Title	市場均衡の安定性IV : 非模索過程の安定分析
Sub Title	The stability of market equilibrium IV : the analysis of the non-tâtonnement processes
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1976
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.69, No.1 (1976. 1) ,p.1- 17
JaLC DOI	10.14991/001.19760101-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19760101-0001

市場均衡の安定性Ⅳ

——非模索過程の安定分析——

福岡正夫

1　前稿ならびに前々稿[1]でとり扱ったところはいわゆる予備的な模索過程の安定分析であり，需給の不均衡の下では実際上の財のやりとりはいっさい行われないと仮定された。すなわち全市場にいまだ需給の一致を見ない不均衡の状態においては，各個の取引主体は市場価格に対してみずから主体的に決定する需給量をたんに auctioneer に申し出るにすぎず，取引の実行はこうして個別的に定められる名目上の需給量が社会全体として feasible な状態に達してはじめてなされると考えられたのである[2]。リアリズムの見地からしてこの仮定がかならずしも現実に忠実でないことはいうまでもないが，そればかりではなくまた分析上の視点からも，それにはつぎの二つの困難が含まれるのではないかと思われる。

まず第一に，当該の模索過程が安定性を満たしていると想定しても，需給の均衡はいわば「極限において」達成されるにすぎないから，厳密にいえばそれは有限の時点では達成されえないわけであり，したがって文字どおりに解するかぎり，この仮定の下では取引は永遠に行われずじまいになってしまうであろう。

つぎに第二に，この論理的困難は事実上近似という便法によって処理するとしても，なお取引しながら進行する過程の均衡点は，模索過程の均衡点をもってしては代置しえない事情がある。というのは，不均衡下での取引の実行は，その都度各主体の資源保有量を変化させ，したがって超過需要関数をシフトさせていくからである。こうした事実の結果として，非模索過程の均衡点は，かりにそれが成立するとしても，取引の歴史的な経過に依存せざるをえず，模索過程のそれと一致する保証はないのである[3]。もちろんある特殊な事例の場合は，われわれはこの困難から免れることがで

注（1）　福岡正夫「市場均衡の安定性Ⅱ——粗代替財体系と大域的安定性」，『三田学会雑誌』1975年1・2月合併号，および同「市場均衡の安定性Ⅲ——粗代替財体系と局所的安定性」，同誌1975年6月号。

（2）　いうまでもなくこのような用語法は，現代の理論経済学者の慣例に従うものである。ワルラス研究の大家ジャッフェは，本来的にワルラスが模索という語で意味していたのは，かえって取引を伴いつつ進行するプロセスであったと述べている。W. Jaffé, "Walras' Theory of Tâtonnement: A Critique of Recent Interpretations", *The Journal of Political Economy*, February 1967, pp. 1–19 参照。

（3）　こうして非模索過程の均衡点は，初期保有量のみからは決まらないという意味で「不確定」("indeterminate") である。Cf. N. Kaldor, "The Determinateness of Static Equilibrium", *Review of Economic Studies*, February 1934 (reprinted in *Essays on Value and Distribution*, 1960).

き，非模索過程をもってしても本質的に模索過程の場合と同様の帰結を得ることができるかもしれない。それはいわゆる perishable commodities の事例と対称的な所得効果＝資産効果の事例であり，前者の場合はその財がただちに消耗されて資産効果をもちえないがゆえに，また後者の場合はある主体にとっての正の資産効果と他の主体にとっての負の資産効果とが全体として相殺しあうがゆえに，二つの過程の差を無視しうることになるのである。[4] しかし一般の場合にこれらの条件のいずれかが満たされることはかならずしも期待できず，そのかぎりにおいて非模索過程の運動経路ならびに均衡点は，模索過程のそれらと一致することはできないであろう。

これらの理由にもとづき，以下本稿では非模索過程の安定性を新たな主題として考察する。が，このテーマに関する研究の現況からして，われわれの考察もまた生産を捨象した純粋交換のモデルに限定されることになろう。これはきわめて重要な限定であるが，まったく意味を欠くわけでもない。けだし純粋交換の事例で均衡への収束を確立しえている場合に，現実のプロセスで不安定性が生じたとすれば，その原因を生産の局面に帰着せしめることができ，それはまたそれで貴重な情報たるを失わないからである。

2　早速，本論にとりかかろう。いま各取引主体 $r=1, 2, \cdots\cdots, m$ による各財 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ の需要量ならびに保有量をそれぞれ x_i^r および $\bar{x}_i^r$ と記し，$\sum_r x_i^r = x_i$, $\sum_r \bar{x}_i^r = \bar{x}_i$, そして $\bar{x}_i^r$ を成分とする $n \times m$ の行列を $[\bar{x}_i^r] = \bar{X}$ と記す。交換モデルにおける価格の調整方程式は，財の単位を適当に選べば，模索過程の場合と同様

(1)　$\dot{p}_i = x_i(p, \bar{X}) - \bar{x}_i \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

のようにあらわされるが，ここで非模索過程の場合は $\bar{X}$ のとり扱いが新たな課題となる。すなわち模索過程の場合とは異なって需給の不均衡状態でも取引の実行を認める場合には，一般に $\bar{X}$ が時間の経過とともに変化していくことになるから，新たに手持ストックの調整方程式

(2)　$\dot{\bar{x}}_i^r = F_i^r(p, \bar{X}) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n;\ r=1, 2, \cdots\cdots, m)$

を(1)と並べて定式化し，$\bar{x}_i^r$ の運動を同時に考察することが要請されるのである。模索過程の安定理論は，ここで $\bar{x}_i^r$ が終始不変にとどまるスペシャル・ケースと考えられるであろう。

(2)は各取引主体が不均衡下での交換をつうじて自己の手持ストックを変化させていく可能性が，そのときどきの価格と手持ストックの配分そのものに依存することを示しており，その特定の形態は具体的な取引のルールにしたがって規定されると考えられる。

まず各財の総量 $\bar{x}_i$ は，取引中の消費を無視するかぎり一定にとどまるから，$\dot{\bar{x}}_i = \sum_r \dot{\bar{x}}_i^r = 0$ であり，したがって第一の取引ルールとしては

注(4)　H. I. Grossman, "Theories of Markets without Recontracting", *Journal of Economic Theory*, December 1969, p. 477. 第一の解釈を示唆したのはハーンによればアローであり，また第二の解釈を示唆したのはヒックスである。

(3) $\sum_{r=1}^{m} F_i^r(p, \bar{X})=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

が満たされねばならない。またさらに等価交換の条件，すなわち若干の財を得るためには同額の他の財を提供しなければならないという条件を斟酌すれば，取引によって各人の財手持量の総額は不変にとどまることになるから，

(4) $\sum_{i=1}^{n} p_i F_i^r(p, \bar{X})=0 \quad (r=1, 2, \cdots\cdots, m)$

が成立つこともいうまでもない。

以下の考察においては，その全般をつうじて(1)(2)が初期条件 $p(0)$, $\bar{X}(0)$ によって一意的に定まる解経路をもつこと，そしてこれらの解経路が $p(0)$, $\bar{X}(0)$ について連続となることを仮定することにしよう。またさらにそれらはすべての時間 $t\geqq 0$ をつうじてつねに正領域にとどまりつづけるものとする。後者の仮定は，以下でとりあげる特定のモデルの基本的性格に応じて，これをさらにより根源的な十分条件に溯及せしめることも可能であろう。

