慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	経済分析におけるコンピューターの誤差問題(その3) : 回帰分析における精度
Sub Title	Errors generated by computer in economic analysis (3)
Author	鳥居, 泰彦 新井, 益洋
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1975
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.68, No.9 (1975. 9) ,p.685(39)- 695(49)
JaLC DOI	10.14991/001.19750901-0039
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19750901-0039

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

研究ノート

経済分析におけるコンピューターの誤差問題（その3）

——回帰分析における精度——

鳥居　泰彦
新井　益洋

10.　回帰分析の誤差累積

回帰分析は，エコノメトリクスの分析手法の中でいちばん基本的で，しかもいちばん頻繁に用いられる方法である。おそらく，大部分の読者は回帰分析の原理と方法については熟知しており，また多くの読者は回帰分析を実際に使って経済分析を行なったことがあるであろう。

だが，私達はここで反省してみる必要がある。私達は，教科書が教える通りの方法を用いて，コンピューターを使って測定した回帰係数を正しいものとして無条件に受け容れてしまいがちである。しかし，コンピューターから出てきた回帰係数は，実は，いろいろな意味で信用できないのである。

第1に，説明変数の間の相関が高い場合に起る，いわゆる多重共線性の現象がある。この現象が生じた場合，そこに得られた回帰係数が全く信用できないことはよく知られているが，ここで問題なのは多重共線性が生じたのか否かを判別することが難しいということである。もし，回帰係数を求める一連の計算をコンピューターを用いないで手計算で行なったならば（説明変数の数が多くなれば実際には不可能であるが），その途中で必ず多重共線性の有無に気付くであろう。しかし，コンピューターを用いると一連の計算が自動的に処理されてしまい，計算結果だけが私達の目に入ることになる。従って，その結果に異常と思われる値がなければ，多重共線性は（実際には生じていたとしても）判別できないままになる。

第2に，これまで見てきたようなコンピューターから発生する誤差累積がある。これについては，今まで一般のエコノメトリクスの研究では（コンピューターの使用が不可避であるにもかかわらず）ほとんど省みられなかった。しかし，実際には無視することができないほど大きな誤差をもたらす。以下，プロセス・グラフの方法を用いて，回帰分析の一連の計算ステップのどの段階で，どの位の計算誤差が発生するか調べることにしよう。

10.1　回帰分析の計算手順

普通，エコノメトリクスの教科書では回帰係数の計算式は

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \qquad (10.1)$$

と書いている。但し，観測値の数を n，説明変数の数を p とすれば，$\hat{\beta}$ は最小自乗推定量($p+1$ 次列ベクトル)，X はその第1列の各要素に1を第2列から $p+1$ 列に p 個の説明変数の観測値を n 組並べた $n\times(p+1)$ の行列，y は従属変数の観測値（n 次列ベクトル）である。

(10.1)式から，回帰係数を求める手続きは大きく3つの作業に分けて考えることができる。

第1の段階は，行列 $X'X$，とベクトル $X'y$ の各要素（積和）を計算するステップである。各要素は，行列 X の要素を x_{ij}，列ベクトル y の要素を y_i とすれば，$\sum_{k=1}^{n}x_{ki}x_{kj}$ あるいは $\sum_{k=1}^{n}x_{ki}y_k$ のように n 回の掛け算と $n-$

（注）この研究ノートは，慶應義塾大学産業研究所および情報科学研究所において鳥居・新井が行なっている共同研究の成果の一部である。本稿は前前号（三田学会雑誌68巻6号，1975年6月号所収の「経済分析におけるコンピューターの誤差問題」，その1）と前号（三田学会雑誌68巻7・8号，1975年7・8月号所収の「経済分析におけるコンピューターの誤差問題，その2）の続編である。従って，章，節の番号は前前号・前号に続けることにする。

1回の加算から成り立っている積和である。

第2の段階は，行列$X'X$の逆行列$(X'X)^{-1}$の計算である。このステップは$(p+1)\times(p+1)$の大きさの行列の逆行列を求めるステップである。逆行列の計算方法はガウスの消去法，ガウス・ジョルダン法，ガウス・ザイデル法等がよく知られているが，いずれも膨大な回数の四則演算の繰り返しである。

第3の段階は，逆行列$(X'X)^{-1}$とベクトル$X'y$を掛け合わせることである。この段階もまた多くの掛け算と加算の繰り返しである。

ところで，上に整理した3つの段階のどれをとってみても膨大な演算ステップからなっていることがわかる。従来，エコノメトリクスの方法をコンピューターで実行する人々の間に，これだけのたくさんの演算ステップを実行するのだから，ある程度の誤差累積は起るにちがいないという認識はあった。しかし，上の3つの段階のどこでいちばん大きな誤差累積が発生するかということになると，どの段階でも同程度の誤差が発生すると茫然と考えられていた。

また，一部の人々の間では，逆行列演算の段階でいちばん大きな誤差が発生すると考えられていた。そして，この考え方は，比較的多くの人々に信じられるようになりつつある。これは，逆行列演算をよく行なう産業連関分析において精度の悪いことがしばしば起るので，上のような考え方が蔓延しそうになるのもむりはない。しかし，逆行列計算の時に最大の誤差累積が起るというのは必ずしも正しくない。

R. Hall は回帰分析の計算ステップの中で，逆行列計算における誤差の発生量が一番大きいという考え方に疑問を持った。Hall は実験によって，逆行列計算の段階よりも，その前の積和行列$X'X$, $X'y$を作る段階の方が回帰分析の精度を大きく乱すことを発見した。しかし，Hall は積和行列の作成段階の方が誤差の累積が大きくなる理由をコンピューターの誤差発生メカニズムにもどって説明することはしなかった。プロセス・グラフの方法を用いると，上の理由をはっきりと説明することができる。

10.2 プロセス・グラフによる誤差累積の比較

積和を作る計算は，前節の回帰分析における積和行列だけでなく，広くエコノメトリクスにおいて頻繁に現われる。この意味においても積和における誤差累積状況を知ることは極めて重要なことである。誤差累積の状況をプロセス・グラフの方法で見ることにしよう。

