慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	可測多価写像の性質 - C
Sub Title	The property-C of measurable correspondences
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.2/3 (1976. 3) ,p.105(47)- 120(62)
JaLC DOI	10.14991/001.19760301-0047
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19760301-0047

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

可測多価写像の性質-C

丸　山　　徹

序

多価写像，とりわけコンパクト値多価写像の積分論が，この10年ほどの間に理論経済学あるいは制御工学の進展に果してきた役割の重要さはあらためて論ずるまでもなかろう(1)。こうしたさまざまな問題を解決するために，通常の Lebesgue 積分論を多価写像のケースに一般化する試みが数学研究者と各応用分野に携る人々との協力の下に進展しつつあるのである。

多価写像の積分論を展開するためには，まずそのような写像の「可測性」が適当な仕方で定義されねばならない。

通常の実函数論において，可測函数と連続函数の関係を示すものとして重要な Lusin の定理はよく知られている。すなわち，

〈Lusin の定理〉 Lebesgue 測度 m を与えられた，有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義される函数 $f(x)$ が可測であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$m\{x \in [a, b] / f(x) \neq g(x)\} \leq \varepsilon$$

を満たす $[a, b]$ 上の連続函数 $g(x)$ が存在することである。

これを Lusin は可測函数の「性質-C」と呼んだのであるが，本稿の目的は，この定理を多価写像の場合に拡張し(2)，その有益な応用例をいくつか示すことにある。

注(1) たとえば経済理論の分野で言えば，次のような問題が最も典型的な応用例である。経済主体の集合がある有限集合の場合には，経済の需要函数を求めるためには，各与件に対応する個別需要函数の値のベクトル和をとれば足りる。しかし経済主体の集合をひとつの測度空間とみなす場合には，経済の需要函数は，各与件に対応する，一般に多価の個別需要函数の値を，経済主体の測度空間上で積分するという操作を通じて求められるのである。先駆的な業績として Aumann〔1〕があり，最近この方面の議論を最も体系的に扱った書物として，Hildenbrand〔8〕が出版されている。

(2) Lusin の定理を多価写像のケースに一般化する試みは，かつて Pliś〔17〕によって行なわれたが，ここでの証明は Pliś とは独立の方法で遂行される。つまり Egorov の定理を一般化し，それを経由して目的を果そうとするもので，一層証明のアイデアが「透明」になっているはずである。

I

本節では基本的に重要な Lusin の定理の一般化について述べるが，まず議論の出発点として，かなり一般的な枠組の中で，多価写像の可測性を定義することから始めたい。

(X, A, μ) はひとつの測度空間（A は X 上の σ-field，μ はその上で定義された測度），(Y, ρ) をひとつの距離空間とする。また以下の議論において X に定まる位相が問題となるときは，それはつねに局所コンパクトかつ T_2 を満たすものと仮定する。Y の非空コンパクト部分集合族を $K(Y)$ とすれば，X から Y へのコンパクト値多価写像 φ は，X から $K(Y)$ の中への（一価）写像 $\varphi: X \to K(Y)$ と考えてもよい。周知のように，空間 $K(Y)$ 上に Hausdorff の距離 h を定義することができ，$(K(Y), h)$ はまたひとつの距離空間となる[(3)]。そこで便宜上，次のような記号を約束しておこう。

E: $K(Y)$ の（Hausdorff の距離に関しての）開集合によって生成される σ-field.

S: Y の Borel σ-field[(4)].

$B(\cdot)$: 集合族・によって生成される σ-field.

$\varphi^S(A)=\{x \in X/\varphi(x) \subset A\}$, $A \subset Y$（φ の強い逆像）

$\varphi^W(A)=\{x \in X/\varphi(x) \cap A \neq \phi\}$, $A \subset Y$（φ の弱い逆像）

$G(\varphi)=\{(x, y)/x \in X, y \in \varphi(x)\}$（$\varphi$ のグラフ）

X から Y へのコンパクト値多価写像 $\varphi: X \to K(Y)$ の可測性を，まず最も自然な仕方で次のように定義する。

定義　$\varphi: X \to K(Y)$ について，

$$(\forall E \in E)\, \varphi^{-1}(E) \in A$$

が成り立つとき，φ は（A に関して）可測であるという。

ある条件の下に，これと同値な可測性の公準を与える次の命題は著しく有効である。

命題 1　(Debreu)[(5)] (X, A, μ) を完備測度空間，(Y, ρ) を可分な距離空間とすれば，次の3条件は互いに同値である。

（i）　$\varphi: X \to K(Y)$ は可測。

（ii）　X 上で殆どいたるところ φ に収束する単純写像列[(6)] $\{\varphi_n\}$; $\varphi_n: X \to K(Y)$ が存在する。

注(3)　(Y, ρ) と $(K(Y), h)$ との関係については，とりわけ Michael〔15〕§4 を参照。

(4)　Borel σ-field については，Dunford-Schwartz〔4〕p. 137. および Halmos〔5〕Chepter X.

(5)　Debreu〔3〕p. 359.