3　さて上記のような一般的な性質を満たしている解経路が，安定性を保証するための十分条件を究明するのが，以下での議論の眼目である。ここでも模索過程の場合と同様，そのような条件の候補としてまっさきに考えられてよいのは，超過需要関数が粗代替性を具えている事例であろう。事実，非模索過程の研究のさきがけとなった根岸の論文(5)でもこの事例がとりあげられ，つぎのような推論をつうじて(1)(2)の安定性が導かれている。

まず各財の超過需要価値額 $p_i(x_i-\bar{x}_i)$ の絶対値をとり，その総和

(5) $v(t)=\sum_{i=1}^{n}|p_i(x_i-\bar{x}_i)|$

について考えてみる。導関数 $\dot{v}(t)$ があるとすれば

(6) $\dot{v}(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_i^r}\dot{\bar{x}}_i^r$

となるが，ここでしばらく右辺の第1項と第2項とを分けて考えていこう。$x_j-\bar{x}_j>0$ であるかあるいは $x_j-\bar{x}_j=0$ でかつ $\dot{x}_j>0$ の j の集合を J^+, $x_j-\bar{x}_j<0$ であるかあるいは $x_j-\bar{x}_j=0$ でかつ $\dot{x}_j<0$ の j の集合を J^- とすれば，

(7) $v(t)=\sum_{j\in J^+}|p_j(x_j-\bar{x}_j)|+\sum_{j\in J^-}|p_j(x_j-\bar{x}_j)|=\sum_{j\in J^+}p_j(x_j-\bar{x}_j)-\sum_{j\in J^-}p_j(x_j-\bar{x}_j)$

で，しかもワルラスの法則から

(8) $\sum_{j\in J^+}p_j(x_j-\bar{x}_j)=-\sum_{j\in J^-}p_j(x_j-\bar{x}_j)$

となるから，

(9) $v(t)=2\sum_{j\in J^+}p_j(x_j-\bar{x}_j)=-2\sum_{j\in J^-}p_j(x_j-\bar{x}_j)$

である。したがって(6)の第1項は

注(5)　T. Negishi, "On the Formation of Prices", *International Economic Review*, January 1961.

(10) $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial p_i}\dot{p}_i=\sum_{i\in J^+}\frac{\partial v}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_{i\in J^-}\frac{\partial v}{\partial p_i}\dot{p}_i$$
$$=2\sum_{i\in J^+}\frac{\partial[-\sum_{j\in J^-}p_j(x_j-\bar{x}_j)]}{\partial p_i}\dot{p}_i+2\sum_{i\in J^-}\frac{\partial[\sum_{j\in J^+}p_j(x_j-\bar{x}_j)]}{\partial p_i}\dot{p}_i$$

となり，(10)の最右辺の各項のなかはそれぞれ $i\neq j$ となっているから，粗代替性の仮定からすべての $i,\ j\ (i\neq j)$ について $\partial x_j/\partial p_i>0$ となっている。そして $i\in J^+$ で $\dot{p}_i\neq 0$ の i については(1)から $\dot{p}_i>0$，また $i\in J^-$ で $\dot{p}_i\neq 0$ の i については同様に $\dot{p}_i<0$ となるから，結局上の $\sum_i\frac{\partial v}{\partial p_i}\dot{p}_i$ の符号は負とならねばならないことが分る。そこでつぎに第2項 $\sum_i\sum_r\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_i{}^r}\dot{\bar{x}}_i{}^r$ の符号いかんであるが，これは実はゼロとなる。というのは，v が $\bar{x}_i{}^r$ に依存するのは各個人の所得 $m_r=\sum_i p_i\bar{x}_i{}^r$ をつうじてであり，したがって

(11) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial \bar{x}_i{}^r}\dot{\bar{x}}_i{}^r=\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial m_r}\frac{\partial m_r}{\partial \bar{x}_i{}^r}\dot{\bar{x}}_i{}^r$$
$$=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial m_r}\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{\bar{x}}_i{}^r=\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial v}{\partial m_r}\sum_{i=1}^{n}p_iF_i{}^r$$

となるが，この最後の式は等価交換の条件(4)によってゼロとならざるをえないからである。よって前記第1項の符号とあわせて，$v(t)\neq 0$ であるかぎり $\dot{v}(t)<0$ という帰結を得る。

また $\dot{v}(t)$ がかならずしも存在しない場合は，議論は若干複雑になるが，前々稿の場合と同様，(6) やはり不均衡状態では

$$\limsup_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}<0$$

となることが知られる。そして均衡状態においては v が0で定常値をとることはいうまでもない。

こうしていずれかの市場に不均衡がある以上は $v(t)$ の値は減りつづけ，しかもそれは0において下から有界であるから，当然極限値 $\lim_{t\to\infty}v(t)=v^*$ をもつ。

他方 $\sum_i p_i(t)^2$ を時間 t で微分し，(1)とワルラス法則とを考慮すれば，$\sum_i p_i(t)^2=\sum_i p_i(0)^2=$ constant となって $p(t)$ は有界であることが分り，また $\sum_r\bar{x}_i{}^r(t)=\bar{x}_i$ で $\bar{x}_i{}^r(t)>0$ (all $i,\ r$) であるところから $\bar{X}(t)$ も有界であることが明らかである。そこで，それらの任意の極限点を $\lim_{\nu\to\infty}p[t_\nu;\ p(0),\ \bar{X}(0)]=p^*$, $\lim_{\nu\to\infty}\bar{X}[t_\nu;\ p(0),\ \bar{X}(0)]=\bar{X}^*$（ここで $\nu\to\infty$ のとき $t_\nu\to\infty$）とすれば，$p^*,\ \bar{X}^*$ から始まる極限経路の上では，$p,\ \bar{X}$ および v の連続性から

$$v^*(t)=v^*[t;\ p^*,\ \bar{X}^*]=\lim_{\nu\to\infty}v[t;\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t_\nu)]$$
$$=\lim_{\nu\to\infty}v[t+t_\nu;\ p(0),\ \bar{X}(0)]=v^*$$

となる。すなわち $p^*,\ \bar{X}^*$ から出発すれば，以後 v は定常値をとりつづけ，したがって $p^*,\ \bar{X}^*$ は均衡点であるほかはない。そして $p^*,\ \bar{X}^*$ は任意の極限点であるから，結局 $p(t),\ \bar{X}(t)$ の極限点はすべて均衡点になることが知られたわけであり，われわれの非模索過程(1)(2)は擬安定性を満たす

注（6） 福岡，「市場均衡の安定性II」，pp. 9-10，また Negishi, *op. cit.*, p. 124（『価格と配分の理論』p. 190）参照。

ことが判明した。よって

定理 1 粗代替性の仮定の下では，非模索過程(1)(2)は擬安定である。

ただし目下の場合，$\bar{X}^*$ の一意性は主張できないから，上で確立したのはあくまで(1)(2)の擬安定性であり，真の大域的安定性ではないことに注意すべきである。これにひきかえ模索過程の場合は，$\bar{X}^*$ が当初から一定であるから，大域的安定性が成立するのである。(7)

4 こうして粗代替性の仮定は，非模索過程の安定分析にとっても模索過程のそれにとってと同様，きわめて「生産的」であるが，反面それが超過需要関数にかなり制約的な限定を課していることも否定できない。考えようによっては，模索過程の安定分析は，均衡の実現以前の取引をいっさい認めないというきわめて特異な交換規則を設定したがゆえに，その代償として粗代替性のような強力な仮定を要請したのであるが，目下の非模索過程の場合は，交換規則により多くのヴァラエティが許されているところから，適切な交換規則を選びさえすれば，あるいは超過需要関数についての特殊な仮定がなくても安定性を導くことができるかもしれないのである。非模索過程の分析が興味をいざなうもう一つの理由がここにある。