はじめに，積和計算の誤差累積の性質を見るために6個の数値$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$の積和

$$z=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3 \tag{10.2}$$

を考える。(10.2) 式の計算のプロセス・グラフは〔Fig. 10.1〕である。$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$は，始めに，それぞれ$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$の相対誤差を持っているとする。第1ステップの乗算結果を正規化して記憶する際に発生する切り捨ての相対誤差を$\delta_1, \delta_2, \delta_3$とし，それらを加え合わせるステップで発生する切り捨ての相対誤差をσ_2, σ_3とする。この時，全体の相対誤差は，プロセス・グラフのルールによって，次のように評価できる。

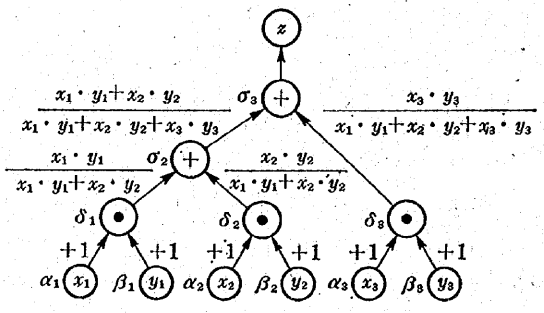
$$\frac{E_z}{z}=\left\{(\alpha_1+\beta_1+\delta_1)\cdot\frac{x_1\cdot y_1}{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2}+(\alpha_2+\beta_2+\delta_2)\cdot\frac{x_2\cdot y_2}{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2}+\sigma_2\right\}\cdot\frac{x_1\cdot y_1+x_2y_2}{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3}$$
$$+(\alpha_3+\beta_3+\delta_3)\cdot\frac{x_3\cdot y_3}{x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3}+\sigma_3 \tag{10.3}$$

この両辺に (10.2) 式を代入して整理すれば，絶対誤差の大きさは

$$\begin{aligned}E_z&=(\alpha_1+\beta_1+\delta_1)\cdot x_1\cdot y_1+(\alpha_2+\beta_2+\delta_2)\cdot x_2\cdot y_2+\sigma_2\cdot(x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2)+(\alpha_3+\beta_3+\delta_3)\cdot x_3\cdot y_3+\sigma_3\cdot(x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3)\\&=(\alpha_1+\beta_1+\delta_1+\sigma_2+\sigma_3)\cdot x_1\cdot y_1+(\alpha_2+\beta_2+\delta_2+\sigma_2+\sigma_3)\cdot x_2\cdot y_2+(\alpha_3+\beta_3+\delta_3+\sigma_3)\cdot x_3\cdot y_3\end{aligned} \tag{10.4}$$

となる。

〔Fig. 10.1〕 $z=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3$ のプロセス・グラフ



相対誤差$\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \sigma_i$の限界は，コンピューターの有効桁数を$t$桁とすれば

$$|\alpha_i|\leqq 10^{-t+1}\quad(i=1,2,3)$$
$$|\beta_i|\leqq 10^{-t+1}\quad(i=1,2,3)$$
$$|\delta_i|\leqq 10^{-t+1}\quad(i=1,2,3)$$
$$|\sigma_i|\leqq 10^{-t+1}\quad(i=2,3) \tag{10.5}$$

であるから，(10.4) 式に代入すれば (10.2) 式の積和計算の誤差累積の限界は次式のようになる。

$$|E_z|\leqq(5\cdot x_1\cdot y_1+5x_2\cdot y_2+4x_3\cdot y_3)\times 10^{-t+1} \tag{10.6}$$

実際の経済データは正数の場合が非常に多い。ということは，それらの積 $x_i \cdot y_i (i=1, 2, 3)$ も正数の場合が多いということになる。そうしてみると，(10.6)式の $|E_z|$ は

$$x_1 \cdot y_1 \leqq x_2 \cdot y_2 < x_3 \cdot y_3 \qquad (10.7)$$

の時最小となり

$$x_1 \cdot y_1 \geqq x_2 \cdot y_2 > x_3 \cdot y_3 \qquad (10.8)$$

の時最大となる。このことは (10.6) 式の右辺の係数をみれば理解できよう。

一般的に，$2n$ 個の数値 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ の積和

$$z = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \qquad (10.9)$$

の場合について考えてみよう。プロセス・グラフ〔Fig. 10.2〕を使って誤差の範囲を評価すると次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{E_z}{z} = \Bigg\{\cdots\Bigg\{\Bigg\{&(\alpha_1+\beta_1+\delta_1)\cdot\frac{x_1 \cdot y_1}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2} \\ &+ (\alpha_2+\beta_2+\delta_2)\cdot\frac{x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2} + \sigma_2\Bigg\} \\ &\cdot\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3} + (\alpha_3+\beta_3+\delta_3) \\ &\cdot\frac{x_3 \cdot y_3}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3} + \sigma_3\Bigg\} \\ &\cdot\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4}\cdots\Bigg\} \\ &\cdot\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_{n-1} \cdot y_{n-1}}{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n y_n} + (\alpha_n+\beta_n+\delta_n) \\ &\cdot\frac{x_n \cdot y_n}{x_1 \cdot y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n} + \sigma_n \qquad (10.10)\end{aligned}$$

この両辺に (10.9) 式を代入して整理すれば，絶対誤差の大きさは

$$\begin{aligned}E_z = &(\alpha_1+\beta_1+\delta_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_n)\cdot x_1 \cdot y_1 \\ &+ (\alpha_2+\beta_2+\delta_2+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_n)\cdot x_2 \cdot y_2 \\ &+ (\alpha_3+\beta_3+\delta_3+\sigma_3+\sigma_4+\cdots+\sigma_n)\cdot x_3 \cdot y_3 \\ &+ \cdots + (\alpha_n+\beta_n+\delta_n+\sigma_n)\cdot x_n \cdot y_n \qquad (10.11)\end{aligned}$$

となる。仮定した相対誤差 $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \sigma_i$ の絶対値の限界は 10^{-t+1} 以下であることから，(10.11) 式は

$$\begin{aligned}|E_z| = [&(n+2)\cdot x_1 \cdot y_1 + (n+2)\cdot x_2 \cdot y_2 + (n+1)\cdot x_3 \cdot y_3 \\ &+ \cdots + 4x_n \cdot y_n] \times 10^{-t+1} \qquad (10.12)\end{aligned}$$