(6)　φ_n: $X \to K(Y)$ が単純写像であるというのは，X の有限分割 $\{X_i\}_{i=1}^m$, $X_i \in A$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ が存在して，各 X_i 上では φ_n が $K(Y)$ の一定値をとることである。

(iii) X 上で φ に測度収束する単純写像列 $\{\varphi_n\}$; $\varphi_n:X\to K(Y)$ が存在する。

さらに，(Y, ρ) が距離空間として完備であることをも仮定すれば，次の命題が成り立つ。

命題 2 (Debreu)(7) (X, A, μ) を完備測度空間，(Y, ρ) を完備可分な距離空間とすれば，次の3条件は互いに同値である。

(i) $\varphi:X\to K(Y)$ は可測。

(ii) $(\forall S\in S)\ \varphi^S(S)\in A,\ \varphi^W(S)\in A.$

(iii) $G(\varphi)\in B(A\times S).$

以上の準備の下に，われわれの当面の関心事である問題へ議論をすすめることにしよう。まず，実函数論で Egorov の定理として知られている著名な事実を多価写像の場合に一般化する。

定理 1 (X, A, μ) を任意の有限測度空間，(Y, ρ) を距離空間とする。X 上のコンパクト値多価写像列 $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n:X\to K(Y)$ が殆どいたるところ可測写像 $\varphi:X\to K(Y)$ に収束するものとすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対応して，次の条件を満たす X の可測部分集合 $E\in A$ が存在する。

(i) $\mu(X-E)<\varepsilon$,

(ii) $\varphi_n\to\varphi$ uniformly on E.

証明) $A=\{x\in X/\varphi_n(x)\not\to\varphi(x)\}$

と定義すれば，条件: $\varphi_n\to\varphi$ a.e. から，$\mu(A)=0$. さらに

$$E_{k,m}=\{x\in X-A/h(\varphi_n(x),\ \varphi(x))<\frac{1}{m}\ \text{for}\ n\geq k\}$$

(ここで k, m, n は正の整数)

とすれば，この集合は以下のような推論をつうじて可測であることが知られる。

いま $X-A$ から直積空間 $K(Y)\times K(Y)$ の中への写像 $\phi_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$ を次のように定義する。

$$\phi_n:x\longmapsto(\varphi_n(x),\ \varphi(x))\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

他方，Hausdorff の距離函数 h は勿論，$K(Y)\times K(Y)$ 上で定義された非負連続函数である。すると，

$$E_{k,m}=\bigcap_{n=k}^{\infty}\left\{x\in X-A/h(\varphi_n(x),\ \varphi(x))<\frac{1}{m}\right\}$$
$$=\bigcap_{n=k}^{\infty}\phi_n^{-1}\left\{h^{-1}\left([0,\ \frac{1}{m})\right)\right\}.$$

h の連続性から，$h^{-1}\left([0,\frac{1}{m})\right)$ は $K(Y)\times K(Y)$ の開集合であり，これを

注(7) Debreu [3] §4. ただし，(i)$\Longleftrightarrow$(ii) の証明には (X, A, μ) の完備性，(Y, ρ) の完備性は不要で，(Y, ρ) の可分性さえ仮定すればよい。

$$h^{-1}\left([0, \frac{1}{m})\right) = U \times V$$

と書けば，$K(Y) \times K(Y)$ から各 $K(Y)$ への射影は開写像である[8]ことから，U, V はそれぞれ $K(Y)$ の開集合である。

$$E_{k, m} = \bigcap_{n=k}^{\infty} \varphi_n^{-1}(U \times V) = \bigcap_{n=k}^{\infty} \{\varphi_n^{-1}(U) \cap \varphi^{-1}(V)\} - A$$

であり，φ と φ_n $(n=k, k+1, \cdots\cdots)$ は可測であるから，明らかに $E_{k, m}$ は可測である。

次に，

$$E_{k, m} \subset E_{k+1, m}$$

で，しかも

$$\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x) \text{ on } X-A$$

であることから，

$$\lim_{k \to \infty} E_{k, m} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k, m} \supset X-A \text{ for all } m.$$

ゆえに，任意の $\varepsilon > 0$，各 m に対して，

$$\mu(X - E_{k_m, m}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

を満たす正整数 k_m が存在する。いま，

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{k_m, m}$$

とおくならば，

$$\mu(X-E) < \varepsilon.$$

一方，任意の m，任意の $x \in E$ に対して，

$$h(\varphi_k(x), \varphi(x)) < \frac{1}{m} \quad \text{for } k \geqq k_m$$

である。すなわち $\{\varphi_n\}$ は E 上で φ に一様収束する。（証了）[9]

定理 2 (X, A, μ) を正則な有限測度空間 $(X, B(X), \mu)$ の完備化[10]，(Y, ρ) を可分な距離空間とするとき，コンパクト値多価写像，$\varphi: X \to K(Y)$ が可測となるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の条件を満たす X のコンパクト部分集合 K が存在することである。

（i） $\mu(X-K) < \varepsilon$,

（ii） $\varphi|K$ (φ の K への制限) は連続。

注（8） たとえば Kelley〔9〕pp. 90-91.

