Title	市場均衡の安定性III : 粗代替財体系と局所的安定性
Sub Title	The stability of market equilibrium III : the gross substitute system and the local stability
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1975
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.68, No.6 (1975. 6) ,p.501(1)- 521(21)
JaLC DOI	10.14991/001.19750601-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19750601-0001

市場均衡の安定性Ⅲ

——粗代替財体系と局所的安定性——

福　岡　正　夫

1　前稿[1]で行った大域的安定分析のあとを受けて，本稿ではその局所分析をとり扱う。大域安定性の眺望ののちにあえて局所安定性に視野を狭める理由については，疑念をもつひとがいるかもしれないが，それはもっぱら前者がきわめて厳しい条件であるからにほかならない。ピーター・ニューマンがかつて例に引いたように，走っている自転車はふつう小さな動揺に対しては安定であるが，大きな動揺に対してはそうではない。また人の体も軽微な細菌の感染には発病しないとしても，重い感染の場合はそうはいかない。そしてこれらと同様，経済の世界でも，たとえば自由な為替市場は与件の小変化の下では安定たりえても，戦争のような大衝撃の下ではくつがえらざるをえないのである[2]。

2　われわれは前稿と同じく n 種の財のある市場体系をとり扱い，それらの財の価格を $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$，超過需要関数を $E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ と記す。また第 n 番目の財を価値尺度財として規準化を行った場合の財価格を $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{n-1}$，超過需要関数を $e_i(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{n-1})$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ と記すことも同様である。

ただ本稿では一貫して規準化された調整過程のみを考えるから，市場の調整方程式としては前々稿[3]の (17) 式すなわち

(1)　$\dot{q}_i=f^i[e_i(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{n-1})]$　$(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

の形のものを採用し，ここで右辺の $f^i(e_i)$ は sign-preserving な価格調節関数であるとする。

さて今日ではよく知られているように，(1)の孤立的な均衡点 $\{q_1^*, q_2^*, \cdots\cdots, q_{n-1}^*\}$ の安定条件は，その均衡点の十分近傍についてみるかぎり，これを線型近似の体系のそれに置きかえて考えることが可能である[4]。そこで以下においては，もっぱら局所的安定をとり扱う視点から，$Q_i \equiv q_i-q_i^*$, a_{ij}

注(1)　福岡正夫「市場均衡の安定性Ⅱ——粗代替財体系と大域的安定性」，『三田学会雑誌』1975年1・2月合併号。
(2)　P. Newman, "Approaches to Stability Analysis, *Economica*, February 1961, p. 16.
(3)　福岡正夫「市場均衡の安定性Ⅰ——序論的考察」，『三田学会雑誌』，1974年3・4月合併号，p. 16.
(4)　前掲論文，pp. 11-13 参照。

$\equiv \partial e_i(q_1^*, q_2^*, \cdots\cdots, q_{n-1}^*)/\partial q_i$, $k_i \equiv f^{i\prime}(0)$ と定義して，(1)の代りに

(2) $\dot{Q}_i = k_i a_{i1} Q_1 + k_i a_{i2} Q_2 + \cdots\cdots + k_i a_{i,n-1} Q_{n-1}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

であらわされる微分方程式系を考えていくことにする。(2)が(1)の右辺をテーラー展開し，その2次以上の部分を省略することによって得られた線型方程式システムであることはいうまでもないであろう。あるいはこれをより簡単に行列記号で示せば

(3) $\dot{Q} = KAQ$

のようであり，ここで K は k_i を対角元素とする $(n-1)$ 次の対角行列，A は a_{ij} から成る同じく $(n-1)$ 次の正方行列である。われわれはまた財の単位を適当に変換することをつうじて，(3)を

(4) $\dot{\hat{Q}} = \hat{A}\hat{Q}$

の形に帰着させることもでき[5]，その場合には $\hat{A}$ と KA とのあいだに $\hat{A} = uKAu^{-1}$ のような相似変換の関係が成立する[6]。したがって(4)の形で扱っていっても議論の一般性はまったく損われないが，以下での主題の性質を考慮するときには，むしろ(3)のままの形で分析を進め，Kを残しておくのが便利であると思われる。その理由は叙述の進行に応じて，次第に明らかになるであろう。

3　多数財市場の安定条件を，(3)の解 $Q_i(t)$ が

(5) $\lim_{t\to\infty} Q_i(t) = 0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

