用」（1902）[48] の各文献

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2=0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_3}dx_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial U}{\partial x}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n=0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} dx_1+P_2dx_2=0 \\ dx_1+P_3dx_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ dx_1+P_ndx_n=0 \end{array}\right.$$

の2組の連立方程式より得ることができる，というのがそれである。

注(45). H. Wold, "A Synthesis of Pure Demand Analysis", *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 26, 1943, 85-118, 220-263; 27, 1944, 69-120; P. A. Samuelson, "The Problem of Integrability in Utility Theory", *Economica*, N.S., 17, 1950, 355-385 などを参照。

(46) Giovanni Batista Antonelli (1858-1944). *Sulla teoria matematica della economia politica:* nella Tipografia del Folchetto Pisa, 1886. *Giornale degli economisti*, Nuova Serie, 10 (May-June 1951) 233-263 に再録。さらに，J. S. Chipman, A. P. Kirman による英訳が J.S. Chipman et al. eds., *Preferences, Utility and Demand* (Harcourt Brace, New York), 1971 に含まれている。Chipman による Part II への序文も有益である。

(47) G. B. Antonelli, "Sulla teoria matematica della economia politica", (in *Giornale degli economisti*), p, 247 *l*. 14. これは P. A. Samuelson, "The Problem of Integrability in Utility Theory' p. 380 の方程式 (4″) とまったく同一物である。

(48) V. Pareto, "Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie", *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit einschluss ihrer Anwendungen*, Band I, Teil II, Heft 7, 1902, 1094-1120. パレートは今日知られるかぎりにおいて，その後一度もアントネッリの業績に触れることがなかった。彼がどの程度にアントネッリの業績を知っていたか，という問いに対してはパレートのパンタレオーニ宛書簡から，いくつかのヒントが得られるであろう。Gabriele de Rosa ed. *Lettere a Maffeo Pantaleoni* (Banca Nazionale del Lavoro; Rome) 1960. 参照。

まず1891年12月14日付のパンタレオーニ宛書簡 (*Lettere*, Vol. I, 39, pp. 119-121) で，パンタレオーニが何冊かの書物を送ってくれたことに謝意を表し，同時にアントネッリの書物に接しえた喜びを記している。1892年1月4日付の書簡 (*Lettere*, Vol. I, 44, pp. 147-150) にもアントネッリへの讃辞が見られるが，それにもかかわらずパレートがアントネッリの業績を十分に吟味したかどうかは疑わしい。なぜなら，パレートは "Anwendung" の筆を執りつつあった1900年8月16日付の書簡(*Lettere*, Vol. II, 460, pp 325-326) でつぎのように記しているからである。

「わたくしは数学百科全書のために数理経済学の理論の大略を用意するように依頼されました。……この要約を作るのにはなんの支障もありませんが，歴史と文献録の部分についてのあなたのご助力がいただきたいのです。あ

録に言及されているが，彼が真に学説史の桧舞台に登場するのはウォルト[49]の紹介によって初めて可能となったように思われる。

さて，ワルラスは積分可能条件に関するアントネッリの業績とその後の進展をどのように受けとめたのであろうか。

ワルラスの『書簡集』にアントネッリの名が初めてあらわれるのは，1887年2月19日付，ラウンハルト[50]からの書簡[51]においてである。この中でラウンハルトはワルラスにアントネッリの住所を尋ねているが，ワルラスは1887年2月26日付[52]でつぎのような返事を書いている。

「大変残念ながら，アントネッリ氏のご住所は分りかねます。と申しますのは，あなたとご同様，わたくしもたしかに同氏の小冊子を一部受けとり，お返しに拙書を一部ピサへお送りしたのですが，彼からはまだ受領の知らせが届かないのです。」

遺憾ながら，ワルラスとアントネッリとのあいだには一通も文通がかわされておらず，上の書簡はおそらくその原因を説明しているものと見ることができるであろう。しかし，アントネッリの論文が，公刊後間もなくワルラスの手許に送られていたことは明らかである。