（9） 定理1において，われわれは便宜上極限写像 φ の可測性を仮定したが，(X, A, μ) が完備・有限測度空間，(Y, ρ) が完備可分な距離空間であるならば，この仮定は不要である。なぜなら，このときは可測写像列 $\{\varphi_n\}$ の概収束極限写像 φ (i. e. $\varphi_n \to \varphi$ a. e.) もまた可測となることが証明できるからである。これには実数値函数の場合とちがって少々こみいった議論を要するが，Lang〔14〕p. 235 M. 12 と全く同様の方針で証明すればよい。

（10） 局所コンパクト，T_2 の位相空間上における測度論に関しては，たとえば Halmos〔5〕Chapter X を参照。

証明) 〈必要性〉 まず φ が可測であることを仮定する。(X, A, μ) が完備測度空間であり，(Y, ρ) が可分な距離空間であるから，命題1によって，

$$\varphi_n \to \varphi \text{ a.e.}$$

を満たす単純写像列 $\{\varphi_n\}$ が存在する。μ が正則測度であることと，定理1とより，任意の $\varepsilon>0$ に対して次の条件を満たすコンパクト集合 $K_0 \subset X$ が存在する。

(1) $\mu(X-K_0)<\frac{\varepsilon}{2}$,

(2) $\varphi_n \to \varphi$ uniformly on K_0.

再び μ の正則性から，各 φ_n について，任意の $\varepsilon>0$ に対応するコンパクト集合 $K_n \subset X$ が存在して，

(3) $\mu(X-K_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

(4) $\varphi_n|K_n$ は連続。$(n=1, 2, \cdots\cdots)$

そこで集合 K を

(5) $K=\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$

と定義すれば，(4)(5)から各 φ_n は K 上で連続であり，また(2)(5)から $\{\varphi_n\}$ は K 上で一様に φ に収束する。従って φ は K 上で連続。他方，(1)(3)によって，$\mu(X-K)<\varepsilon$ は明らかである。

〈十分性〉 逆に，φ が性質-C を有するものと仮定する。$\{\varepsilon_n\}$ が0に収束する正数列とすれば，定義により，各 n に対して

$$\mu(X-K_n)<\varepsilon_n$$

$$\varphi|K_n \text{ は連続}$$

となるようなコンパクト集合 $K_n \subset X$ が存在する。ここで一般性を失うことなく，$K_n \subset K_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ としてよいであろう。すると，

$$\mu(X-\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)=0.$$

φ は各 K_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ 上で連続であるから，F を Y の閉集合とすれば，よく知られた連続多価写像の性質から，

$$\{x \in X / \varphi(x) \subset F\}=\varphi^s(F)$$

は閉集合であり，従って可測（なぜなら，A はすべての Borel 集合を含んでいるから）。ゆえに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in K_n / \varphi(x) \subset F\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(K_n \cap \varphi^s(F))$$

は可測である。明らかに

$$\varphi^s(F)-\bigcup_{n=1}^{\infty}(K_n \cap \varphi^s(F))$$

は測度0の集合 $X-\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ の部分集合であり，(X, A, μ) の完備性から可測である。ゆえに，$\varphi^s(F)$ も可測，命題2と注(7)とから，φ は可測である。 (証了)

注意　Pliś の論文では，この必要条件のみが constructive な方法で証明されている。また，そこでは Y のコンパクト性が仮定されているが，上の議論から，その仮定は不要であることが明らかとなったわけである。

定義　写像 $\varphi: X \to K(Y)$ に対して，定理2の(ⅰ)(ⅱ)を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ が存在するとき，φ は性質-C を有するという。

Ⅱ

前節の定理2では，(X, A, μ) が正則な有限 Borel 測度空間の完備化であり，(Y, ρ) が可分な距離空間であるとき，可測写像 $\varphi: X \to K(Y)$ は性質-C で特徴づけられることを示した。本節では (X, A, μ) は正則な有限 **Borel** 測度空間（必ずしも完備でなくともよい），(Y, ρ) がコンパクト，可分な距離空間であることを常に仮定する。このとき（あらかじめ可測であるかどうか知られていない）写像 $\varphi: X \to K(Y)$ が性質-C を有するための，ひとつの必要十分条件を述べる。[11] また以下，簡単化のために X に定まる位相は常に第1可算公理を満たすことを仮定し（このことは議論の本質にはかかわりがない），$K(Y)$ には勿論 Hausdorff の距離 h による位相が定義されているものとする。

命題3　$K(Y)$ は Weierstrass-property を有する。

証明）Y はコンパクトであるから，$K(Y)$ もコンパクトな距離空間であり，[12] 従って $K(Y)$ は Weierstrass-property を有する。（証了）

定義　$K(Y)$ 上で定義された実数値函数列 $\{w_i: K(Y) \to R\}$ は次の条件を満たすとき，正規列 (normal sequence) であるという。

(α)　$w_i(K) = w_i(L) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots) \Rightarrow K = L$

　　ここで，$K, L \in K(Y)$.

(β)　$K_n \to K \Rightarrow w_i(K_n) \to w_i(K) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$

　　ここで，$K_n, K \in K(Y)$.

Y が可分であれば，実際次の例が示すように，必ず $K(Y)$ 上で定義される正規列が存在する。

例　$\{y_i\}$ を Y の可算稠密集合とする。そこで $w_i: K(Y) \to R$ を，$(K \in K(Y))$

$$w_i(K) = \inf_{x \in K} \rho(y_i, x); \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$

と定義すれば，これは明らかに正規列をなす。（証明は容易）

注(11)　この問題は Kowalski〔11〕によって研究され，本稿もこの論文に多くを負うているが，われわれの議論は一層一般的な枠組の中で遂行されるであろう。また，筆者のみるところでは，Kowalski の論文は数箇所小さなスリップを含むように思われる。

(12)　Michael〔15〕p. 164, 4.9.12.