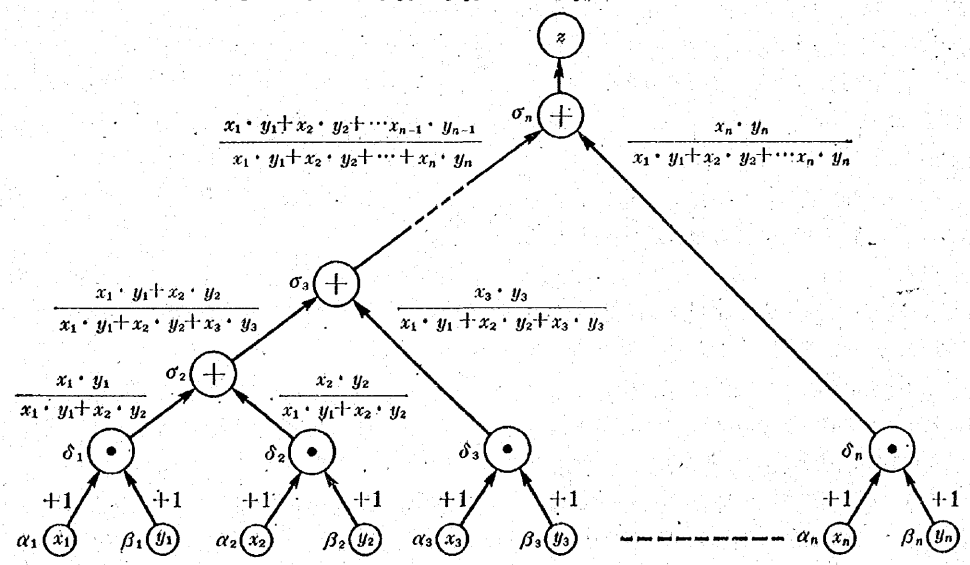
となる。従って，誤差の範囲を最小にするには，積 $x_i \cdot y_i$ がすべて正ならば，n 個の積を小さいものから大きいものへと順に加えればよい。また，積 $x_i \cdot y_i$ がすべて負ならば，その絶対値 $|x_i \cdot y_i|$ を小さいものから大きいものへと順に加え，この和に負符号をつければよいことになる。

つぎに，エコノメトリクスにおいてよく登場する逆行列計算の誤差累積を追跡してみよう。最も広く使われている逆行列計算法はガウスの消去法である。従って，ここではガウスの消去法による誤差累積をプロセス・グラフで評価してみよう。

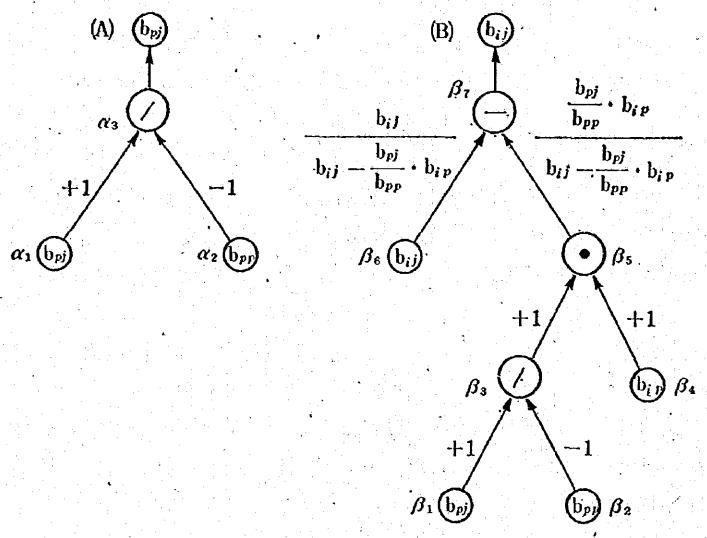
計算の結果求められた逆行列の要素を b_{ij} としよう。この b_{ij} の値は計算の過程で刻々と変わってゆくが演算の回数は正確に把握することができる。これをプロセス・グラフで描けば〔Fig. 10.3〕となる。

逆行列の大きさを $m \times m$ とすれば，要素 b_{ij} は全計算を通じて，プロセス・グラフ(A)の計算を1回，プロセス・グラフ(B)の計算を $m-1$ 回行なうことになる。プロセス・グラフから誤差の範囲は，(A)・(B)それぞれ

〔Fig. 10.2〕 $z = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$ のプロセス・グラフ



〔Fig. 10.3〕 逆行列計算のプロセス・グラフ



但し，i，j，$p=1$，2，$\cdots$，m $(i \neq p)$

$$\frac{E_{bpj}}{b_{pj}}=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3 \tag{10.13}$$

$$\frac{E_{bij}}{b_{ij}}=(m-1)\cdot\left\{(\beta_1-\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5)\cdot\frac{\frac{b_{pj}}{b_{pp}}\cdot b_{ip}}{b_{ij}-\frac{b_{pj}}{b_{pp}}\cdot b_{ip}}+\beta_6\cdot\frac{b_{ij}}{b_{ij}-\frac{b_{pj}}{b_{pp}}\cdot b_{ip}}+\beta_7\right\} \tag{10.14}$$

となる。いままでと同様に，α_i, β_i の絶対値の限界を 10^{-t+1} 以下として，(10.13) 式と (10.14) 式を加え合わせて整理すれば

$$|E_{bij}|\leqq\left[2(m-1)\cdot(b_{ij}+\frac{b_{pj}}{b_{pp}}b_{ip})+b_{pj}\right]\times10^{-t+1} \tag{10.15}$$

となる。

積和の誤差累積の限界 (10.12) 式と逆行列計算の誤差累積の限界 (10.15) 式を比較すると，係数の項の数から明らかに (10.15) 式の方が小さいことがわかる。また，(10.12) 式における n は観測値の数であり，逆行列の大きさ m よりは，一般的には，はるかに大きい場合が普通である。この意味からも，積和計算による誤差累積の限界は，逆行列計算による誤差累積の限界より大きいといえる。