イタリア人の統計学者ペロッツォ[53]は1884年の末頃からワルラスとの文通を始めているが，1890年2月24日付の書簡[54]でアントネッリの議論を「通俗化」(vulgariser) してワルラスに説明しようとした。しかし，ペロッツォの議論はワルラスにとって一そう読みにくいものであったかもしれない。事実ワルラスは1890年3月18日付のペロッツォ宛の書簡[55]で，つぎのように述べている。

「わたくしはあなたのお手紙を何度も何度も読み返しました。しかし，あなたのお考えを完全に理解するところまではいかなかった，と申さねばなりません。どうみても，わたくしはあなたがなさったような定式化にはよく通じていないのです。」

たしかに積分可能条件の議論に必要な数学的知識の程度は，ワルラス自身のそれをはるかに越え

なたの方がわたくしよりこの仕事についてはよくご存知でしょうし，またわたくしには全然時間がないのです。」
この依頼がパンタレオーニによって受け入れたことは，ローザがこの手紙に注を付しているとおりであるから，"Anwendung" の文献録はパレート自身でなく，パンタレオーニが用意したものであったことが知られる。またパレートがアントネッリの業績を知ってから "Anwendung" に至るまでの彼の論文には，まったくアントネッリは言及されていないし，その影響の跡も見られないのである。J.S. Chipman et al. eds. *Preferences, Utility, and Demand* (Harcourt Brace, N.Y.) 1971, pp. 321—331 をも参照。

注(49) H. Wold, "A Synthesis of Pure Demand Analysis" Part I, p. 115.

(50) Carl Friedrich Wilhelm Launhardt (1832-1918). ドイツの技師でハノーヴァーの Königliche technische Hochschule の教授兼校長であった。工業・鉄道などが主たる関心事であったが，ジェヴォンズ＝ワルラスの線に沿った経済学にもまた興味を寄せた。

(51) Vol. II, 781, pp. 192-193.

(52) 784, Vol. II, p. 197.

(53) Luigi Perozzo (1856-1916).

(54) 962, Vol. II, pp. 394-398.

(55) 969, Vol. II, pp. 403-404.

たものであった。アントネッリやペロッツォの仕事がワルラスの思索にまったく痕跡を残さずに終わったことも無理のないことであったといえるであろう。

それから10年の後,(56) 第I節でも触れたH・ロランが，効用関数の確定性との関連で積分可能性の問題をワルラスに書き送っている。彼は1900年5月13日付，ワルラス宛の書簡(57)の中で，「あなたは効用を測る確定的な尺度があるものとして議論を進めておられますが，事態をつぎのように呈示することによって，この仮定なしに済ますことができないものでしょうか……」と述べ，以下のような議論を展開している。

いま経済にn個の財が存在すると考え，ある消費者の各財に対する需要量をそれぞれ$x_1, x_2, \cdots\cdots,$ x_n, また各財の価格を$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$, 当該の消費者の所得を$m$とする。すると予算の制約条件は，

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots\cdots+p_nx_n=m$$

となるから，これをx_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$について全微分すれば，

$$p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots\cdots+p_ndx_n=0 \tag{1}$$

を得る。そこでともかく効用関数と呼ばれうるものが存在するためには，関係(1)が因子μを乗ぜられたのちに積分可能となるのでなくてはならず，換言すれば

$$dU=\mu(p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots\cdots+p_ndx_n) \tag{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=\mu p_1,\ \frac{\partial U}{\partial x_2}=\mu p_2,\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial U}{\partial x_n}=\mu p_n$$

となるような関数Uが存在するのでなければならない。しかし，もしこのような条件さえ満たされれば，Uは効用関数と呼んでよいものであるし，$\partial U/\partial x_i=\mu p_i$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$は第$i$財についての限界効用と解することができるものである。