レンマ 1 $\{w_i: K(Y)\to R\}$ が正規列をなすならば，$K(Y)$ のすべての集合列 $\{K_n\}$ について，

$$(\gamma)\quad w_i(K_n)\to w_i(K)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)\quad \Longleftrightarrow K_n\to K$$

が成り立つ。

証明） $\Leftarrow$: (β) によって満たされている。

$\Rightarrow$: 逆に $w_i(K_n)\to w_i(K)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で，しかも $K_n\not\to K$ であると仮定する。命題3によって $K(Y)$ は Weierstrass-property を有するのであるから，$\{K_n\}$ の適当な部分列 $\{K_{m_n}\}$ について，

$$\exists L\in K(Y)\ \text{such that}\ K_{m_n}\to L,\ L\neq K.$$ (13)

(β) によって，

$$w_i(K_{m_n})\to w_i(L)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

しかし一方，仮定によって

$$w_i(K_n)\to w_i(K)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

であるから，

$$w_i(K_{m_n})\to w_i(K)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

とならねばならず，よって (α) から，$K=L$. 矛盾。 （証了）

レンマ 2 $\{w_i: K(Y)\to R\}$ を正規列とする。このとき $\varphi: X\to K(Y)$ が集合 $C\subset X$ の上で連続となるための必要十分条件は，$w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が C 上で連続となることである。

証明） まず X が第1可算公理を満たすことに注意しておく。$\{x_n\}$ を $x_n\to x_0\in C$ $(x_n\neq x_0)$ なる C の点列とし，$K_n=\varphi(x_n)$, $K=\varphi(x_0)$ とおけば，レンマ1によって

$$w_i(K_n)\to w_i(K)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)\quad \Longleftrightarrow K_n\to K.$$ （証了）

定理 3 $\{w_i: K(Y)\to R\}$ を正規列とする。このとき，$\varphi: X\to K(Y)$ が性質-C をもつための必要十分条件は $w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が可測であることである。

証明） 〈必要性〉 φ が性質-C をもつと仮定する。定義によって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\mu(X-K)<\varepsilon$ となるコンパクト集合 $K\subset X$ が存在し，$\varphi|K$ は連続となる。レンマ2により，$w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は K 上で連続。ε は任意であることと，正則有限測度空間上の実数値函数に関する通常の Lusin の定理[14]とから，$w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は可測である。

注(13) $K_n\not\to K$ であるから，K の十分小さな近傍をとれば，その近傍に属する $\{K_n\}$ の点は有限個である。それを $\{K_n\}$ から取り除いた点列の収束部分列を抽出すれば，その極限は明らかに K と異なる。

(14) たとえば Halmos [5] pp. 242—243 を見よ。

〈十分性〉 逆に $w_i(\varphi)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ が可測であると仮定しよう。いま任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon$$

を満たすように正数列 $\{\varepsilon_i\}$ を選ぶ。$w_i(\varphi)$ は可測であるから，再び通常の Lusin の定理から，X のコンパクト集合列 $\{K_i\}$ が存在して，

$$\mu(X-K_i)<\varepsilon_i \quad (i=1, 2, \cdots\cdots),$$

$$w_i(\varphi)|K_i \text{ は連続 } (i=1, 2, \cdots\cdots).$$

そこで

$$K=\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$$

とおけば K は X のコンパクト集合で

$$\mu(X-K)<\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon$$

$$w_i(\varphi)|K \text{ は連続 } (i=1, 2, \cdots\cdots).$$

これとレンマ2とから，$\varphi|K$ は連続である。よって φ は性質-C を有する。（証了）

つづいて定理3の，主として Kowalski〔12〕によって研究された応用例を示す。

定義 正規列 $\{w_i: \boldsymbol{K}(Y)\to\boldsymbol{R}\}$ が，

$$K\subset L\Rightarrow w_i(K)\leqq w_i(L) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$
$$K, L\in \boldsymbol{K}(Y)$$

を満たすとき，これを**逓増型** (increasing type) であるといい，逆に

$$K\subset L\Rightarrow w_i(K)\geqq w_i(L) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$
$$K, L\in \boldsymbol{K}(Y)$$

を満たすときは，**逓減型** (decreasing type) であるという。

応用1 $\varphi: X\to\boldsymbol{K}(Y)$ は X の各点で upper hemi-continuous (u. h. c.) であり，正規列 $\{w_i: \boldsymbol{K}(Y)\to\boldsymbol{R}\}$ は逓増型（逓減型）であるとする。このとき $w_i(\varphi)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ は上半連続（下半連続）であり，φ は性質-C を有する。

証明） $\{w_i: \boldsymbol{K}(Y)\to\boldsymbol{R}\}$ は逓増型であると仮定する[(15)]。φ が性質-C をもつことを証明するためには，定理3によって，$w_i(\varphi)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ が可測であることを示せばよく，そのためにはまた，$w_i(\varphi)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ が上半連続であることを示せば十分である。

いま $\varepsilon_k\to0$ を満たす正数列 $\{\varepsilon_k\}$ をとり，$x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0;\ x_n, x_0\in X)$ なる点列 $\{x_n\}$ を考えると，