を満たすこととして動学的に定義し，安定問題のとり扱いをはじめて正しい軌道の上にのせたのはサムエルソンである[7]。彼は(5)が成立つための必要かつ十分条件として，KA の特性方程式 $|KA-\lambda I|=0$ の根の実部がすべて負になること

(6) $R(\lambda_i) < 0$ for all i

をあげ，さらにその主著の付録においては，当該の条件がいわゆるラウス＝フルウィッツの検定行列式によってあらわされることをも指摘した[8]。すなわちいま特性方程式 $D(\lambda) = |KA-\lambda I| = 0$ を展開して得られる多項式を

$$b_0\lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2} + b_2\lambda^{n-3} + \cdots\cdots + b_{n-1} = 0$$

と書き，ここで

$$b_0 = 1,\ b_1 = (-1)\sum k_i a_{ii},\ b_2 = (-1)^2 \sum k_i k_j \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix},$$
$$\cdots\cdots,\ b_{n-1} = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \cdots\cdots k_{n-1} |A|$$

注(5) K. Arrow and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I", *Econometrica*, October 1958, p. 525.

(6) M. Fukuoka and D. Kamiya, "The Stability Conditions and the Speeds of Adjustments: A Critical Note," *The Economic Studies Quarterly*, February 1964 参照。

(7) P. A. Samuelson, "The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics", *Econometrica*, April 1941 (reprinted in J. E. Stiglitz, ed., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, Vol. I. 1966).

(8) ditto, *Foundations of Economic Analysis*, 1947, pp. 429–435.

とすれば，(6)が満たされるための必要かつ十分条件は

$$(7)\quad b_1>0,\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}>0,\cdots\cdots,\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5\cdots\cdots 0 \\ b_0 & b_2 & b_4\cdots\cdots 0 \\ 0 & b_1 & b_3\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots b_{n-1} \end{vmatrix}>0$$

が与える一連の行列不等式によって示されるのである。

こうしたサムエルソンの安定条件論は，既述のように問題の正しい分析視角を切り拓いたものとして高く評価されねばならないが，ただ彼の結論そのものは安定性が成立つための数学的条件を記述したにすぎず，それがどのような経済的仮説の下で保証されるのかを充分に明らかにしていない憾みがある。(7)のラウス＝フルウィッツ的表示は KA の元素のタームであらわされているから，たしかに(6)に較べて有意味な仮説としての外見がややあらわであるが，それでもなおこれに直截な経済的解釈を下すことは（とりわけ次数が大きい場合には）いちじるしく困難であるといわねばならない。

そこでポスト・サムエルソンの安定理論の展開コースにおいては，経済的な見地からより直截にその意味が把握できるような係数行列の性質のうちに安定条件を探ろうとする研究が相次いで現われ，その関連でサムエルソンの理論より以前に誕生していたヒックスの静学的安定条件論をあらためて見直そうとする機運が促されたのであった。以下においてわれわれはこの系譜に沿ういくつかの業績をとりあげるが，その概観にあたっては，まず行列Aがどのような特定の性質を満たす場合に，それと KA の動学的安定との関連が生ずるかを究明していく方針を採りたいと思う。ピーター・ニューマンはそのサーヴェイ論文[(9)]において，(4)の $\hat{A}$ が交替的に種々の性質を満たす場合に，同じく $\hat{A}$ そのものの安定性がどうなるかを基軸として議論を展開しているが，これは本質的には KA に条件を課して同じく KA の安定性との関連を問うにひとしいであろう。われわれがこの接近法を採らないのは，メッツラーも述べているように[(10)]，

「価格の反応を支配している諸条件は，各個の市場の静学的な需給の条件よりもはるかに曖昧であり，……したがってできうることなら，調整速度からは独立な形で市場の体系を叙述するのが望ましい」

からである。われわれの見解によれば，メッツラー以後に展開されてきた議論の興味は，むしろこうした動学的な調整速度には依存しない超過需要関数のみの性質から体系の安定性について何がいえるかを明らかにするところにあり，ひいては後述するアロー＝マクメイナスたちのD安定性や全

注(9)　P. Newman, "Some Notes on Stability Conditions" *The Review of Economic Studies*, October 1959.