これは，R. Hallの経験的観察を裏付けたことになり，極めて重大なことを意味する。すなわち，誤差累積の限界が最大となる計算作業が，回帰分析の全演算を通じて，その最初（第1段階）に位置しているということである。たとえ，第2段階の逆行列計算や，第3段階の行列とベクトルの積の演算精度を高めたとしても（コンピューターの有効桁数を長くしたり，逆行列計算においては何度も何度も補正を行なう等の操作は），もはや遅いのである。

一方，第1段階の積和計算の演算精度を高めるには，有効桁数を可能な限り長くする以外方法はないと考えられる。理論的には積の符号が同一ならば，その絶対値の小さいものから大きいものへと順に加えれば，誤差累積を最小にすることができる。しかし，観測データの1組に含まれる変数が共通の大小序列を持っているとは限らないから，ある変量で観測データを小さい順に並べかえた時，別の変量も小さい順に並ぶという保証はない。ただ，ありがたいことに，経済時系列データの回帰分析では，時間とともにデータの値は増えていく場合が多いから，比較的，誤差累積が小さくなっていると考えられる。これは経済時系列データを時間の古い順にインプットした場合である。逆に，時間の新しい順にインプットした場合は最悪の事態になってしまう。

しかし，回帰分析に用いるデータの順序を誤差累積の最小化のために自由に並べかえてインプットすることには問題がある。なぜならば，攪乱項の自己相関検定に用いるダービン・ワトソン検定統計量が全く異質なものになってしまうからである。言うまでもなく，データを小さい順に並べかえてインプットすれば，回帰係数や決定係数の値は誤差累積が減少して精度が高まり，より正確になる。

このように，回帰分析では，第1段階の積和行列を作る際に演算精度を高めることは極めて重要なことである。

第2段階の誤差累積の限界は第1段階のそれより小さいとはいえ，この第2段階の逆行列の演算ステップの数も膨大なものであるから，この段階の演算精度も軽視してはならない。やはり，この段階でも演算精度を高めるためには，有効桁数を可能な限り長くする方がよい。

第3段階の行列とベクトルの積の誤差累積の限界は，第1段階や第2段階に比べればはるかに小さいといえる。

11. 回帰分析の精度

前章では，回帰分析の誤差累積の限界がどこで最も大きいかを見た。そして，計算結果の精度を高めるた

めにはコンピューターの有効桁数を長くすればよいということを知った。それでは，有効桁数の長さの違いが計算結果にどのくらい影響を及ぼすかを以下で見てみよう。

11.1 有効桁数の違いによる精度実験

最近のコンピューターのほとんどは，IBM 1620 のように有効桁数を自由に変えるということができない。ただ，単精度と倍精度の2種類の有効桁数のうち，どちらか一方を選択することができるだけである。現在，広く利用されている機種の中から IBM 370 と UNIVAC 1106 を選んで，IBM 1620 と精度チェックをしながら実験をしよう。

実験モデルは次式の通りである。

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+u_i \qquad (11.1)$$

この (11.1) 式を最小自乗法で推定するのである。データは〔Table 11.1〕に示してある（このデータは実験用に作成したものではなく，ある実証分析の途中で遭遇した実際のクロスセクションのデータである）。

〔Table 11.1〕 データ

y	x_1	x_2
12.5018	1.000	1.0003799
15.2720	0.806	1.0004622
18.4984	0.734	1.0008277
21.1311	0.712	1.0005623
23.9329	0.642	1.0008419
26.7977	0.820	1.0008782
29.5339	0.782	1.0010284
32.3859	0.788	1.0010499
35.0735	0.837	1.0009625
38.0248	0.725	1.0012167
40.6904	0.683	1.0014548
43.4640	0.633	1.0011806
46.4026	0.755	1.0014476
49.1116	0.633	1.0021997
51.8353	0.659	1.0013416
54.7118	0.718	1.0018680
57.5504	0.653	1.0017759
60.2219	0.407	1.0040080
63.2759	0.300	1.0040080

まず，これまでの私達の実験用コンピューターである IBM 1620 で計算してみよう。有効桁数を8桁にして計算した積和行列 $X'X$ は〔Table 11.2〕に示した通りである。この行列を見ると，第1列と第3列（または，第1行と第3行）がかなり似た値である。しかし，特異行列でないことは明らかである。実証分析の経験

〔Table 11.2〕 積和行列 $X'X$

	(1)	(2)	(3)
(1)	19.000000	13.287000	19.027489
(2)	13.287000	9.708317	13.303783
(3)	19.027489	13.303783	19.055041

が豊富な読者は回帰分析で〔Table 11.2〕のような不安定な積和行列が得られたならば推定値 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ が極めて信頼できないものになると考えるであろう。また，実証分析過程では緻密なモデルになるほどこのような不安定な積和行列が得られる可能性が高いことも承知しているであろう。

有効桁数を8桁にしたままで逆行列 $(X'X)^{-1}$ を求めてみると〔Table 11.3〕のようになる。この逆行列の値を見ただけでは計算精度はわからないから，精度を確めるためにはこの逆行列に元の積和行列を乗じて単位行列になるか調べてみよう。結果は〔Table 11.4〕に示す通りである。とうてい単位行列とは呼べない行列である。これでは安心して逆行列を使うことはできない。

〔Table 11.3〕 逆行列 $(X'X)^{-1}$（有効桁数8桁）

	(1)	(2)	(3)
(1)	115812.92	−676.81162	−115172.92
(2)	−676.36786	6.3340641	670.96756
(3)	−115173.25	671.41077	114538.00

〔Table 11.4〕 $(X'X)^{-1}(X'X)$（有効桁数8桁）

	(1)	(2)	(3)
(1)	1.3000	0.0000	0.2000
(2)	−0.0020	1.0002	−0.0010
(3)	−0.2000	−0.1000	0.8000