注(15) $\{w_i: \boldsymbol{K}(Y)\to\boldsymbol{R}\}$ が逓減型の場合は，$\{-w_i: \boldsymbol{K}(Y)\to\boldsymbol{R}\}$ が逓増型になるので，これに以下の議論を適用すればよいのである。

φ が u. h. c であることから，各 ε_k について，十分に大きな n をとれば，

$$\varphi(x_n)\subset B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k).^{(16)}$$

$\{w_i\}$ は逓増型であるから十分に大きな n について，

$$w_i(\varphi(x_n))\leqq w_i(\overline{B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)})^{(17)}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

ゆえに，

$$\limsup_{n\to\infty} w_i(\varphi(x_n))\leqq w_i(\overline{B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)})\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

である。$k\to\infty$ とすれば，

$$\overline{B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)}\to\varphi(x_0)$$

であるから，

$$\limsup_{n\to\infty} w_i(\varphi(x_n))\leqq w_i(\varphi(x_0))\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

従って，$w_i(\varphi)$ は上半連続である。(証了)

応用 2　φ: $X\to K(Y)$ は X の各点で lower hemi-continuous (l. h. c.) であり，正規列 $\{w_i$: $K(Y)\to R\}$ は逓増型 (逓減型) であるとする。このとき $w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は下半連続 (上半連続) であり，φ は性質-C を有する。

証明)　前定理の証明と同様にして，$\{w_i\}$ は逓増型であるとして，$w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の下半連続性を示せばよい。

いま $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0;\ x_n,\ x_0\in X)$ なる点列 $\{x_n\}$ を考え，$K_n=\varphi(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく。$\{K_n\}$ の適当な部分列 $\{K_{m_n}\}$ をとれば，

$$\liminf_{n\to\infty} w_i(K_n)=\lim_{n\to\infty} w_i(K_{m_n})\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

とすることができる。また $K(Y)$ が Weierstrass-property をもつことから (命題3)，$\{K_{m_n}\}$ の部分列 $\{K_{k_n}\}$ を適当にとることによって，

$$K_{k_n}\to K\in K(Y)$$

とすることができる。φ は l. h. c. であるから，

$$\varphi(x_0)\subset K.$$

よって $\{w_i\}$ の逓増性から，

$$w_i(\varphi(x_0))\leqq w_i(K)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

一方，

$$\lim_{n\to\infty} w_i(K_{m_n})=\lim_{n\to\infty} w_i(K_{k_n})=w_i(K)$$

注(16)　ここで $B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)$ は $\varphi(x_0)$ を中心とする半径 ε_k の開球である。
(17)　$\overline{B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)}$ は開球 $B(\varphi(x_0),\ \varepsilon_k)$ の閉包を示す。

であるから，結局

$$\liminf_{n\to\infty} w_i(K_n)=\liminf_{n\to\infty} w_i(\varphi(x_n))\geq w_i(\varphi(x_0)) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を得て，$w_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の下半連続性が示された。（証了）

III

本節では，可測多価写像の性質-C を利用して次のような Hermes〔7〕の問題を考える。すなわち，Lebesgue 測度 m の定義された有界閉区間 $[0,\ T]$, $T<\infty$ を定義域とし，$(R^n,\ \|\cdot\|)$——ここで $\|\cdot\|$ は usual topology を定めるノルム——のコンパクト部分集合 Y の非空コンパクト部分集合族 $K(Y)$ を値域とする可測多価写像 φ: $[0,\ T]\to K(Y)$ に対して，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,\,t+\theta]}\varphi(x)\,dm$$

はどのように評価されるであろうか。[18]

定義　E を $[0,\ T]$ の可測部分集合とするとき，点 $t\in E$ が

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2\theta}m([t-\theta,\ t+\theta]\cap E)=1$$

を満たすならば，t は E の**稠密点** (point of density) であるという。[19]

稠密点に関しては次の事実がよく知られており，以下においても利用される。

命題 4　$[0,\ T]$ の可測部分集合 E の殆どすべての点はその稠密点である。[20]

定義　φ: $[0,\ T]\to K(Y)$ は次の条件を満たす $[0,\ T]$ の可測部分集合 E が存在するとき，点 $t\in[0,\ T]$ で**近似連続** (approximately continuous) であるという。

（i）　t は E の稠密点である。

（ii）　$\varphi|E$ は連続。

レンマ 3　φ: $[0,\ T]\to K(Y)$ が可測であれば，φ は $[0,\ T]$ 上殆どすべての点で近似連続である。

証明）　任意の $\varepsilon>0$ を与えたとき，定理2によって，次の条件を満足する $[0,\ T]$ のコンパクト

注(18)　この問題は多価微分方程式の研究に際しても有効に利用される。これについては筆者自身もやがてある種の経済理論との関連において詳細に検討する機会をもつはずである。

(19)　たとえば E を $[0,\ T]$ の区間とすれば，その内点はすべて E の稠密点であるが，その端点は明らかに稠密点ではない。

(20)　Natanson〔16〕p. 261, Theorem 1 参照。

部分集合 K が存在する。

(イ) $m([0, T]-K)<\varepsilon$.