今日ではそのような目的に叶った交換のルールとして「ハーンの過程」(Hahn Process) および「エッジワースの過程」(Edgeworth Process) の名で呼ばれる二つのものがあり，それぞれ興味ある帰結を導いている。本節ではまずそれらのうち前者にもとづく安定理論を考察しておくことにしよう。(8)

ハーンの過程がもとづく交換規則は，しばしば "First Come First Served" の仮定とも呼ばれ，記号的には

$$\text{(F)}\quad \begin{cases} x_i^r \neq \bar{x}_i^r \text{ なら } \mathrm{sgn}(x_i^r - \bar{x}_i^r) = \mathrm{sgn}(x_i - \bar{x}_i) \\ x_i = \bar{x}_i \text{ なら } x_i^r = \bar{x}_i^r, \text{ all } r \end{cases}$$

のように書きあらわせる。その意味するところを文章で述べれば，つぎのようである。すなわち，いま財 i が社会全体で不足しているとすれば，その手持量を減らしたいと思っている主体はたちどころに買手を見つけることができ，したがって交換後は過不足なく所望の数量を保有できるはずである。それゆえ交換後もその財について主体的意図を満たしえない個人がいるとすれば，それはその財をもっと欲しいと思う個人のみである。換言すれば $x_i > \bar{x}_i$ の財について，交換後も $x_i^r \neq \bar{x}_i^r$ となっている個人がいるとすれば，$x_i^r > \bar{x}_i^r$ となっているのでなくてはならない。他方逆に財 i が社会全体として余っているとすれば，手持量を増やしたいと思う個人はただちに売手を見つけることができるから，交換後も主体的意図を満たしえないのはその財を過剰にもっている個人のみであ

注(7) 福岡，前掲論文，p. 11.
(8) F. H. Hahn and T. Negishi, "A Theorem on Non-Tâtonnement Stability", *Econometrica*, July 1962.

る。すなわち $x_i<\bar{x}_i$ の財については，交換後も $x_i^r\neq\bar{x}_i^r$ となっている個人がいるとすれば，$x_i^r<\bar{x}_i^r$ となっているのでなくてはならない。そして最後にもし財 i が社会全体として $x_i=\bar{x}_i$ の均衡条件を満たしているとすれば，個別的な手持量の過不足は個々人のあいだでやりくりできるから，交換後はすべての個人について $x_i^r=\bar{x}_i^r$ が満たされねばならない。

さてこの仮定の下では，つぎのような推論から安定性の帰結が導き出される(9)。まずこの事例については各個人の効用の総和

(12) $w(t)=\sum_{r=1}^{m}u^r(x_1^r,\ x_2^r,\ \cdots\cdots,\ x_n^r)$

を考えることにし，これを t で微分して消費者均衡の条件を用いれば

(13) $\dot{w}(t)=\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u^r}{\partial x_i^r}\dot{x}_i^r=\sum_{r=1}^{m}\mu_r\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{x}_i^r$

を得る。ここで最右辺の μ_r が個人 r にとっての所得の限界効用を意味することはいうまでもない。ところがすべての個人 r について，その予算制約式 $\sum_i p_i(x_i^r-\bar{x}_i^r)=0$ から

(14) $\sum_{i=1}^{n}\dot{p}_i(x_i^r-\bar{x}_i^r)+\sum_{i=1}^{n}p_i(\dot{x}_i^r-\dot{\bar{x}}_i^r)=0$

が成立し，(14)の左辺の第1項は(1)によって

(15) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)(x_i^r-\bar{x}_i^r)$

となる。そこでこの項に仮定の (F) が使えて，少くともある財に不均衡がある以上，この項の符号はどの r についても非負となり，しかもある r についてはかならず正となる。他方左辺の第2項については等価交換の条件(4)から $\sum_i p_i\dot{\bar{x}}_i^r=0$ となるから，結局不均衡状態においては

(16) $\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{x}_i^r\begin{cases}\leqq 0 & \text{for all } r\\ <0 & \text{for some } r\end{cases}$

がいえ，(13)から $\dot{w}(t)<0$ となる。他方同じく (F) から，均衡状態においては $\dot{w}(t)=0$ となることも明らかである。

効用関数が正常な性質を具えている場合には $w(t)$ は下から有界であり，$p(t)$, $\bar{X}(t)$ も前と同様有界であるから，以上の議論をあわせて，当該の過程の擬安定性が成立することになる。

定理 2 First Come First Served の仮定 (F) の下においては，非模索過程(1)(2)は擬安定である。

仮定 (F) を満たす調整過程の存在については，たとえば社会全体の超過需要がつねに所与の比率 $\alpha_r\geqq 0$, $\sum_r\alpha_r=1$ $(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$ で各個人に割りふられるシステムを考えれば足りるであろうが，そのような事例としてハーン＝根岸は(1)と並べてつぎのようなものを掲げている。

(17) $\dot{\bar{x}}_i^r=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\partial x_i^r}{\partial p_j}(x_j-\bar{x}_j)-\alpha_r\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\dfrac{\partial x_i^s}{\partial p_j}(x_j-\bar{x}_j)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1;\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$

$$\dot{\bar{x}}_n{}^r=\frac{1}{p_n}(-\sum_{i=1}^{n-1}p_i\dot{\bar{x}}_i{}^r)\quad(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

事実，個人 r の需要関数を微分すれば

$$(18)\quad \dot{x}_i{}^r=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i{}^r}{\partial p_j}\dot{p}_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i{}^r}{\partial \bar{x}_j{}^r}\dot{\bar{x}}_j{}^r$$

が得られるが，ここで右辺第2項は(4)によって

$$(19)\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i{}^r}{\partial \bar{x}_j{}^r}\dot{\bar{x}}_j{}^r=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i{}^r}{\partial m_r}\frac{\partial m_r}{\partial \bar{x}_j{}^r}\dot{\bar{x}}_j{}^r=\frac{\partial x_i{}^r}{\partial m_r}\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{\bar{x}}_j{}^r=0$$

となるから，(1)を考慮して

$$(20)\quad \dot{x}_i{}^r=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i{}^r}{\partial p_j}(x_j-\bar{x}_j)$$

を得る。そこで(20)を(17)に代入し，(3)を考慮すれば

$$(21)\quad \dot{x}_i{}^r-\dot{\bar{x}}_i{}^r=\alpha_r(\dot{x}_i-\dot{\bar{x}}_i)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1;\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

となり，したがって当初

$$(22)\quad x_i{}^r(0)-\bar{x}_i{}^r(0)=\alpha_r[x_i(0)-\bar{x}_i(0)]\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1;\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

となっていれば，すべての $t>0$ についても

$$(23)\quad x_i{}^r(t)-\bar{x}_i{}^r(t)=\alpha_r[x_i(t)-\bar{x}_i(t)]\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1;\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

となることが分るのである。また(22)(23)が成立てば，個別的な予算制約式とワルラスの法則から，$i=n$ についても

$$(24)\quad x_n{}^r(t)-\bar{x}_n{}^r(t)=\alpha_r[x_n(t)-\bar{x}_n(t)]\quad(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

となることが知られるであろう。

5　以上，不均衡状態で取引が行われると考えても，なお安定性が確保される事例を，一つには超過需要関数が粗代替性の仮定を満たす場合について，もう一つには交換のルールが First Come First Served の仮定を満たす場合について考察した。しかしこれらの議論はつぎの二点においていまだ多少の不満を残している。その一つは確立しえた安定性がいずれの場合も擬安定性であって真正の大域安定性ではないという点であり，もう一つは各取引主体がなぜ交換に参加するのかその主体的な動機について分析するところが乏しいという点である。

後者の問題に一つの古典的な解答を与えたのは周知のようにエッジワースであり，彼によれば当該の取引が，いずれの個人の状況をも前より不利にすることなく，しかも少くとも1人の個人の状況をより有利にするようであれば，その場合にかぎって交換が行われると考えられた。[10] さきにエッジ

注(9)　Hahn and Negishi, *op. cit.*, pp. 468-469.