それでは，ここで有効桁数を一挙に18桁まで上げて同様の計算をしてみよう。出来上った積和行列は，データの桁数が短いので，有効桁数8桁で計算した〔Table 11.2〕と比べてどの要素も上5～6桁が変わらないので掲載は割愛する。この積和行列から計算した逆行列は〔Table 11.5〕である。〔Table 11.5〕の逆行列を〔Table 11.3〕の逆行列と比較すれば，これが同じ行列から計算された逆行列だとは想像もつかないほど違っていることがわかる。これが，有効桁数の違いによる計算精度の実態なのである。〔Table 11.5〕の逆行列の精度を確かめるために元の積和行列と掛け合わせてみたのが〔Table 11.6〕である。〔Table 11.6〕を見れば，〔Table 11.5〕の逆行列の精度の方が〔Table

〔Table 11.5〕 逆行列 $(X'X)^{-1}$（有効桁数18桁）

	(1)	(2)	(3)
(1)	233959.94…	−1365.6685…	−232668.16…
(2)	−1365.6685…	10.353032…	1356.4655…
(3)	−232668.16…	1356.4655…	231384.74…

〔Table 11.6〕 $(X'X)^{-1}(X'X)$（有効桁数18桁）

	(1)	(2)	(3)
(1)	1.0	0.0	$-0.0_{10}3$
(2)	$0.0_{12}1$	1.0	$0.0_{12}3$
(3)	$0.0_{10}1$	$0.0_{10}1$	1.0

注）0.0_k は小数点以下0が k 個続くことを示す。

11.3〕の逆行列より高いことは一目瞭然である。〔Table 11.6〕はほぼ完全な単位行列といっても差し支えない。

有効桁数を8桁と18桁にした2つの実験で積和行列と逆行列の精度が非常に違うことがわかった。それでは実際の回帰係数や決定係数の推定値はどのようになるか見てみよう。IBM 1620 を8桁精度，18桁精度で計算した場合，IBM 370 を単精度，倍精度で計算した場合，UNIVAC 1106 を単精度，倍精度で計算した場合の6通りについて同じプログラムで回帰分析をしてみた。この実験結果は〔Table 11.7〕にまとめた。R^2 は決定係数である。

さて，単精度の結果を3機種について比較してみよう。回帰係数 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ はすべての値がバラバラである。定数項 $\hat{\beta}_0$ に注目して見れば，IBM 1620 が −6166.9, UNIVAC 1106 が −10259.25, IBM 370 が −53920. と同じモデルとデータ，それに同じプログラムで計算した結果であるとは思えない程の違いである。IBM 1620 と IBM 370 とでは10倍も違っている。$\hat{\beta}_1$ については，IBM 370 が 227.125, IBM 1620 が −39.34, UNIVAC 1106 が −15.33…と似ても似つかない。$\hat{\beta}_2$ についても，かなりの違いが見られる。それでは，回帰分析で重要な決定係数 R^2 はどうであろう。本来，$0 \leqq R^2 \leqq 1$ であるはずが，IBM 370 では −38.79 と不思議な結果である。また，UNIVAC 1106 では 1.32 と1を越えている。IBM 1620 は一見もっともらしい値である。エコノメトリクスの専門家は筆者がうそを書いていると思うであろう。しかし，この実験は実際に行なっており，計算結果も〔Table 11.7〕の通りであることは事実である。

ちなみに，IBM 370 の精度で得られた逆行列に元の積和行列を掛けてみよう。〔Table 11.8〕がその結果である。本来，この計算結果は単位行列になるはずである。計算誤差がどのくらいひどいものであるかがわかっていただけるであろう。

〔Table 11.8〕 $(X'X)^{-1}\cdot(X'X)$（IBM 単精度）

	(1)	(2)	(3)
(1)	3.0	1.0	−15.0
(2)	0.0625	1.0	0.125
(3)	−2.0	0.0	17.0

この計算において IBM 1620 で有効桁数を8桁にした時の結果だけを入手していたならば，研究者は $R^2=0.943\cdots$ なる結果に満足し，あるいは不思議に思いながらも，この分析の結論をとんでもない方向に導くことになったかもしれないのである。

それでは，倍精度の結果を見てみよう。驚くことに，単精度ではあんなにバラバラであった回帰係数が3機種とも完全に一致してしまったのである。決定係数 R^2 も同様である。そして，正確な決定係数 R^2 は0.6851…であったのである。単精度の結果からは倍精度の結果は想像もできない。

単精度の時の IBM 370 と UNIVAC 1106 の決定係数は，そこに何か異常なことが起っているという警告にはなるが，コンピューターへの不信感は募るばかりである。多くの読者はこの結果にびっくりしたであろう。

IBM 370 や UNIVAC 1106 の単精度とは有効桁数が何桁なのであろうか，また，倍精度ではどのくらいの長さになっているかを調べてみる必要がある。IBM

〔Table 11.7〕 推定値の比較 $(y_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{1i}+\hat{\beta}_2x_{2i}+u_i)$

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R^2
単 IBM 1620（8桁）	−6166.900	−39.34000	6225.400	0.943534
精 IBM 370（単精度）	−53920.000	227.12500	53472.000	−38.799500
度 UNIVAC 1106（単精度）	−10259.250	−15.33886	10297.125	1.321545
倍 IBM 1620（18桁）	−12549.281…	−2.0393172…	12570.433…	0.68513949…
精 IBM 370（倍精度）	−12549.281…	−2.0393174…	12570.433…	0.68513950…
度 UNIVAC 1106（倍精度）	−12549.281…	−2.0393172…	12570.433…	0.68513950…

370 や UNIVAC 1106 のような汎用コンピューターは，16進法とか2進法といった，10進法の概念に慣れている一般の読者にはわかり難い演算原理を採用している。10進法の桁数に換算すると，おおよそ次のようになる。

IBM 370	単精度	6.3～ 7.2 桁
	倍精度	15.9～16.8 桁
UNIVAC 1106	単精度	7.8～ 8.1 桁
	倍精度	17.7～18 桁