(ロ) $\varphi|K$ は連続。

いま M を K の稠密点の集合とすれば，命題4から，

$$m(M)=m(K)>T-\varepsilon.$$

いま $t\in M$ であれば，勿論 φ は t で近似連続である。従って，φ が近似連続となるすべての点の集合を $N\subset[0, T]$ とすれば，$M\subset N$ となり，[21]

$$m_*(N)\geqq T-\varepsilon$$

が成り立つ。ε は任意であるから，

$$m_*(N)\geqq T.$$

しかし，$N\subset[0, T]$ であることから，勿論，

$$m^*(N)\leqq T.$$

ゆえに，

$$m^*(N)\leqq T\leqq m_*(N).$$

すなわち N は Lebesgue 可測で $m(N)=T$.　(証了)

レンマ 4　0を中心とし，半径 r の閉球を B_r と書く。写像 φ: $[0, T]\to K(B_r)$ が可測ならば，殆どすべての $t\in[0, T]$ について，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm\subset \mathrm{co}\,\varphi(t).$$ [22]

証明）点 t で φ が近似連続であるとすれば，定義によって，t は E の稠密点であり，しかも $\varphi|E$ が連続となるような $[0, T]$ の可測集合 E が存在する。$\varphi|E$ が連続であるから，任意の $\varepsilon>0$ について，適当な $\delta>0$ をとると，

$$(6)\quad (\forall x\in[t-\delta,\ t+\delta]\cap E)\quad h(\varphi(x),\ \varphi(t))<\frac{\varepsilon}{2}$$

とすることができる。また t は E の稠密点ゆえ，適当な $\theta_0>0$ をとって

$$(7)\quad 0<|\theta|<\theta_0\Rightarrow\frac{1}{|\theta|}m([t,\ t+\theta]\cap E^c)<\frac{\varepsilon}{4r}$$

とすることができ，一般性を失うことなく，$\theta_0<\delta$ としてよい。

次に φ は可測であるから可測選択函数 (measurable selection) を有し，そのひとつを f とする。[23] $x=$

注(21) $m^*(\cdot)$ は Lebesgue の外測度，$m_*(\cdot)$ は Lebesgue の内測度。

(22) $\mathrm{co}\,\varphi(t)$ は集合 $\varphi(t)$ の凸包を示す。

(23) φ が可測選択函数を有することについては，Hildebrand〔8〕pp. 54-58, Theorem 1 を見よ。

$\theta u+t$ によって積分変数を u に変換すると,

$$\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}f(x)\,dm=\int_{[0,1]}f(\theta u+t)\,dm.$$

明らかに

(8) $m\{u\in[0,\ 1]/\theta u+t\in[t,\ t+\theta]\cap E\}=\left(\frac{1}{|\theta|}\right)m([t,\ t+\theta]\cap E).$

従って,(6)(7)(8)から,$0<|\theta|<\theta_0$ なる θ に対して

$$f(\theta u+t)\in B\left(\varphi(t),\ \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

が,測度 $\varepsilon/4r$ より小なる集合を除いたすべての $u\in[0,\ 1]$ で成立する。

そこで次のように可測函数 g を定義しよう。

$$g(\theta u+t)\begin{cases}=f(\theta u+t) & \text{on } \left\{u\in[0,\ 1]/f(\theta u+t)\in B\left(\varphi(t),\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}\\ \in\varphi(t) & \text{otherwise.}\end{cases}$$

すると,

$$g(\theta u+t)\in B\left(\varphi(t),\ \frac{\varepsilon}{2}\right)\quad\text{for all } u\in[0,\ 1].$$

ゆえに,Lebesgue 測度が atomless であることを考慮して,[24]

(9) $\int_{[0,1]}g(\theta u+t)\,dm\in\mathrm{co}\,B\left(\varphi(t),\ \frac{\varepsilon}{2}\right)=B\left(\mathrm{co}\,\varphi(t),\ \frac{\varepsilon}{2}\right).$

g の構成から,

$$||f(\theta u+t)-g(\theta u+t)||\leqq 2r.$$

また

$$m\{x\in[0,\ T]/f(x)\neq g(x)\}<\frac{\varepsilon}{4r}$$

であるから,

(10) $||\int_{[0,1]}f(\theta u+t)\,dm-\int_{[0,1]}g(\theta u+t)\,dm||<\frac{\varepsilon}{2}.$

従って,φ の任意の可測選択函数 f と $0<|\theta|<\theta_0$ を満たす θ について,(9)(10)から

$$\int_{[0,1]}f(\theta u+t)\,dm=\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}f(x)\,dm\in B(\mathrm{co}\,\varphi(t),\ \varepsilon).$$

$\mathrm{co}\,\varphi(t)$ は閉集合で,ε は任意であるから,φ が近似連続となる点 $t\in[0,\ T]$ においては,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm\subset\mathrm{co}\,\varphi(t).$$

レンマ3によって φ は殆どいたるところで近似連続ゆえ,上式は殆どいたるところで成立する。

(証了)

注(24) Aumann 〔2〕 Theorem 3 または Hildebrand 〔8〕 pp. 64-67, Theorem 4.