(10)　F. Y. Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881, pp. 18-19. ditto, *Papers Relating to Political Economy*, Vol. II, 1925, pp. 311-312.

ワース過程と呼んだところのものは，交換がもっぱらこのようなルールにもとづいて行われる非模索過程のことであり，これを記号によって表現するならば，つぎのようなものにほかならないのである。

(U) すべての個人について $u^r(\hat{x}^r) \geqq u^r(\bar{x}^r)$ で少くとも1人の個人については $u^r(\hat{x}^r) > u^r(\bar{x}^r)$ であり，しかも $\sum_r \hat{x}^r \leqq \sum_r \bar{x}^r$, $p \cdot \hat{x}^r \leqq p \cdot \bar{x}^r$ を満たすような分配 $\hat{X} = \{\hat{x}^1, \hat{x}^2, \cdots\cdots, \hat{x}^m\} \neq \bar{X}$ があるならば，$du^r(\bar{x}^r)/dt \geqq 0$, all r, $du^r(\bar{x}^r)/dt > 0$, some r。そうでない場合は，すべての i, r について $d\bar{x}_i^r/dt = 0$。

この交換規則は，投機的な行動を排除している点では限定的であるが，[11] 一応予想が定常的な場合の基本的ルールとしては理に叶っているといえよう。以下本節でとり扱うところも，宇沢，ハーン，森嶋などの研究[12]にもとづくエッジワース過程の安定分析であり，それはまた同時に上記の第一の点を解決することをも目的としている。[13]

この課題ととり組むにあたっては，あらかじめつぎの二点に注意を払っておく必要があろう。まず第一に，初期保有量の行列$\bar{X}$がすでにパレート最適であるならば，もはや交換が起りえないことは，ルール(U)から自明である。しかしそうであるからといって，価格pが均衡に達しているとは限らない。すなわち $\bar{X}$ がパレート最適であっても，pはまだ動きつづける可能性があるのである。ただそのような場合は $\bar{X}$ は不変であるから，pの運動経路は模索過程のそれに帰するであろう。

つぎに，それほど自明でないが，$\bar{X}$ がパレード最適ではないからといって，(U)の下でかならず交換が行われる保証はない。いま交換が行われえない事態というのがどんな事態であるかを明らかにするため，[14] 分配 $\bar{X}$ において個人rが財iに対してもつ限界効用を $\partial u^r(\bar{x}^r)/\partial \bar{x}_i^r \equiv u_i^r(\bar{x}^r)$ と記し，$\bar{X}$ に対してpの集合

(25) $$P(\bar{X}) = \left\{ p > 0 \;\middle|\; \frac{u_1^r(\bar{x}^r)}{p_1} = \frac{u_2^r(\bar{x}^r)}{p_2} = \cdots\cdots = \frac{u_n^r(\bar{x}^r)}{p_n} \text{ for all } r \right\}$$

を定義することにしよう。p, $\bar{X}$ の対が $p \in P(\bar{X})$ を満たすならば，上記の定義から $\bar{X}$ がパレート

注(11) すなわち投機の場合は，当該の交換そのものについては効用の損失が含まれるとしても，なお将来価格の下で正味の利得が得られると予想されるのであれば，交換は行われる。

(12) H. Uzawa, "On the Stability of Edgeworth's Barter Process", *International Economic Review*, May 1962, F. H. Hahn, "On the Stability of a Pure Exchange Equilibrium", *ibid.*, M. Morishima, "The Stability of Exchange Equilibrium: An Alternative Approach", ibid. (ditto, *Equilibrium, Stability and Growth*, pp. 43-53) なお K. J. Arrow and F. H. Hahn, *General Competitive Analysis*, 1972, pp. 328 ff. をも参照のこと。

(13) 宇沢の論文では，価格については，収束する部分列の存在しか証明されておらず，かつそのさい中心的な役割を果たす補助定理3に若干の不備が見出される。この点については R. W. Ruppert and R. R. Russel, "A Note on Uzawa's Barter Process", *International Economic Review*, June 1972 および A. Mukherji, "The Edgeworth-Uzawa Barter Stabilizes Prices", *International Economic Review*, February 1974 参照。ただしラッパート＝ラッセルの議論も，極限経路の均衡価格への収束（彼らの補助定理 3*）からいきなり本来の初期点から出発する経路の均衡価格への収束（彼らの定理 2*）を主張する点で飛躍しており，この点については森嶋が行ったような周到な分析が必要である。後述のところを参照。

(14) 以下，交換が不可能な場合の必要条件の議論については Hahn, *op. cit.*, pp. 209-210, Morishima, *op. cit.*, p. 215 を参照。森嶋の補助定理はハーンの議論の不備を改善したものである。

最適で，p がそれを支持する価格になっていることは明らかであろう。さて各個人 r について

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
\frac{u_j^r(\bar{x}^r)}{p_j} &= \max_i \left\{ \frac{u_i^r(\bar{x}^r)}{p_i} \right\},\ p \in P(\bar{X}) \\
\frac{u_k^r(\bar{x}^r)}{p_k} &= \min_i \left\{ \frac{u_i^r(\bar{x}^r)}{p_i} \right\},\ p \in P(\bar{X})
\end{aligned}
$$

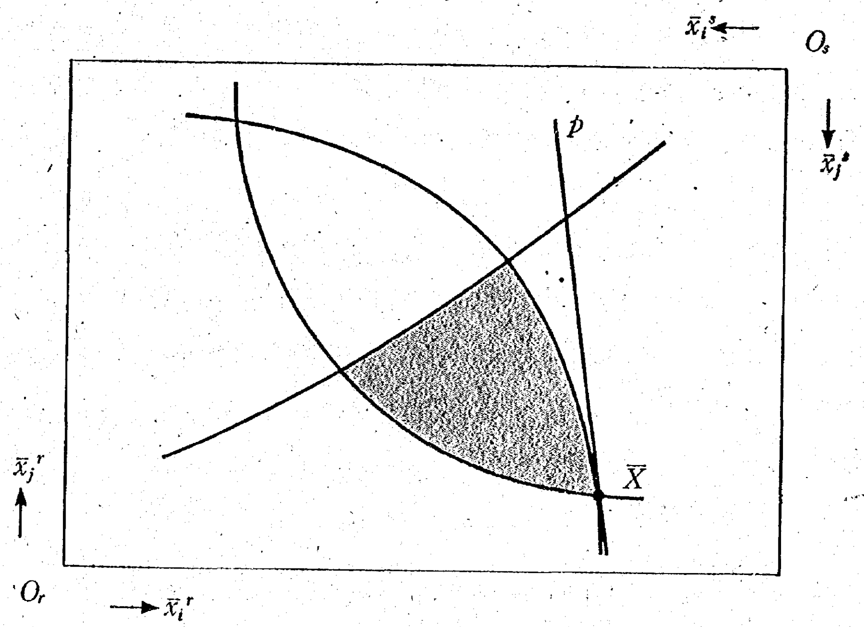
となるような j, k の集合をそれぞれ F_r, G_r と記し，

$$
(27)\quad
\begin{aligned}
F &= F_1 \cap F_2 \cap \cdots\cdots \cap F_m \\
G &= G_1 \cap G_2 \cap \cdots\cdots \cap G_m
\end{aligned}
$$