(10)　L. A. Metzler, "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions", *Econometrica*, October 1945, p. 284 (reprinted in P. Newman, ed., *Readings in Mathematical Economics*, Vol. I, 1968, p. 204 Also in L. A. Metzler, *Collected Papers*, 1973, p. 507)

安定性の議論を開花させる土壌を与えた点に見出されるのである。(11)

4　ところで，上記の主題の展開劇でまず舞台に登場する重要人物の1人は，A のいわゆる "Hicksian" 性すなわちヒックス自身のいう完全安定条件にほかならない。そこであらかじめヒックスの安定条件論について一応の説明を加えておくのが便利であろう。

ヒックスはもっぱら超過需要関数の性質のみを用いて静学的な安定条件を定式化したが，それによれば，いまある任意の財の価格がその均衡値からわずかに離反した場合，つぎのいずれの条件の下においても，当該財の超過需要が価格の変化と反対方向に動くならば，その体系は完全に安定 (perfectly stable) である。その条件というのは，(イ)他の財の価格がすべて不変にとどまる場合，(ロ)他の1個の財の価格がその市場の均衡を回復するように調整される場合，(ハ)他の2個の財の価格がそれらの市場の均衡を回復するように調整される場合，……こうして順次に調整される価格の数を増していって，最後に価値尺度財（第 n 財）を除く，他のすべての財の価格が調整される場合にいたる。つぎに同様に，任意の財の価格が均衡値からわずかに離反した場合，上記の最後の条件が成立つ場合にのみ，すなわち価値尺度財を除く他のすべての財の価格が調整される場合にのみ，当該の財の超過需要が価格の変化と反対方向に動くときに，その体系は不完全に安定 (imperfectly stable) である。(12)

いま上記の数学的記号を用いてこれら2種類の安定条件をあらわすとすれば，(13) まず均衡点において

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\frac{de_r}{dq_r}=\sum_{j=1}^{n-1}a_{rj}\frac{dq_j}{dq_r}<0 \quad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)\\
&\frac{de_i}{dq_r}=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}\frac{dq_j}{dq_r}=0 \quad (i\neq r)
\end{aligned}
$$

が満たされるときに，体系は不完全に安定である。というのは，この場合第一の不等式が，r 財の価格の変化とその超過需要の変化とが反対方向を動くことをあらわしており，第二の等式が，r 財以外の財の価格がすべてそれらの市場の均衡を回復するように調整されることをあらわしているからである。そこで元素 a_{ij} に関する $H\equiv|A|$ の余因数を H_{ij} として，(8)を de_r/dq_r について解けば

$$
(9)\quad \frac{de_r}{dq_r}=\frac{H}{H_{rr}}<0 \quad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)
$$

注(11)　$\hat{A}$ の性質が A のそれと一致するのは，調整速度 k_i がすべての財について同じ値をとる場合のみである。しかしこれは，財をある特殊な単位で測っているからであって，一般には成立しない。いまある1財の単位のみを2倍にすれば，その財の超過需要量は2分の1になり，価格したがって価格の変化率は2倍になるから，調整速度はその財のみについては4倍になる。Cf. Fukuoka and Kamiya, *op. cit.*, p. 77.

(12)　J. R. Hicks, *Value and Capital*, 1939, 2nd ed., 1946, pp. 66-67.

(13)　Hicks, *op. cit.*, pp. 315-316. なお J. L. Mosak, *General Equilibrium Theory in International Trade*, 1944, pp. 40-41, O. Lange, *Price Flexibility and Employment*, 1944, pp. 91-94 (P. Newman, ed., Readings, Vol. I, pp. 178-181), 安井琢磨「経済的均衡の動学的安定条件」,『安井琢磨著作集』第3巻, 1971, pp. 133-136 などをも参照。

を得る。したがってヒックスの不完全安定の条件は，Aの行列式Hとそれより次数が1個少ないすべての首座小行列式とが異なる符号をとることである。

他方，体系が完全に安定であるときには，価格が不変にとどまる財の個数は任意であってよいわけであるから，そのような財の数を1個ずつ増やしていくことによって，(8)の等式の数は1個ずつ減っていき，それと同時に変数の数もまた1個ずつ減っていく。したがってそれらさまざまな次数の体系を，同じく de_r/dq_r について順次に解くことによって，

$$(10)\quad a_{ii}<0,\ \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}<0,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{sgn}\, H=\mathrm{sgn}\,(-1)^{n-1}$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1,\ i\neq j\neq k)$$

が得られ，結局ヒックスの完全安定の条件は，Hの奇数次の首座小行列式がすべて負，偶数次の首座小行列式がすべて正となることによってあらわされる。そこで行列 A が(10)の条件を満たすときに，われわれはそれをヒックス行列 (Hicksian) と呼ぶのである。