さて以上のようなロランの所論は，要するに斉合的な効用関数が存在し，それにもとづいて，ワルラスが定式化したような消費者の極大化行動が行なわれうるためには，方程式(1)が積分可能でありさえすればよいという内容のものと考えられるが，このような彼の所説に対してはつぎのコメントが与えられよう。まず，効用関数が一般には確定的でないことをワルラスに納得させるのであれば，彼は議論をいま一歩進めて，Uの任意の関数$\phi(U)$もまた微分方程式(1)の積分であって，それが$\phi'>0$であるかぎりにおいて，やはり効用関数として役立ちうることを示すべきであったと思わ

注(56) この間にパレートは "Considerazioni sui principii fondamentali dell'economia politica pura", *Giornale degli economisti*, Series 2, Vol. V (August, 1892), p. 415 および Vol. VII (October, 1893), pp. 297 ff. などで（若干の不適切な叙述を含みつつも）積分可能条件の問題を扱っている。ワルラスとパレートのあいだの文通に照らして，ワルラスがこれらの論文に目を通していたことは明らかであるが，積分可能性に関する議論はかわされていない。また彼らの関係は1895年頃以降一途に冷却化してゆく。その間の事情については，前出の松浦保「ワルラスとパレート」を参照。

(57) 1452, Vol. III, pp. 116-117.

(58) 1455, Vol. III, p. 121.

れる。つぎにロランは積分因子μが経済学的にはいかなる意味をもちうるかという点について疑問を表白し，同年5月24日付のワルラス宛書簡[58]においても13日付書簡の意図を繰り返し説明したのち，重ねてその旨を述懐している。つまり(1)が積分可能であるためには，価格と需要量とのあいだの関係がある種の条件[59]に従わねばならないが，その解釈をめぐっては，将来まだこれを考えつづけねばならないであろうと，述べているのである。してみれば，ロラン自身も積分可能条件が具体的にどのような意味をもちうるかについて，まだ明らかではなかったのであろうと考えることができる。

ところで，このようにロランが提示した問題に対するワルラス自身の考え方は，同月22日[60]および29日付[61]のロラン宛書簡の中に述べられている。それによれば，まず積分因子μの意味についてはつぎのようである。いま第1財を価値尺度財とすると，効用極大化の条件から

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{1}=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{p_2}=\cdots\cdots=\frac{\frac{\partial U}{\partial x_n}}{p_n}$$

となるから，この共通比をμに等しいと置けば，

$$\mu=\frac{\partial U}{\partial x_1},\ \mu p_2=\frac{\partial U}{\partial x_2},\ \cdots\cdots,\ \mu p_n=\frac{\partial U}{\partial x_n}$$

となり，したがってこのμは価値尺度財の限界効用をあらわしていることになる。そして微分方程式(1)が積分可能である場合は，

$$\begin{aligned}&\mu(dx_1+p_2dx_2+\cdots\cdots+p_ndx_n)\\&=\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdots+\frac{\partial U}{\partial x_n}dx_n\\&=dU\\&=0\end{aligned}$$

となるから，このことからロランの尋ねた積分因子μは，実は価値尺度財の限界効用にほかならない，というのである。

明らかにワルラスは積分可能条件が真に意味するところを正確には理解しえていないし，また彼自身が用いた加法的効用関数がかならず積分可能になることも示しえていないが，しかし効用極大化定理が意味をもちうるためには，ロランが提示した条件が満たされていなければならないことを当然のこととして受け入れ，同時に積分因子のもつ経済的意味をとっさに会得しえた彼の力倆は十分に評価されてしかるべきところであろう。

効用の非可測性の問題と積分可能条件との関連をワルラスに対して一そう明確に指摘したのは，

注(59)　この条件の数学的定式化（つまりアントネッリの条件）は，ロランの書簡には記されていない。
(60)　1454, Vol. III, pp. 118-120.
(61)　1456, Vol. III, pp. 122-123.