実はレンマ4は次に示すように一層強い形で成り立つことが，レンマ4とは独立に示される。

レンマ5　写像 φ: $[0, T]\to K(B_r)$ が可測ならば，殆どすべての $t\in[0, T]$ について，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm=\mathrm{co}\,\varphi(t).$$

証明）点 t において φ が近似連続であるとし，$E\subset[0, T]$ は t をその稠密点としてもち，$\varphi|E$ が連続となるような可測集合とする。一般性を失うことなく E は閉集合としてよい。するとE上の連続写像 $\varphi|E$ は $[0, T]$ 上で連続な拡張 $\tilde{\varphi}$ を有する。[(25)]

さて，レンマ4の証明と同様の変数変換によって，

$$\text{(11)}\quad \frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm=\int_{[0,1]}\varphi(\theta u+t)\,dm=\int_{F(\theta)}\varphi(\theta u+t)\,dm+\int_{F(\theta)^C}\varphi(\theta u+t)\,dm$$

ここで

$$F(\theta)=\{u\in[0,\ 1]/\theta u+t\in[t,\ t+\theta]\cap E\}.$$

このとき

$$m(F(\theta))=\frac{1}{|\theta|}m([t,\ t+\theta]\cap E)$$

であり，また t は E の稠密点であるから，$\theta\to 0$ とすれば，

$$\text{(12)}\quad \begin{aligned} &m(F(\theta))\to 1\\ &m(F(\theta)^C)\to 0\end{aligned}$$

である。ゆえに(11)から，

$$\text{(13)}\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm=\lim_{\theta\to 0}\int_{F(\theta)}\varphi(\theta u+t)\,dm.$$

$\tilde{\varphi}$ は $\varphi|E$ の連続拡張であり，また $F(\theta)\subset E$ であるから，

$$\text{(14)}\quad \int_{[0,1]}\tilde{\varphi}(\theta u+t)\,dm=\int_{F(\theta)}\varphi(\theta u+t)\,dm+\int_{F(\theta)^C}\tilde{\varphi}(\theta u+t)\,dm.$$

(13)(14)から，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[t,t+\theta]}\varphi(x)\,dm$ を評価するためには

$$\lim_{\theta\to 0}\int_{[0,1]}\tilde{\varphi}(\theta u+t)\,dm$$

を計算すればよいことがわかる。そのために $\theta_k\to 0$ なる正数列 $\{\theta_k\}$ をとり，

$$\tilde{\varphi}_k(u)=\tilde{\varphi}(\theta_k u+t)$$

と，$\tilde{\varphi}_k$: $[0,\ 1]\to K(B_r)$ を定義すれば，もちろんこれは可測で，$\tilde{\varphi}$ の連続性から

$$\tilde{\varphi}_k(u)\to\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)\quad \text{as } k\to\infty.$$

ゆえに，[(26)]

注(25)　実際，$(t_1,\ t_2)$，$t_1,\ t_2\in E$ を E^C の連結成分とすれば，$t\in(t_1,\ t_2)$ に対し，

$$\tilde{\varphi}(t)=\{(1/t_2-t_1)[(t-t_1)p_2+(t_2-t)p_1/p_1\in\varphi(t_1),\ p_2\in\varphi(t_2)\}$$

とすればよい。

(26)　よく知られたことであるが，第2の等号は Aumann 〔2〕の Theorem 5．第3の等号は同じく Theorem 3 によって保証されている。

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}\tilde{\varphi}(\theta_k u+t)\,dm=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}\tilde{\varphi}_k(u)\,dm=\int_{[0,1]}\varphi(t)\,dm=\mathrm{co}\,\varphi(t).$$

この関係は，φ が近似連続となる任意の点 t について成り立つのであるから，レンマ3によって，これは殆どいたるところで成立する。(証了)

定理 4 (Hermes) ふたつの可測多価写像 φ_1, φ_2: $[0, T]\to K(B_r)$ について，

$$\int_{[0,t]}\varphi_1(x)\,dm=\int_{[0,t]}\varphi_2(x)\,dm \quad \text{for all } t\in[0, T]$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{co}\,\varphi_1(x)=\mathrm{co}\,\varphi_2(x) \quad \text{a. e.}$$

証明) $\Leftarrow$: Aumann〔2〕Theorem 3 より明らかである。

$\Rightarrow$: 帰謬法を用いる。そこで，

$$\int_{[0,t]}\varphi_1(x)\,dm=\int_{[0,t]}\varphi_2(x)\,dm \quad \text{for all } t\in[0, T]$$

であるが，

$$E=\{x\in[0, T]/\mathrm{co}\,\varphi_1(x)\neq\mathrm{co}\,\varphi_2(x)\}$$

としたとき $m(E)>0$ であると仮定する。

$$E_1=\{x\in[0, T]/\mathrm{co}\,\varphi_1(x)-\mathrm{co}\,\varphi_2(x)\neq\phi\}$$

$$E_2=\{x\in[0, T]/\mathrm{co}\,\varphi_2(x)-\mathrm{co}\,\varphi_1(x)\neq\phi\}$$

とすれば，

$$E=E_1\cup E_2$$

であるから，$m(E_1)>0$ または $m(E_2)>0$ のうち，少なくともいずれか一方が成り立つ。そこで仮に $m(E_1)>0$ としよう。

写像 ϕ: $x\longmapsto\mathrm{co}\,\varphi_1(x)-\mathrm{co}\,\varphi_2(x)$ は E_1 上で非空であり，またそのグラフ $G(\phi)$ は(直積測度空間において)可測であるから，E_1 上の可測選択函数 f_1 が存在する。[27] E_1 の殆どすべての点が f_1 の Lebesgue 集合に属するという事実[28]と，レンマ3とから，f_1 の Lebesgue 集合に属し，しかもそこで φ_2 が近似連続となる点 $t'\in E_1$ が存在する。$f_1(t')\notin\mathrm{co}\,\varphi_2(t')$ ゆえ，凸集合の分離定理によって

(15) $\exists\eta\in S^{n-1}\equiv\{y\in R^n/\|y\|=1\}$ such that $\eta\cdot f_1(t')>\sup\{\eta\cdot p/p\in\varphi_2(t')\}$.