さてこのようなヒックスの安定条件は調整速度 k_i とはまったく無縁な形で定式化されているから，一般にはそれに依存する動学的安定条件とは稀薄な関係しかもちえないことが予想される。事実いまサムエルソンが与えた数字例

$$(11)\quad A=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

について考えてみれば，左の事例では $H=2,\ H_{11}=1,\ H_{22}=-2$ となるから，それは明らかにヒックスの意味で完全安定でも不完全安定でもない。しかし KA の特性方程式は $\lambda^2+(2k_1-k_2)\lambda+2k_1k_2=0$ となるから，$k_1=k_2$ であれば特性根の実部はつねに負となって，動学的には安定である。他方，右の事例においては，$H=-1,\ H_{11}=1,\ H_{22}=1$ となるから，それはヒックスの意味で不完全に安定であるが，KA の特性方程式は $\lambda^2-(k_1+k_2)\lambda-k_1k_2=0$ となるから，$k_1,\ k_2$ の値いかんにかかわらず特性根の一方は正の実数となって動学的には不安定である[(14)]。ゆえにこれらの事例から，ヒックスの不完全安定は真の動学的安定にとって必要条件でもなければ十分条件でもなく，また完全安定も動学的安定にとって必要条件でないことが知られるのである。ではヒックスの完全安定は，動学的安定にとって十分条件たりうるかといえば，この点についてもサムエルソンが1944年の論文[(15)]で示したところに倣って，

$$(12)\quad A=\begin{bmatrix} \epsilon & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \epsilon-1 \end{bmatrix},\ \text{ここで}\ \epsilon\ \text{は任意の負数}$$

注(14) Samuelson, "The Stability of Equilibrium", *Econometrica*, April 1941, p. 112 (*The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, p. 554) n. 17.
(15) ditto, "The Relation between Hicksian Stability and True Dynamic Stability", *Econometrica*, July-October 1944 (*The Collected Scientific Papers* I, pp. 563-564).

という事例を考えれば，答が否であることが明らかとなる。事実(12)の奇数次の首座小行列式はすべて負，偶数次のそれらはすべて正であるから，ヒックスの完全安定の条件は満たされている。ところが，すべての $k_i=1$ とすれば，KA の特性方程式はいうまでもなく，

$$(\lambda-\epsilon)^4+(\lambda-\epsilon)^3+(\lambda-\epsilon)^2+(\lambda-\epsilon)+1=0$$

となり，簡単化のために $\lambda-\epsilon=y$ とおいて計算すれば

$$y^4+y^3+y^2+y+1=\frac{y^5-1}{y-1}=0$$

となるから，これを解いて四つの根

$$\cos 72^\circ \pm i\sin 72^\circ,\quad -\cos 36^\circ \pm i\sin 36^\circ$$

を得る。特性方程式の根はこれに ϵ を加えたものにほかならないから，いま ϵ を0と $-\cos 72^\circ$ のあいだの負数として選べば，特性根のうち二つは正の実部をもつことになり，(12)は動学的に不安定とならざるをえない。

5　こうしてヒックスの二つの安定条件はいずれながら動学的安定条件にとって必要でもなければ十分でもなく，したがって一般にはこれらはまったく無関係であることが判明した。しかしこの事実は，いまだAがある特殊な経済的性質を満たす場合に，両者のあいだに緊密な関係が生ずることを妨げるものではない。ここでわれわれは本稿本来の主題に立入ることにし，まずn種の財のあいだに粗代替財の関係があることを仮定しよう。すなわち $A_{ij}\equiv\partial E_i(p^*)/\partial p_j$ とするとき，$A_{ij}>0$ $(i\neq j,\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ と考えるのである。すると超過需要関数のゼロ次同次性から明らかに $a_{ij}\equiv\partial e_i(q^*)/\partial q_j=p_nA_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ となるから，$p_n>0$ であるかぎりは

(13)　$a_{ij}>0$ $(i\neq j,\ i, j=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

の条件が満たされることになる。すなわちAの非対角元素はすべて正となるわけである。以下では行列Aのこの性質にもとづいて顕著な貢献をあげたメッツラーの名に因んで，(13)を満たすAをメッツラー行列（Metzlerian）と呼んでいくことにしよう。するとまずそのような行列については，つぎの定理が成立する。