とするならば，p, $\bar{X}$ においていかなる交換も不可能であるためには，F, G はいずれも非空となるのでなくてはならない。というのは，もしたとえば F が空集合であれば，ある個人 r については $u_i^r(\bar{x}^r)/p_i > u_j^r(\bar{x}^r)/p_j$ で，他の個人 s については $u_i^s(\bar{x}^s)/p_i < u_j^s(\bar{x}^s)/p_j$ となるような (r, s) と (i, j) の組がかならず見出され，u の連続性と $\bar{X}>0$ の仮定から r と s のあいだではかならず交換が可能となるからである。G が空集合である場合も，まったく同様の推論が適用されることはいうまでもないであろう。(15)

2次元のボックス・ダイヤグラムを用いて示せば，この種の交換不可能の事態は第1図の p のように価格比が影をつけた領域の中に含まれない事態に該当している。(16) こうした事態が生じている場合は，価格比が当該の領域の中に押しやられるようなメカニズムが働かなければ，安定性は得られないのである。

そこでつぎの重要な仮定を設けることにしよう。



第1図

注(15) より詳しい証明については Morishima, *op. cit.*, p. 215 を参照。
(16) T. Negishi, "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econometrica*, October 1962, p. 663.

(Z) p, $\bar{X}$ において $i\in F$ ならば $x_i(p,\ \bar{X})>\bar{x}_i$
p, $\bar{X}$ において $i\in G$ ならば $x_i(p,\ \bar{X})<\bar{x}_i$

どの個人にとっても価格に対して限界効用が最大になっている財が超過需要の状態にあり，逆に相対的限界効用が最小になっている財が超過供給状態にあるとするのはきわめて自然のことのように見えるが，しかし (Z) は他のより基礎的な仮定から導かれる帰結ではなく，新たに追加しなければならない仮定であることに注意すべきである。[17]

ところでさきにも述べたように，本節ではたんなる擬定定性ではなく，大域的安定性を導出するのが目的であるから，そのための仮定を最後にもう一つ加えて，議論を補強しておこう。[18]

(Q) 関数族 $\{p(t,\ p(0),\ \bar{X}(0))|\ t\geqq 0\}$ および $\{\bar{X}(t),\ p(0),\ \bar{X}(0))|\ t\geqq 0\}$
は，$p(0)$, $\bar{X}(0)$ について同程度連続である。

この仮定の意味するところは，任意に $\varepsilon>0$ を与えると，それに対して $\delta>0$ が決まって，$|p(0)-p^*|<\delta$, $|\bar{X}(0)-\bar{X}^*|<\delta$ なら，すべての $t\geqq 0$ について $|p(t,\ p(0),\ \bar{X}(0))-p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*)|<\varepsilon$, $|\bar{X}(t,\ p(0),\ \bar{X}(0))-\bar{X}(t,\ p^*,\ \bar{X}^*)|<\varepsilon$ となる，ということである。それがシナリオのなかで演ずる役割は，推論の最後の段階になって明らかとなるであろう。

さて以上の準備ののちには，つぎの定理を証明することができる。

定理 3 仮定 (U), (Z) および (Q) の下においては，非模索過程(1)(2)は大域的に安定である。

証　明

前と同様，解 $p(t)$, $\bar{X}(t)$ は有界であるから，それらは極限点をもつ。そこで任意の極限点を $(p^*,\ \bar{X}^*)$ とし，$(p^*,\ \bar{X}^*)$ を初期点とする極限経路 $p^*(t)$, $\bar{X}^*(t)$ を考える。すると以下に示すように (i)すべての $t\geqq 0$ について $\bar{X}^*(t)=\bar{X}^*$ となること，かつ(ii)その主張にもとづいて $\bar{X}^*$ はパレート最適となること，がいえる。[19]

まず(i)を証明するため，$u^r[\bar{x}^r(t)]=w^r(t)$ とおけば，仮定 (U) から $w^r(t)$ は t について非減少である。また $u^r(\bar{x}^r)$ はすべての $\bar{x}^r\geqq 0$ について定義されていて連続であり，しかも $\bar{x}^r$ は厳密に正で，$\sum_r \bar{x}^r$ を上限としているから，そのあいだでは $u^r(\bar{x}^r)$ も有界である。よって $w^r(t)$ には上界があり，$t\to\infty$ のときそれはたとえば α_r に収束する。すなわち

(28) $$\lim_{t\to\infty} w^r(t)=\alpha_r$$

とできる。そこで連続性から当然

注(17) たとえばエッジワース＝パレートの意味で強い代替関係がある場合には，(Z) が満たされないかもしれないことが，根岸によって指摘されている。Negishi, *op. cit.*, p. 662.
(18) この仮定にもとづく議論の必要性については Morishima, *op. cit.* に負う。
(19) 以下（i）の証明については Uzawa, *op. cit.*, pp. 224-225 に負い，（ii）の証明については Morishima, *op. cit.*, p. 216 に負う。

(29) $u^r(\bar{x}^{r*}) = \lim_{\nu\to\infty} u^r[\bar{x}^r(t_\nu)] = \alpha_r$

となるが，

(30) $\bar{x}^{r*}(t) = \bar{x}^r(t,\ p^*,\ \bar{X}^*) = \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}^r[t,\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t)] = \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}^r(t+t_\nu)$,

したがって

(31) $u^r[\bar{x}^{r*}(t)] = u^r[\lim_{\nu\to\infty} \bar{x}^r(t+t_\nu)] = \lim_{\nu\to\infty} u^r[\bar{x}^r(t+t_\nu)]$

$\qquad = \lim w^r(t+t_\nu) = \alpha_r$

であるから，(29)(31)からすべての $t\geqq 0$ について

(32) $u^r[\bar{x}^{r*}(t)] = u^r(\bar{x}^{r*})$

となり，ルール (U) からただちにすべての $t\geqq 0$ について

(33) $\bar{X}^*(t) = \bar{X}^*$

となる。

(ii)こうして極限経路上では交換は行われないことになるから，前の議論からその上では F, G は非空となるのでなくてはならない。そこでそれらの元の数をそれぞれ f, g とすれば

(34) $\phi(t) = \sum_{r=1}^{m}\left[\sum_{i\in F}\frac{u_i{}^r(\bar{x}^r)}{fp_i} - \sum_{j\in G}\frac{u_j{}^r(\bar{x}^r)}{gp_j}\right]$

$\qquad \fallingdotseq \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{u_{i_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{i_0}} - \frac{u_{j_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{j_0}}\right]$

が定義でき，ここで i_0, j_0 は $i\in F$, $j\in G$ のような i, j からそれぞれ任意に選ばれた代表の財の番号である。$\phi(t)$ はほとんどいたるところで導関数をもち，そこでは(1)から

(35) $\dot{\phi}(t) = \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{u_{i_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{i_0}{}^2}\dot{p}_{i_0} + \frac{u_{j_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{j_0}{}^2}\dot{p}_{j_0}\right]$