この実験結果から，エコノメトリクスにおいては可能な限り倍精度で計算することをすすめたい。単精度で計算している場合でも，今回の実験で見たようなことが起らないこともあるだろう。しかし，単精度だけで計算をしている限り，計算結果が誤差を持っているか否かは全くわからない。もし，決定係数が1を越えるとか，負になるとか，回帰係数の大きさや符号条件といった理論的に制約のある値が異常な値をとるようなことがあれば，幸運にも計算誤差が相当に発生しているということを知ることができる。しかし，このようなことは稀であろう。この点，倍精度で計算していれば安心できる結果を得ることができる。

11.2 クライン・モデルによる実験

前節と同様の実験を L. R. Klein〔5〕の Model I で行なってみよう。Klein は，このモデルのパラメーターを最尤法によって計測した。計測した当時は1940年代後半であるから，まだ今日のようなコンピューターは存在していなかった（ペンシルバニア大学の試作機である ENIAC のようなコンピューターの時代である）。このような時代に，Klein Model I のパラメーター推計作業を行なうことはさぞ大変な作業であったことだろう。

Klein Model I の原型は，次のようなモデルである。

$$C=\alpha_0+\alpha_1\Pi_{-1}+\alpha_2\Pi+\alpha_3(W_1+W_2)+u_1$$

$$I=\beta_0+\beta_1\Pi_{-1}+\beta_2K_{-1}+\beta_3\Pi+u_2$$

$$W_1=\gamma_0+\gamma_1(t-1931)+\gamma_2(Y+T-W_2)_{-1}+\gamma_3(Y+T-W_2)+u_3$$

$$Y+T=C+I+G$$

$$Y=\Pi+W_1+W_2$$

$$\Delta K=I$$

記号は，以下の通りである。

C：消費需要，I：投資需要，G：政府経常購入＋純輸出，W_1：民間賃金所得，W_2：政府賃金支払，Π：法人利潤，T：法人所得税，Y：国民純生産，K：固定資本ストック

このモデルは，C, I, W_1, Π, K, Y の6つの内生変数を含む over-identifiable なモデルである。

最尤法は，ある条件の下で漸近的な有効性を持ち，かつ一致性を持ったパラメーターを与えてくれるが，計算手続が大変なので一致性を持ったパラメーターを算出する二段階最小自乗法等の推定法が次々と開発された。

Klein の Model I のパラメーターも，その後，数人の学者の手で検討されることになった。T. J. Rothenberg and C. T. Leenders〔6〕は上に示した Klein Model I をそのままの形で Klein と全く同じデータ〔Table 11.9〕を使って，二段階最小自乗法で再計測した。その結果，Klein の計測結果とはかなり違うパラメーターが計測されたと報告した（〔Table 11.10〕の(1)欄と(2)欄を比較せよ）。しかし，有効桁数を何桁にして計測したかは不明である。

このことがきっかけになって単に推定法の違いだけでなく，コンピューターの誤差累積問題が関係しているのではないかという疑いを持つ人々が現われた。R. Summers〔7〕は，Klein Model I そのものを用いないで，独自の実験用モデルを用いて，完全情報最尤法，制限情報最尤法，最小自乗法，二段階最小自乗法等の推定法のコンピューター精度を比較した。Summers の実験では，コンピューターの有効桁数が少ない時には，たとえわずか2本の方程式からなる簡単なモデルでも，先決変数相互間の相関が高い場合は，パラメーターが不正確になることがわかった。Summers の実験のもう一つの重要な結論は，彼の実験用モデルの場合には，コンピューターの有効桁数を8桁以上確保すれば，上記のパラメーター誤差はほとんど全部解消してしまうという点である。

A. Zellner は近年のエコノメトリクスのめざましい進歩を推進した代表的な学者の一人である。Zellner を中心に幾つかの貴重な実験が行なわれている。Stroud, Zellner, and Chan〔8〕はウィスコンシン州立大学で CDC 1604 というコンピューター（有効桁数約11桁）を用いて，Klein Model I の再推計を試みた。やはり同じデータ〔Table 11.9〕を用いている。Rothenberg=Leenders の実験結果と比較するために二段階最小自乗法を用いてパラメーターを計測した（〔Table 11.10〕の(3)欄）。Rothenberg=Leenders とほとんど同じ結果が得られていることがわかる。

Zellner 等は，この結果を綿密にチェックした結果，計算手続に間違いはなく正確に行なわれていることを

〔Table 11.9〕 Klein Model I のデータ

t	C	I	G	Y+T	K_{-1}	Π	W_1	W_2	Y
1920	39.8	2.7	4.6	47.1	180.1	12.7	28.8	2.2	43.7
1921	41.9	−0.2	6.9	48.3	182.8	12.4	25.5	2.7	40.6
1922	45.0	1.9	6.1	53.0	182.6	16.9	29.3	2.9	49.1
1923	49.2	5.2	5.7	60.1	184.5	18.4	34.1	2.9	55.4
1924	50.6	3.0	6.6	60.2	189.7	19.4	33.9	3.1	56.4
1925	52.6	5.1	6.5	64.2	192.7	20.1	35.4	3.2	58.7
1926	55.1	5.6	6.6	67.3	197.8	19.6	37.4	3.3	60.3
1927	56.2	4.2	7.6	68.0	203.4	19.8	37.9	3.6	61.3
1928	57.3	3.0	7.9	68.2	207.6	21.1	39.2	3.7	64.0
1929	57.8	5.1	8.1	71.0	210.6	21.7	41.3	4.0	67.0
1930	55.0	1.0	9.4	65.4	215.7	15.6	37.9	4.2	57.7
1931	50.9	−3.4	10.7	58.2	216.7	11.4	34.5	4.8	50.7
1932	45.6	−6.2	10.2	49.6	213.3	7.0	29.0	5.3	41.3
1933	46.5	−5.1	9.3	50.7	207.1	11.2	28.5	5.6	45.3
1934	48.7	−3.0	10.0	55.7	202.0	12.3	30.6	6.0	48.9
1935	51.3	−1.3	10.5	60.5	199.0	14.0	33.2	6.1	53.3
1936	57.7	2.1	10.3	70.1	197.7	17.6	36.8	7.4	61.8
1937	58.7	2.0	11.0	71.7	199.8	17.3	41.0	6.7	65.0
1938	57.5	−1.9	13.0	68.6	201.8	15.3	38.2	7.7	61.2
1939	61.6	1.3	14.4	77.3	199.9	19.0	41.6	7.8	68.4
1940	65.0	3.3	15.4	83.7	201.2	21.1	45.0	8.0	74.1
1941	69.7	4.9	22.3	96.9	204.5	23.5	53.3	8.5	85.3