定理 1　Aがメッツラー行列であれば，ヒックスの完全安定（Aがヒックス行列であること）と KA の動学的安定とは同値となる。[16]

証　明

証明はつぎの二段階に分けて行われる。まず前段では行列 KA のどの対角元素の絶対値よりも大きい正の数 s を選んで，行列 $KA+sI$ をつくり，そのすべての特性根 ρ について $|\rho|<s$ となることが KA の安定性の必要かつ十分条件であることを示す。ついで後段ではヒックスの完全安

注(16)　Metzler, *op. cit.*, pp. 285 ff. (Newman, ed., *Readings*, pp. 205ff. Metzler, *Collected Papers*, pp. 508ff.)

定条件が，すべての ρ について $|\rho|<s$ となるための必要かつ十分条件であることを示す。

(i) KA の特性方程式 $|KA-\lambda I|=0$ と $KA+sI$ の特性方程式 $|KA+sI-\rho I|=0$ とを比較すればすぐ分るように，両者の根のあいだには $\lambda=\rho-s$ の関係がある。よってすべての ρ について $|\rho|<s$ が満たされれば，この関係からすべての λ の実部は負とならざるをえず，KA は安定となる。

つぎに逆命題のほうは，一般には ρ の一部に s より大きい絶対値をもつものがあっても，λ のすべてが負の実部をもつ可能性は除かれえないから，真であるとはかぎらない。しかし目下の場合は A したがって KA がメッツラー行列であることと，

(14) $k_ia_{ii}+s>0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

が保証されていることから，$KA+sI$ はすべて正の元素から成る行列となっており，したがって著名なフロベニウスの定理が使えて，最大の絶対値をもつ特性根は正で実数の単根となるのでなくてはならない。[17] そこでもし ρ のなかにその絶対値が s を越えるかあるいは s にひとしいものがあるとすれば，当該の実根もまた s を越えるか s にひとしいかでなくてはならず，これは λ のなかに正またはゼロの実根が含まれることを意味している。すなわち KA は不安定とならざるをえないのである。

(ii) つぎにヒックスの完全安定がすべての ρ について $|\rho|<s$ となるための十分条件であることをまず示そう。すでに述べたように $KA+sI$ の特性根のうち最大の絶対値をもつのは正の実根であるから，結局上記の命題を示すには，特性多項式

(15) $$(\rho-s)^{n-1}-\sum k_ia_{ii}(\rho-s)^{n-2}+\sum\sum k_ik_j\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}(\rho-s)^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}k_1k_2\cdots\cdots k_{n-1}H=0$$

が s より大きいかあるいは s にひとしい正の実根をもたないことをいえばよく，あるいは同じことであるが，

(16) $$\lambda^{n-1}-\sum k_ia_{ii}\lambda^{n-2}+\sum\sum k_ik_j\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}\lambda^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}k_1k_2\cdots\cdots k_{n-1}H=0$$

が正またはゼロの実根をもたないことをいえばよい。ところがヒックスの完全安定の条件(10)が満たされていれば，(16)の係数はすべて正となるから，デカルトの符号律によって(16)は正の根をもつことはできず，またいうまでもなくゼロの根をもつこともできない。よってヒックスの完全安定はすべての ρ について $|\rho|<s$ が成立つための十分条件である。

では最後にヒックスの完全安定がそのための必要条件でもあることを示すために，$KA+sI$ の m 次の首座部分行列 $K_mA_m+sI_m$ $(1, 2, \cdots\cdots, m\leqq n-1)$ を考えてみよう。$KA+sI$ の上記の最大根を r と書き，$K_mA_m+sI_m$ の特性根を一般に $\rho(m)$ と記せば，すべての $\rho(m)$ について $|\rho(m)|\leqq r$

注(17) G. Debreu and I. N. Herstein, "Nonnegative Square Matrices", *Econometrica*, October 1953, p. 598.