$\qquad = \sum_{r=1}^{m}\left[-\frac{u_{i_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{i_0}{}^2}(x_{i_0}-\bar{x}_{i_0}) + \frac{u_{j_0}{}^r(\bar{x}^r)}{p_{j_0}{}^2}(x_{j_0}-\bar{x}_{j_0})\right]$

となるから，仮定 (Z) によって $p\in P(\bar{X})$ でないかぎり $\dot{\phi}(t)<0$ となり，ゆえに $t\to\infty$ のとき $\phi(t)\to 0$ となる。ϕ の定義からこれは明らかに

(36) $\lim_{t\to\infty} p^*(t,\ p^*,\ \bar{X}^*) = p^{**} \in P(\bar{X}^*)$

となることを意味し，したがって $\bar{X}^*$ はパレート最適でなくてはならない。

(iii)つぎに効用関数が強凹性を満たせば，$\bar{X}(t)$ の極限点は一意的となることを示そう。[20] いまもし $\sum_r \bar{x}^{r\prime} = \sum_r \bar{x}^{r*}$ で，しかもすべての r について $u^r(\bar{x}^{r\prime}) = \alpha_r$ となるような $\bar{X}' \neq \bar{X}^*$ があったとすれば，$X'' = \frac{1}{2}(\bar{X}' + \bar{X}^*)$ のような $\bar{X}''$ については

$$\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^{r\prime\prime} = \sum_{r=1}^{m}\frac{\bar{x}^{r\prime}+\bar{x}^{r*}}{2} = \sum_{r=1}^{m}\bar{x}^{r*}$$

で，$u^r(\bar{x}^{r\prime}) = u^r(\bar{x}^{r*}) = \alpha_r$ であるから，$\bar{x}^{r\prime}\neq\bar{x}^{r*}$ となっている個人については効用関数の強凹性から

注(20) (iii) の証明については Uzawa, *op. cit.*, pp. 225-226 参照。

$u^r(\bar{x}^{r\prime\prime}) > u^r(\bar{x}^{r*})$

とならざるをえない。ところが $\bar{X}' \neq \bar{X}^*$ の仮定からそのような個人は少くとも1人は存在するから，これは $\bar{X}^*$ がパレート最適であるという事実に矛盾する。よって上記の条件を満たす $\bar{X}$ は $\bar{X}^*$ のほかには存在しないが，$\bar{X}(t)$ の極限点はみなパレート最適で，$u^r(\bar{x}^r) = \alpha_r$ を満たしているから，これは結局 $\bar{X}(t)$ の極限点がただ1個しかないことを意味しており，したがって $\bar{X}(t)$ そのものが $\bar{X}^*$ に収束することが知られる。

(iv) 証明の最後の段階は $p(t,\ p(0),\ \bar{X}(0))$ の p^{**} への収束を示すことである[21]。仮定 (Q) から関数族 $\{p(t,\ p^0,\ \bar{X}^0) \mid t \geqq 0\}$ は同程度連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$|p^0 - p^*| < \delta$, $|\bar{X}^0 - \bar{X}^*| < \delta$ なら，すべての $t \geqq 0$ について $|p(t,\ p^0,\ \bar{X}^0) - p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*)| < \varepsilon$ となる。ところがここで p^*, $\bar{X}^*$ は極限点であるから，上の δ に対してある数 ν^* が決まって，ν が ν^* をこえればすべての ν について

(37) $|p(t_\nu) - p^*| < \delta,\ |\bar{X}(t_\nu) - \bar{X}^*| < \delta$

となるように $\{t_\nu\}$ ($\nu \to \infty$ のとき $t_\nu \to \infty$) を選ぶことができる。よってそれぞれの $p(t_\nu)$, $\bar{X}(t_\nu)$ を上記の p^0, $\bar{X}^0$ と考えれば，すべての $\nu \geqq \nu^*$ について

(38) $|p(t,\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t_\nu)) - p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*)| < \varepsilon$

が成立つのでなくてはならない。他方 $\lim_{t \to \infty} p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*) = p^{**}$ であるから，ε に対して t^* が決まって，すべての $t \geqq t^*$ について

(39) $|p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*) - p^{**}| < \varepsilon$

となしうることはいうまでもない。そこで以上の議論をまとめて，$t \geqq t^*$ および $\nu \geqq \nu^*$ を満たすすべての t, ν について

(40)
$$
\begin{aligned}
&|p(t,\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t_\nu)) - p^{**}| \\
&\leqq |p(t,\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t_\nu)) - p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*)| + |p(t,\ p^*,\ \bar{X}^*) - p^{**}| \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

が成立つことになり，$p(t,\ p(t_\nu),\ \bar{X}(t_\nu)) = p(t + t_\nu,\ p(0),\ \bar{X}(0))$ であるから，結局 $\lim_{t \to \infty} p(t,\ p(0),\ \bar{X}(0)) = p^{**}$ が成立せざるをえない。

以上の議論すべてによって(1)(2)の経路の均衡点 $(p^{**},\ \bar{X}^*)$ への収束が証明され，その大域的安定性が確立された[22]。

注(21) さきにも述べたようにラッパート＝ラッセルの議論は，以下の推論のステップを欠いている。正しい議論は森嶋によって与えられた。

(22) 他方，前掲論文でのハーンの証明は，交換が行われる局面すなわち $w(t) = \sum_r u^r[\bar{x}^r(t)]$ が増大していく局面と，交換が行われない局面すなわち本文に定義したような $\phi(t)$ が減少していく局面の交互の接続にもとづいている。2本のリヤプーノフ関数の切りかえという発想は興味深いが，彼の議論のみからは，ϕ 局面が w 局面によって中断された場合，なぜつぎの ϕ 局面の ϕ の初期値が前のそれの期末値より低くならねばならないのか，その必然性がかならずしも明らかでない。

6　前節までのところで本稿の議論も峠を越えたが，まだ若干補足すべき点が残っている。前に見たように，仮定 (Z) が要請されたのは，この仮定がおかれていないと $i \in F$ $(i \in G)$ のような財 i の価格が下落（上昇）する可能性があり，したがって $p(t)$ が正しい方向に調整される保証がないからである。が，付加的にこの仮定を設けなくても，なお価格が均衡に収束するようなメカニズムは考えられないであろうか。このような方向の一つの展開として根岸による逐次的物々交換のモデルがあり，それによればアロー＝ハーヴィッチの２財システムの成果を利用することによって，一度に２財間のみの交換を行っていく調整過程については安定性の成立することが知られている。その概略はつぎのごとくである。[23]

いま n 種類の財について１対の財ごとに成立する $n(n-1)/2 \equiv N$ 個の市場を考え，そのそれぞれの市場が１回に１個ずつ順次に開かれていくと想定する。この過程はN回で１めぐりするが，１巡ごとにどの市場がさきに開かれるかの順序はちがってもかまわないとする。さて任意のある $t=T+1$ 回目の市場で財 i, j の交換が行われる局面を考えてみよう。他の市場における前々からの交換の結果として，その期の初期保有量すなわち分配行列 $\bar{X}(T)$ はすでに決定されている。今回の市場において各個人 r はその効用 $u^r(x^r)=u^r(x_1{}^r, x_2{}^r, \cdots\cdots, x_n{}^r)$ をつぎの条件の下で最大ならしめると考える。

$$
\begin{aligned}
& p_i(x_i{}^r-\bar{x}_i{}^r(T))+p_j(x_j{}^r-\bar{x}_j{}^r(T))=0 \quad \text{for } \bar{x}_i{}^r(T)>0 \text{ or } \bar{x}_j{}^r(T)>0 \\
(41) \quad & x_i{}^r=0,\ x_j{}^r=0 \quad \text{for } \bar{x}_i{}^r(T)=0 \text{ and } \bar{x}_j{}^r(T)=0 \\
& x_k{}^r=\bar{x}_k{}^r(T) \quad \text{for } k \neq i,\ j
\end{aligned}
$$