〔Table 11.10〕 Klein Model I のパラメター比較

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
実験の種類 / パラメター		Klein (最尤法)	R−L (有効桁不明)	Zellner (CDC1604 11桁)	Zellner (IBM7094 倍精度)	Zellner (IBM7094 単精度)	鳥居・新井 (IBM1620 8桁)	鳥居・新井 (IBM1620 18桁)	鳥居・新井 (UNIVAC 1106倍精度)
C	α_0	16.78	16.5548	16.55	16.55	16.43	16.5451	16.5547	16.5547
	α_1	.23	.2162	.2162	.2162	.2141	.2153	.2162	.2162
	α_2	.02	.0173	.01735	.01730	.01172	.0181	.0173	.0173
	α_3	.80	.8102	.8102	.8102	.8162	.8103	.8101	.8101
I	β_0	17.79	20.2782	20.28	20.28	20.20	20.3212	20.2782	20.2782
	β_1	.55	.6159	.6159	.6159	.6138	.6171	.6159	.6159
	β_2	−.15	−.1578	−.1578	−.1578	−.1574	−.1579	−.1577	−.1577
	β_3	.23	.1502	.1502	.1502	.1527	.1488	.1502	.1502
W_1	γ_0	1.60	(比較不能)	(比較不能)	(比較不能)	(比較不能)	1.5099	1.5002	1.4969
	γ_1	.13	.1304	.1304	.1304	.1248	.1309	.1303	.1303
	γ_2	.16	.1467	.1467	.1467	.1250	.1460	.1466	.1466
	γ_3	.42	.4389	.4389	.4389	.4618	.4392	.4388	.4388

確認した。そして，〔Table 11.10〕の(1)欄の Klein の結果との違いは，パラメーター推計方法の違いによるものであると結論した。しかし，(3)欄の結果が二段階最小自乗法の場合の正しいパラメーターであるかどうかは判定できなかった。

その後，Zellner と Thornber〔9〕はシカゴ大学で IBM 7094 を用いて同じ実験を行なった。その結果，IBM 7094 の倍精度（有効桁数約17桁）では〔Table 11.10〕の(4)欄が，単精度（有効桁数約8桁）では(5)欄がそれぞれ計測された。この実験から得られる結論として，単精度で計算したのでは，正しいパラメーターは得られないということがいえる。

Zellner等の実験は，実証分析家に貴重な警告を与えた。しかし，以上の実験だけでは，「有効桁数が大きいほど安全である」ということがわかっただけである。有効桁数を何桁にすれば安心できるかという疑問には答えられない。

筆者達はこの疑問に答えて，有効桁数の信頼限界を算出するための一般的なルールを見つけ出すことは不可能ではないと考えている。またそれには，前に述べた誤差限界の推定の理論が役に立つと考えている。しかし，そのような方法をシステム化して一般的に利用可能にするまでには，まだしばらくの時間がかかりそうである。

そこで，ここでは IBM 1620 を用いて，有効桁数の信頼限界を経験的に確かめてみることにする。すなわち，有効桁数を1桁ずつ増やしながら計測を繰り返すのである。有効桁数が小さいうちは計測のたびにパラメーターの値は変化するが，有効桁数がある大きさ以上になると，もうそれ以上は有効桁数を増やしても同じパラメーター値が得られるだけになる。

私達の実験は，有効桁数8桁の場合から出発した。その結果は〔Table 11.10〕の(6)欄に示してある。そして有効桁数を次第に上げてみた。その結果，ついに有効桁数18桁のところでパラメーターは安定した。この結果は〔Table 11.10〕の(7)欄に示してある。

この実験による私達の結論はこうである。「Klein Model I」の場合，誤差のないパラメーターを得るためには，10進法で18桁相当の有効桁数を持つコンピューターが必要である。

そのようなコンピューターが，私達の手近にあるだろうか。それが次の問題である。一般に使われているコンピューターは，IBM 1620 のような可変長コンピューターではない。よほど特殊なことをしない限り単精度と倍精度しかあり得ないのである。そこで，色々なコンピューターについて倍精度で同じ実験をしてみて，その結果を〔Table 11.10〕の(7)欄と比較してみればよいことになる。私達はまだ，すべての代表的コンピューターについて実験を終っていない。現在までの実験では，IBM 370 を倍精度で使用した場合には，精度が若干悪い。UNIVAC 1106 を倍精度で使用した場合は〔Table 11.10〕の(8)欄に示すように，(7)欄のパラメーターと完全に一致していることがわかる。

12. 変数変換による回帰分析

回帰分析において安心して使える精度の回帰係数を得るためには，倍精度で計算すればよいことがわかった。それでは，コンピューターを倍精度で使えば常に安心できる結果が得られるかというと，必ずしもそうではない。コンピューターを倍精度で使用するだけでなく，エコノメトリクスのアルゴリズム（計算手順）にも工夫を加えて，分析結果の精度を確保することを考えなければならない。

回帰分析の方法はエコノメトリクスの教科書では，原点まわりの積和行列を用いるか，平均値まわりの積和行列を用いるかの2通りしかない。しかし，これをコンピューターのプログラムにして計算する段になると，実に色々なアルゴリズムが考えられる。回帰分析の精度がアルゴリズムによって大きく左右されることを初めて確かめたのは Longley である。しかし，彼の指摘は一向に実証分析家の注意をひかずに今日に至っている。

また，R. Hall も積和行列での誤差累積をできるだけ小さくするために，変数に対し色々な変換をほどこして回帰分析を行なうことを提案した。現在，よく行なわれているアルゴリズムとしては，次のようなものがある。

第1は，データのオーダー調整を行なう方法である。しばしば，計測に用いるデータのオーダーが非常に大きく違っていることがある。このような場合は，あらかじめデータのオーダーを揃えておいて回帰計算を行ない，後で回帰係数のオーダーを元に戻してやるというものである。このオーダー調整の効果は大きい。実験をしてみよう。