となることが知られているから，[18] $|\rho|<s$ したがって $r<s$ なら，すべての $\rho(m)$ について $|\rho(m)|<s$ となることが明らかである。ところが，さらに $|\rho(m)|<s$ となるためには

$$(19)\quad \operatorname{sgn} H_m=\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=\operatorname{sgn}(-1)^m$$

が成立つのでなくてはならない。事実 $|\rho(m)|<s$ となるためには，すでに示したところにしたがい K_mA_m が安定となるのでなくてはならないが，いま K_mA_m の根を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_m$ とすれば，根と係数との関係から，

$$(-1)^m(-1)^m k_1k_2\cdots\cdots k_mH_m=\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_m$$

したがって

$$(20)\quad k_1k_2\cdots\cdots k_mH_m=\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_m$$

が成立つ。そしてこれらの根がまずすべて実根であるとすれば，それらはいずれも負とならねばならないのであるから

$$(21)\quad \operatorname{sgn} H_m=\operatorname{sgn}(-1)^m$$

となる。つぎに複素根がある場合に，その数を c 個とすれば，これらの複素根がかならず共軛の形で現われること，ならびに共軛な複素根の積は正の実数となることから，c は偶数であり，したがって H_m の符号はのこりの $m-c$ 個の実数の積によって決定される。ところが c は偶数であるから，ふたたび

$$(22)\quad \operatorname{sgn} H_m=\operatorname{sgn}(-1)^{m-c}=\operatorname{sgn}(-1)^m$$

とならざるをえない。したがって，いずれにせよ $|\rho(m)|<s$ となるためには，H_m の符号と $(-1)^m$ のそれとが一致しなくてはならないことが明らかとなった。

ところが以上の関係は m が1から $n-1$ までのどの数をとっても，そのそれぞれの首座部分行列について成立つ関係であるから，これは行列式 H のあらゆる m 次の首座小行列式が $(-1)^m$ と同じ符号をもつことにほかならず，結局ヒックスの完全安定の条件が成立つことにほかならない。

よって標記の条件の下での，ヒックスの完全安定と真の安定との同値性の証明はすべて終了した。

6　さてメッツラーに負う上記の定理は，これを分解して

（I）A がメッツラー行列でかつ KA が安定であれば，A はヒックス行列である

という命題と

（II）A がメッツラー行列でかつヒックス行列でもあれば，KA は安定である

注(18)　Debreu and Herstein, *op. cit.*, p. 599.

という命題の二つにすることができるが，本節および次節ではさらにそのそれぞれの方向で開発された別個の定理を辿りつつ，議論の進展を図っていくことにしよう。

さきにも述べたように，KA の K の部分すなわち調整速度の部分に関する経験的情報は，超過需要関数に関するそれに較べればはるかに乏しいから，そうした調整速度の大小にはかかわりなく安定性の定理が開発できるとすれば，とりわけ有用であることはいうまでもない。以下で扱うところはこの種の安定性にかかわる事態の究明であるが，そのためにはつぎの2種類の安定性の概念を定義しておくのが便利である。

まずわれわれはアロー＝マクメイナスに倣って，行列Aがどのような正の対角行列DについてもDAを安定な行列たらしめるとき，すなわちDAの特性根の実部をすべて負ならしめるとき，AはD安定 (D stable) であるということにする[(19)]。つぎにまたわれわれはカーク＝サポスニックに倣って，Aのあらゆる次数の首座部分行列がD安定であるとき，Aは全安定 (totally stable) であるということにする[(20)]。これらの概念の経済的意味についていえば，前者は（価値尺度財を除く）すべての財の調整速度が正であるかぎり，それらがどんな大きさをとる場合にも成立する安定性の概念であり，後者はさらに任意個数の調整速度がゼロとなる場合にも（すなわち若干の財の価格がまったく硬直的となる場合にも）成立する安定性の概念であるということができよう[(21)]。

このような定義にもとづくならば，われわれはまず上記の命題(I)の仮定を全安定の仮定に置きかえることによって，つぎの定理を得ることができる。

定理 2　Aが全安定であるならば，それはヒックス行列である[(22)]。

証　明

定理1の後段の証明を検討すれば，そこではメッツラー行列の仮定はKAの安定性からその首座部分行列 K_mA_m の安定性をいうためにのみ要請されていることが分る。それゆえこれを全安定の仮定に置きかえれば，同様の推論をつうじて任意の $k_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\leqq n-1)$ について k_1k_2

注(19)　K. J. Arrow and M. McManus, "A Note on Dynamic Stability", *Econometrica*, July 1958, p. 449.

(20)　J. Quirk and R. Saposnik, *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, 1968, p. 166.