ローザンヌでパレートのあとを継いだP・ボニンセーニ[(62)]であろう。彼は1908年9月14日付のワルラス宛の書簡[(63)]で，「静学的均衡点について，われわれは限界効用の比を計算することはできるが，限界効用そのものを計算することはできない」旨を述べ，つぎのようにその根拠を明らかにしている。すなわち微分方程式(1)について積分可能条件が満たされ，効用関数 U が存在する場合には，U の任意の関数 $\phi(U)$ も当然上の微分方程式を満足する解である。したがって，需要法則を演繹するために効用関数として機能しうる関数は，一般に何ら確定的であることを要しない。

これは一つの明快な指摘であるが，ただ先に述べたロランの場合と同様，ボニンセーニはこの書簡の中で関数 ϕ が U の単調な増加関数でなければならないという条件については明記するところがなかった。もちろんこの事実は，彼がこの条件の必要性を理解していなかった証拠にはならないが，ともかくワルラスにとって，ボニンセーニの上記の議論は別に目新しいものではなかったであろう。というのはロランの書簡やこの問題を含むパレートの業績がすでにワルラスの目に触れていたはずだからである[(64)]。しかし，パレートとのあいだには，この問題について何の立ち入った議論もかわされていないことは，すでに述べたとおりである[(65)(66)]。

結　語

以上われわれは，ワルラスの主著『純粋経済学要論』の効用理論にかかわる部分がどのような形で彼と同時代の人々から影響を受け，またワルラス自身の思想がいかに成長を遂げてきたかを，資料に即して眺めてきた。もちろん，ワルラスが需要関数の概念についてはクールノーに範を負い，また効用の概念については父ワルラスの遺産を相続したことは記憶しておかねばならないが，一そう建設的かつ有効にその思想の発展を助けたのが，数学者ピカールやポアンカレらであった事実が明らかになったのは興味深い。

なお本稿で意識的に除外した重要な問題には，厚生経済学史との関連でワルラスの効用理論を眺めてみるというプログラムがある。これは大きな課題であって，それだけで独立の論文を書くこと

注(62) Pasquale Boninsegni (1868-1939).

(63) 1706, Vol. III, pp. 375-376.

(64) V. Pareto, "Considerazioni" (注55参照)，および *Manuale di economia politica* (Piccola Bibliotaca Scientifica, Milan), 1906, pp. 499 ff. ただし，ワルラスは『提要』のイタリア語版は見ていなかった可能性がある。Vol. III, p. 389 書簡 1722 への注(9)を見よ。すでにこの頃にはワルラスとパレートの関係はきわめて冷やかなものであった。

(65) 注(55)を見よ。

(66) ところでボニンセーニの議論でもう一つ注記しておきたい点は，彼が各財の限界効用が当該財の需要量のみの関数で，他の財の需要量からは独立な場合に検討を加えている点である。今日よく知られているように，効用関数が加法的な形態をとっている場合には，効用関数 U の変換は $\varphi=aU+b$, $a>0$ の形の1次変換に限定されるが，ボニンセーニにおいては，まさに積分定数 b が落とされて $\varphi=aU$ となった形のものが記されている。これは積分定数があくまで任意であるという意味で，かりに $b=0$ としたまでのことなのか，それとも彼の脳裏に何か論理的必然性があって積分定数を0としたのか，筆者たちには明らかでない。

を要しよう。さらに，ワルラスの一般均衡システムを形づくる生産理論，資本理論，貨幣理論，そしてまた模索の理論などについても本稿におけるような理論史的検討が行なわれる必要があるであろう。そうした基礎的な研究の中からは，19世紀後半より今世紀初頭にかけての意外に大きな知性史・社会史の立体像と，その中で生きたワルラスの人間像とが浮びあがってくるであろう。

〔追　記〕本稿は，副題にも示したように，ワルラスの主著公刊百年を記念する目的で1973年から用意され，1974年盛夏に脱稿したものである。今日までその発表が遅れたのは，ひとえに共著者のうち年長者のほうの責任である。

福岡正夫（経済学部教授）
丸山　徹（カリフォルニア大学数学科）