便宜上 f_1 を $[0, T]$ 全体で定義される可測函数に拡張し，それも f_1 と書くことにしよう。[29] また，

$$a(t')\in\int_{[0,t']}\varphi_1(x)\,dm=\int_{[0,t']}\varphi_2(x)\,dm$$

をコンパクト集合 $\int_{[0,t']}\varphi_1(x)\,dm=\int_{[0,t']}\varphi_2(x)\,dm$ の点のうち η との内積が最大となるような点とする。任意の $\varepsilon>0$ に対して

注(27) Hildebrand〔8〕pp. 54-58, Theorem 1.

(28) Dunford-Schwartz〔4〕p. 217, Theorem 8.

(29) このような操作が可能なことは自明である。

$$a(t'+\varepsilon)=a(t')+\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_1(x)\,dm \in \int_{[0,t'+\varepsilon]} \varphi_1(x)\,dm$$

と定義すれば,

$$a(t'+\varepsilon) \in \int_{[0,t'+\varepsilon]} \varphi_2(x)\,dm.$$

従って，次の条件を満たす φ_2 の可測選択函数 f_2 が存在する。

$$a(t'+\varepsilon)=\int_{[0,t'+\varepsilon]} f_2(x)\,dm=\int_{[0,t')} f_2(x)\,dm+\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_2(x)\,dm=a(t')+\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_1(x)\,dm. \tag{16}$$

$a(t')$ の定義から,

$$\eta\cdot\int_{[0,t')} f_2(x)\,dm \leqq \eta\cdot a(t').$$

従って，(16)が成り立つためには,

$$\eta\cdot\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_1(x)\,dm \leqq \eta\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_2(x)\,dm$$

でなければならず，従って

$$\eta\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_1(x)\,dm\right) \leqq \eta\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_2(x)\,dm\right) \tag{17}$$

である。t' は f_1 の Lebesgue 集合に属する点であるから,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{[t',t'+\varepsilon]} f_1(x)\,dm\right)=\eta\cdot f_1(t'). \tag{18}$$

また，φ_2 は t' で近似連続であるから，レンマ4に従って,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{[t',t'+\varepsilon]} \varphi_2(x)\,dm \subset \mathrm{co}\,\varphi_2(t'). \tag{19}$$

(17)(18)(19)によって

$$\exists p_2 \in \mathrm{co}\,\varphi_2(t') \quad \text{such that} \quad \eta\cdot f_1(t') \leqq \eta\cdot p_2. \tag{20}$$

これは(15)に矛盾。　　　　(証了)

参考文献

〔1〕 Aumann, R. J., "Markets with a Continuum of Traders", *Econometrica*, 32 (1964) 39-50.

〔2〕 ———, "Integrals of Set-valued Functions", *Journ. Math. Anal. and Appl.* 12 (1965) 1-12.

〔3〕 Debreu, G., "Integration of Correspondences" in L. LeCam, J. Neyman, E. L. Scott eds.: *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* II, Part 1, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, (1967) 351-372.

〔4〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators* Part I, Interscience, N. Y. (1958).

〔5〕 Halmos, P. R., *Measure Theory*, van Nostrand, N. Y. (1950).

〔6〕 Hausdorff, F., *Set Theory* Chelsea, N. Y. (1957).

〔7〕 Hermes, H., "Calculus of Set Valued Functions and Control" *Jour. of Math. and Mech.* 18 (1968) 47-59.

〔8〕 Hildenbrand, W., *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press, N. J. (1974).

〔9〕 Kelley, J. L., *General Topology*, van Nostrand, N. Y. (1955).

〔10〕 コルモゴロフ＝フォミーン『函数解析の基礎』第2版（山崎三郎訳）岩波書店，東京（1962).

〔11〕 Kowalski, Z., "Measurability Conditions for Set-valued Functions" *Bull. Acad. Pol. Sci. série sci. Math. Astr. Phys.* 7 (1964) 449-453.

〔12〕 ＿＿＿, "Measurability Conditions and Scalar Coordinates for Orientors Fields", 同上 455-459.

〔13〕 Kuratowski, K., *Topology* Academic Press N. Y. (1958).

〔14〕 Lang, S., *Real Analysis* Addison-Wesley Mass. (1973).

〔15〕 Michael, E., "Topologies on Spaces of Subsets" *Trans. Amer. Math. Soc.* 71 (1951) 152-182.

〔16〕 Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. I, Ungar, N. Y. (1955).

〔17〕 Pliś, A., "Remark on Measurable Set-valued Functions", *Bull. Acad. Pol. Sci. série sci. Math. Astr. Phys.* 9 (1961) 857-859.

（バークレー・カリフォルニア大学留学中）