これは財 i, j の少くともいずれか一方をもっている個人はその期の市場に参加でき，そのさい所得制約式に服するが，それらの財のいずれをももっていない個人は当該の市場には参加できないこと，また自明のことであるが i, j 以外の財はその期には交換されないことを意味している。このような効用最大化行動の結果として，各個人の財 i, j に対する需要量が価格 p_i, p_j あるいはその比率 $p_i/p_j \equiv q_{ij}$ の関数として決定され，しかるべき仮定の下において需給均衡の条件

$$
(42) \quad \sum_{r=1}^{m} x_i{}^r(q_{ij},\ \bar{X}(T))=\bar{x}_i, \quad \sum_{r=1}^{m} x_j{}^r(q_{ij},\ \bar{X}(T))=\bar{x}_j
$$

を満たす均衡価格 $q_{ij}{}^*$ が存在する。いまの議論の関連においては，われわれはまたそのような均衡価格の一意性をも仮定することにしよう。

ところで当該の市場が開かれたとき，p_i, p_j したがって q_{ij} の値が市場均衡の条件(42)を満たす保証はないが，２財交換のモデルにあっては模索過程 $dq_{ij}/d\tau=\sum_r x_i{}^r(q_{ij}(\tau))-\bar{x}_i$ はかならず安定となることが，アロー＝ハーヴィッチによって確立されている。[24] したがって $q_{ij}(\tau)$ は $\tau \to \infty$ のとき $q_{ij}{}^*$ に収束し，$q_{ij}{}^*$ が成立すれば取引が行われることになる。

注(23)　T. Negishi, "On the Successive Barter Process", *The Economic Studies Quarterly*, January 1962, pp. 62-63 (『価格と配分の理論』, pp. 194-197).

(24)　K. J. Arrow and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I", *Econometrica*, October 1958, pp. 539-542.

新しい分配 $\bar{X}(t+1)$ は，この取引の結果

$$
\text{(43)}\quad
\begin{aligned}
&\bar{x}_i^r(T+1)=x_i^r(q_{ij}^*,\ \bar{X}(T)),\ \bar{x}_j^r(T+1)=x_j^r(q_{ij}^*,\ \bar{X}(T)) \\
&x_k^r(T+1)=x_k^r(T),\ k\neq i,\ j
\end{aligned}
$$

のように決定され，$\bar{X}(T+1)$ は明らかに $\bar{X}(T)$ の一意連続関数となる。また交換は，少なくとも1人の個人の効用が他の個人の効用を減らさないで増加するときに行われるのであるから，$\bar{X}(T+1)\neq\bar{X}(T)$ であればかならず $\sum_r u^r(x^r(T+1))>\sum_r u^r(x^r(T))$ である。

こうして，所与の初期分配行列 $\bar{X}(0)$ から上記のプロセスを逐次的に繰返していくことによって，分配行列 $\bar{X}$ の時間 t に関する経路 $X[t;\bar{X}(0)]$ が導かれ，$t\to\infty$ のときこの経路の極限点がすべてパレート最適となることがその過程の安定性を意味している。そしてそのパレート最適を支持する価格が究極の均衡価格となることはいうまでもない。

さてこの交換過程が安定となることを示すために，つぎの関数

$$
\begin{aligned}
\text{(44)}\quad \phi(t)&=\phi[\bar{X}(t),\ \bar{X}(t-1),\ \cdots\cdots,\ \bar{X}(t-N)] \\
&=\sum_{v=t-N}^{t}\sum_{r=1}^{m}u^r[\bar{x}^r(t-v)],\ t\geqq N
\end{aligned}
$$

を考え，ここでまず $\bar{X}(t-N)$ がパレート最適でない場合には，$t-N\leqq v<t$ のどの v かでかならず $\bar{X}(v+1)\neq\bar{X}(v)$ となることに注目しよう。これはもしそのようなどの v についても $\bar{X}(v+1)=\bar{X}(v)$ であれば $\bar{X}(t)=\bar{X}(t-N)$ となり，すべての t について $\bar{X}(t)$ は不変となって，$\bar{X}(t-N)$ がパレート最適でないという仮定に矛盾するからである。そこで $\bar{X}(t-N)$ がパレート最適でなければ，上記の結論から $\phi(t+N)>\phi(t)$ がいえることになり，一巡ごとに ϕ の値は高まることが知られる。

例のごとく $\bar{X}(t)$ の任意の極限点 $\bar{X}^*$ から出発する極限経路 $\bar{X}^*(t)=X(t,\ \bar{X}^*)$ を考えれば，$\bar{X}(t)$ したがって $\bar{X}(0)$ に関する $X(t+1)$ の一意連続性から

$$
\bar{X}^*(t)=\lim_{\nu\to\infty}\bar{X}[t,\ \bar{X}(t_\nu)]=\lim_{\nu\to\infty}\bar{X}[t+t_\nu,\ \bar{X}(0)]
$$

となる。$\phi(t)$ もまた有界，非減少であるから極限値 ϕ^* をもち，極限経路 $X^*(t)$ の上では

$$
\begin{aligned}
\phi^*(t)&=\phi[\bar{X}^*(t),\ \bar{X}^*(t-1),\ \cdots\cdots,\ \bar{X}^*(t-N)] \\
&=\lim_{\nu\to\infty}\phi[\bar{X}(t+t_\nu),\ \bar{X}(t+t_\nu-1),\ \cdots\cdots,\ \bar{X}(t+t_\nu-N)] \\
&=\lim_{\nu\to\infty}\phi(t+t_\nu)=\lim_{t\to\infty}\phi(t) \\
&=\phi^*,\qquad t\geqq N
\end{aligned}
$$

となる。したがって極限経路上では $\phi^*(t+N)=\phi^*(t)=\phi^*$ が満たされつづけ，したがって $X^*(0)=X^*$ はパレート最適点となる。よって逐次的交換過程はパレート最適分配の集合に収束する。(25)

注(25) 上記の2財交換のモデルと平行して，2個人のバーゲニングの連鎖の形で交換過程を考えるモデルが，同じ著者によって定式化されている。Cf. Negishi, "On the Successive Barter Process", *ibid.*, p. 63,（『価格と配分の理論』，pp. 197–199）．この場合は m 人の個人のあいだで $m(m-1)/2\equiv M$ 個の相対取引が順次に行われ，それが一巡すればまた繰返されていくわけである。いま $t=T+1$ において個人 r, s のあいだで取引が行われるとすれば，つぎの条件

（1） $x^r+x^s=\bar{x}^r(T)+\bar{x}^s(T)$

（2） $u^r(x^r)\geqq u^r[\bar{x}^r(T)],\ u^s(x^s)\geqq u^s[\bar{x}^s(T)]$

7　前節のモデルとそれ以前にとり上げたモデルのいま一つの重要なちがいは，前者では取引がかならず2財の需給の一致を俟って行われるのに対して，第3節～第5節のモデルではそれが需給の不一致の下でも行われていく点である。換言すれば前者では非模索過程がいわば模索過程を piecewise につなげていくことによって構成されているのに対して，後者では文字どおりの非模索過程が進行していくのである。