〔Table 12.1〕のデータを用いて，次式の回帰モデルを計測してみる。コンピューターの有効桁数は18桁で行なう。

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}+u_i \qquad (12.1)$$

オーダー調整は，y と x_1 に揃えることにする。従って，x_2 には 10^8 を掛け，x_3 には 10^4 を掛ける。オーダー調整をして計測した結果は，計測後，元に戻してやる。このようにして得られた計測結果は〔Table 12.2〕に示した。オーダー調整をしない場合の結果と比較してみると，$\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ は上の2桁しか一致していない。また，$\hat{\beta}_3$ も上3桁しか一致していない。この結果から，オーダー調整が有効であることがよくわか

〔Table 12.1〕 データ

y	x_1	x_2	x_3
51799.	347553.	0.0098262348	74.80
62438.	382250.	0.0098088860	68.60
68740.	390914.	0.0098045541	64.90
75325.	398572.	0.0098007246	61.30
77582.	403439.	0.0097982906	60.15
84601.	425640.	0.0097871904	59.60
91306.	442533.	0.0097787436	58.10
97588.	456576.	0.0097717719	55.80
108879.	489343.	0.0097553383	54.95
118636.	516337.	0.0097418414	54.55
133240.	540252.	0.0097298838	53.20
149611.	580666.	0.0097096770	52.65
167055.	624872.	0.0096875739	52.35
174287.	634023.	0.0096829985	50.00
184668.	651586.	0.0096742166	48.65

〔Table 12.2〕 回帰係数の計測結果（有効桁数18桁）

	オーダー調整をしない場合	オーダー調整をした場合
$\hat{\beta}_0$	−9784850536.	−9739020328.
$\hat{\beta}_1$	489.659	487.368
$\hat{\beta}_2$	978475284721.	973892391331.
$\hat{\beta}_3$	−154.737	−154.316

るであろう。

第2は，平均値まわりの積和行列を作って計算する方法である。この方法はエコノメトリクスの教科書が教えている方法なので詳述しないが，回帰係数の精度を高めることになる。

第3は，直交変換の方法である。これには色々な方法があり，その効果はまちまちである。この直交変換の方法については稿を改めて書くことにしたい。

最後に，上の第1，第2の方法の変数変換のアルゴリズムを示しておこう。

説明変数マトリックスXに次のような変換をほどこして新しい説明変数マトリックスZを作る。

$$Z=XS \tag{12.2}$$

Sは，説明変数の数をpとすれば，$(p+1)\times(p+1)$の正則行列である。Sがどのような行列で，どのような変換能力を持つかは，後で述べることにする。また，回帰係数βは(10.1)式で計算される。再述しよう。

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y \tag{12.3}$$

(12.2)式で変換した新しいデータZを使って(12.3)式と同じ手続をとれば，私達が本来求めている回帰係数$\hat{\beta}$とは違う回帰係数$\hat{b}$が得られる。すなわち

$$\hat{b}=(Z'Z)^{-1}Z'y \tag{12.4}$$

である。この(12.4)式で計算した回帰係数$\hat{b}$はコンピューター誤差の被害をあまり受けていないはずである。そこで，回帰係数$\hat{b}$から本来求めようとしている回帰係数$\hat{\beta}$を計算できればよい。その方法は次式である。

$$\hat{\beta}=S\hat{b} \tag{12.5}$$

これは次のようにして証明できる。(12.2)式を書き換えれば

$$X=ZS^{-1} \tag{12.6}$$

である。従って

$$\begin{aligned}\hat{\beta}&=(X'X)^{-1}X'y\\&=\{(ZS^{-1})'(ZS^{-1})\}^{-1}(ZS^{-1})'y\\&=\{(S^{-1})'Z'ZS^{-1}\}^{-1}(S^{-1})'Z'y\\&=S(Z'Z)^{-1}S'(S^{-1})'Z'y\\&=S(Z'Z)^{-1}Z'y\\&=S\hat{b}\end{aligned} \tag{12.7}$$

となる。よって，(12.7)式は(12.5)式の手続きが正しいことを示している。

S変換行列について述べよう。まず，オーダー調整を行なうには，S変換行列を次のようにすればよいことがわかる。

$$S=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 10^{n_1} & & 0 \\ & & 10^{n_2} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 10^{n_p}\end{bmatrix} \tag{12.8}$$

ここで，$n_1, n_2, \cdots n_p$は，それぞれ対応する説明変数のオーダー調整したい桁数である。

また，上の第2の方法の平均値まわりの積和行列を作る場合のS変換行列は，次のようにすればよい。

$$S=\begin{bmatrix}1 & -\bar{x}_1 & -\bar{x}_2 \cdots & -\bar{x}_p \\ & 1 & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1\end{bmatrix} \tag{12.9}$$

ここで，$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_p$は，それぞれ対応する説明変数の平均値である。

このように，このS変換行列の形を少し変えることによって，色々な変数変換が可能となるのである。

〔文　献〕

〔5〕 L. R. Klein, Economic Fluctuations in the United States 1921-1941 (John Wiley & Sons, New York ,1950).

〔6〕 T. J. Rothenberg and C. T. Leenders, "Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems",

Econometrica, Vol. 32, No. 1-2, 57-76, January-April 1964.

〔7〕 Robert Summers, "A Capital Intensive Approach to the Small Sample Properties of Varions Simultaneous Equation Estimators," Econometrica, Vol. 33, No. 1, 1-41, January 1965.

〔8〕 A. Stroud, A. Zellner, and L. C. Chan, "Program for Computing Two- and Tree- Stage Least Squares Estimates and Associated Statistics," Systems Formulation and Methodology Workshop Paper 6308, University of Wisconsin, 1963. Revised by H. Thornber and A. Zellner, July 4, 1965.

〔9〕 A. Zellner and H. Thornber. "Computational Accuracy and Estimation of Simultaneous Equation Econometric Model", Econometrica, Vol. 34, No. 3, 727-729, July 1966.

鳥 居 泰 彦 （経済学部助教授）
新 井 益 洋 （産業研究所助手）