こうして本来の非模索のプロセスにあっては，均衡に達するまでは事態が inconsistent なままで展開していくから，不可避的に一種の rationing の手続が含まれねばならない。すなわち社会全体として満たされざる超過需要（あるいは clear されない超過供給）を何らかの形で各個人に割当てるルールが考えられねばならないのであって，たとえば第4節の事例に現れた $\alpha_r \geqq 0$, $\sum_r \alpha_r = 1$ のルールのごときがそれにあたる。競争経済での実際上の取引にあたっては，いわゆる「早い者勝ち」の原則が支配せざるをえないであろうが，フィクションとしての auctioneer の存在が仮想される場合は，rationing もまた価格の伝達や調整の機能と並んでその職責に属すると考えられよう。

ところでこのように rationing がなされる場合に生じてくる重要問題は，それが各個人の需給の意思決定にどのように影響してくるかである。この点はケインズ経済学に関連して，かつてクラウワーが「再決定の仮説」("dual decision hypothesis") として着目したところであり，そこにおいては労働者家計の消費需要が，実際になされた雇用契約によって制約される事態が分析されている。[(26)] クラウワーの分析は特定市場の部分均衡分析にとどまるものであるが，結局この思想が一般的に意味するところは，各個人の超過需要が，実現した取引の経験に依存するという点であり，したがってそれを考慮にいれるとなれば，それぞれの超過需要関数のなかに，現行価格ばかりでなく，実際上取引された財の数量，あるいはより一般的にそれにもとづいてつぎの市場でどれだけの財数量が取引できるかの予想，をも導入してくるのでなくてはならない。いま auctioneer の rationing によって個人 r が現実に取引できた財 i の量を a_i^r とし，その結果彼がつぎの市場で取引できると予想

（3）（1）を満たして，しかも $u^r(x^{r\prime}) \geqq u^r(x^r)$, $u^s(x^{s\prime}) \geqq u^s(x^s)$ となるような $x^{r\prime}$, $x^{s\prime}$ はない。
を満たすように x^r, x^s が定まると考えられ，その結果として $\bar{X}(T+1)$ は $\bar{x}^r(T+1)=x^r$, $\bar{x}^s(T+1)=x^s$, $\bar{x}^h(T+1)=\bar{x}^h(T)$ $(h \neq r, s)$ のように定まることになる。以下 $\bar{X}[t, \bar{X}(0)]$ のすべての極限点がパレート最適点となることの証明は，2財交換のモデルの場合とまったく同様である。

なお pairwise な取引が達する最適性と多数個人による同時的取引の場合の最適性との関連については，A. M. Feldman, "Bilateral Trading Processes, Pairwise Optimality, and Pareto Optimality", *Review of Economic Studies*, October 1973 を参照せよ。

注(26)　R. Clower, "The Keynesian Counterrevolution: A Theoretical Approach", in F. H. Hahn and F. P. R. Brechling, ed., *The Theory of Interest Rates*, 1965. 同様の「再決定」がまた企業の労働需要についても考えられねばならないことが，ドン・パティンキンによって指摘されている。Cf. D. Patinkin, *Money, Interest and Prices*, 1st ed., 1956, 2nd ed., 1965, Chapter 13.

なおこれら両者の相互交流関係を考慮にいれた一般均衡理論的な分析が R. J. Barro and H. I. Grossman, "A General Disequilibrium Model of Income and Employment", *American Economic Review*, March 1971 に見出されるが，さらにこの種の構想を多数財・多数主体の真の一般均衡理論に拡張したのは J. P. Benassy, "Neo-Keynesian Disequilibrium Theoy", mimeographed, April 1973 である。

する財 i の量を b_i^r とすれば，個人 r は $|x_i^r-\bar{x}_i^r|\leqq|b_i^r|$ の条件にも服しつつ効用を最大にすると考えられるから，社会的な需要関数は $x_i=x_i(p,\ B)$ のような形で導出される。ただし B はいうまでもなく b_i^r を元素とする $n\times m$ の行列である。この場合の全経済の調整過程としては，たとえば

$$\dot{p}_i=K_i\cdot[x_i(p,\ B)-\bar{x}_i],\ K_i>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$\dot{b}_i^r=-H_i^r\cdot[x_i(p,\ B)-\bar{x}],\ H_i^r>0\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n;\ r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

のようなものが考えられ，ここで第二式は社会全体で財 i が不足する場合は，すべての個人が b_i^r を低く評価し，過剰な場合は，b_i^r を高く評価するメカニズムをあらわすと考えられよう。(27)

この種のモデルのワーキングを明らかにする研究は現在進行中であり，したがってここでは詳論を避けねばならないが，当面の安定性の問題に限っていえば，注記の林氏の論文が粗代替財の仮定 $\partial x_i/\partial p_j>0$ ならびにいわゆる q 粗代替財の仮定 $\partial x_i^r/\partial b_j^r<0$（いずれの場合も $i\neq j$）の下で安定性を導いていることに言及しておこう。筆者の知れるかぎり，この種のモデルの安定性を確立しているのは，現在林氏の貢献が唯一のものである。

8　上記の諸モデルをつうじて，不均衡過程でも一物一価の法則が支配しているのは，一貫して auctioneer の存在が仮定されているからである。すなわちわれわれは auctioneer には，価格を調節する役割や rationing を決める役割のほかに，なお情報を伝達する重要な役割があることを忘れてはならない。もしこの種のフィクションを想定しないとすれば，一つには各当事者が price-taker＝quantity-adjuster として行動することを要請されるのに，また彼らが価格を決めなくてはならないというはなはだパラドキシカルな事態に当面せざるをえないと同時に，もう一つには一物一価の法則がくずれて，各人はそれぞれどの売手（買手）の価格が高く，またどの売手（買手）の価格が廉いかを，コストをかけて調査する必要に迫られる。第一のたぐいの問題はさいきんフランクリン・フィッシャーなどによって追及されたところであるが，(28) そこに登場する price-setting な主体は，他面主体的均衡の場ではもっぱら quantity-adjuster として行動するから，何分「ジーキルとハイド」的な性格を免れることができない。また第二のカテゴリーの問題もフェルプス＝ウィンターその他によって論ぜられているが，(29) この方向の議論も，それがいわゆる不完全競争の理論とどこかちがうのかという点に問題がある。もともと各当事者の価格について完全情報が得られないのは，距離的その他何らかの理由によってそれらの主体が隔離されているためと考えられ，財がまったく同質的で各人がただ1点に位置しているとすれば，価格の格差はありえないであろうし，またそれに関す

注(27)　Cf. F. Hayashi, "Quantity Adjustment in an Exchange Economy", unpublished mimeogaph, June 1975. また H. Varian, "On Persistent Disequilibrium", *Journal of Economic Theory*, April 1975.

(28)　F. M. Fisher, "On Price Adjustment without Auctioneer", *Review of Economic Studies*, January 1972.

(29)　E. S. Phelps and S. G. Winter, "Optimal Price Policy under Atomistic Competition", in E. S. Phelps, ed., *Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory*, 1970.

る調査も到底必要であるとは考えられない。その意味でこの種の問題は，結局何らかの product differentiation を持ちこむことなしにはほとんど分析することが不可能なのであって，これはフィクションとしての auctioneer が完全市場の化身であったことを思うならば，当然の帰結というべきであろう。

（経済学部教授）