(21)　ここでの全安定の概念はランゲのそれ (Cf. O. Lange, *Price Flexibility and Employment*, p. 97) とは異なっていることに注意すべきである。

(22)　Metzler, *op. cit.*, pp. 282–283 (Newman, ed., *Readings*, pp. 202–203, Metzler *Collected Papers*, pp. 505–506)

ただしD安定性はかならずしもヒックス行列性を必要とはしないから注意を要する。たとえば $A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ とするとき，DA の二つの特性根は $d_1\geqq 4d_2$ なら負の実根，$d_1<4d_2$ なら実数部が負の共軛複素根となるから，いずれにしてもAはD安定となるが，首座小行列式には0のものが混じることになる。

いま一般にAの奇数次の首座小行列式がすべて非正，偶数次の首座小行列式がすべて非負となるときに，それを擬ヒックス行列 (quasi Hicksian) と呼ぶとすれば，Aがその意味で擬ヒックス行列であることが，任意，正の対角行列Dについて，DA のすべての実根が非正となるための必要かつ十分条件となる。この定理はさいきんアローによって提唱された。K. J. Arrow, "Stability Independent of Adjustment Speed", in G. Horwich and P. A. Samuelson ed., *Trade, Stability, and Macroeconomics*, 1974, Theorem 1参照。

結局，この定理の教えるところによれば，ヒックスの安定条件は，実根にもとづく単調な運動と複素根にもとづく振動とのうち前者の部分の安定性にかかわるものと考えられよう。

……$k_m H_m = \lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_m$，したがって $\mathrm{sgn}\, H_m = \mathrm{sgn}(-1)^m$ でなくてはならず，定理の成立は自明である。

では逆にAがヒックス行列であれば，全安定性やD安定性が成立つかといえば，一般にはそれがいえないことはすでに(12)の反例から明らかなところである。しかし，この方向の議論としては，つぎの興味深い定理が知られている。

定理3　Aがヒックス行列であれば，ある正の対角行列DについてDAは安定となる。[(23)]

証　明

証明の骨子としては，Dを適当に選べばDAの特性根がすべて負の単根となることを，帰納法によって示す。まずAの次数が1の場合，命題の成立は自明であるから，それが2以上であるとき，命題が $(n-2)$ 次の場合に成立つとして，$(n-1)$ 次の場合にも成立つことを示せばよい。

いまAから最後の行と列を除いた首座部分行列をA_1とし，Aを

$$(23)\quad A=\begin{bmatrix} A_1 & a_1 \\ a_{n-1} & a_{n-1,\,n-1} \end{bmatrix}$$

のように分割するとしよう。すると帰納法の仮定から，ある $(n-2)$ 次の正の対角行列 D_1 があって，D_1A_1 のすべての特性根が負の単根となることはいうまでもない。

ここでdを，あとで大きさを決めるある実数として，Aの分割(23)に応じて

$$(24)\quad D(d)=\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

のように $D(d)$ をつくってみる。そしてさらに $M(d)=D(d)A$ と定義すれば，

$$(25)\quad M(0)=D(0)A=\begin{bmatrix} D_1A_1 & D_1a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となるから，$M(0)$ は D_1A_1 の特性根とまったく同一の $n-2$ 個の負の単根をもち，また1個のゼロの根をもつ。ところが $M(d)$ の根はdの連続関数であるから，充分に小さいある $d>0$ を適当に選べば，$M(d)$ の根のうち少なくとも $n-2$ 個のものはやはり負の単根で，しかもヒックス行列の仮定から $\mathrm{sgn}|M(d)|=\mathrm{sgn}(-1)^{n-1}$ となるところから，のこりの根も負根たらざるをえない。よって定理の結論が成立つことは明らかである。

7　ここで本稿の目的からしてより重要な命題(II)の方向の進展に転じよう。n種の財がすべて

注(23)　M. Fisher and A. Fuller, "On the Stabilization of Matrices and the Convergence of Linear Iterative Processes", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 54, 1958, Theorem 1, pp. 418–423 および C. S. Ballantine, "Stabilization by a Diagonal Matrix", *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 25, 1970, Theorem 1, pp. 728–732 参照。

この定理をより一般的な形ではじめて証明したのはフィッシャー＝フラーであるが，ここでの証明はバランタインの二つの別証のうちきわめて簡便な前者に拠った。

粗代替財である場合には，たんにA行列がメッツラー行列となるばかりでなく，また価値尺度財をも含めた $\tilde{A}\equiv[\partial E_i(p^*)/\partial p_j]$ 行列もメッツラー行列となる。するとこの仮定の下では，(II) のようにヒックス行列の仮定がなくても，全安定性の成立つことがつぎの定理をつうじて明らかとなる。

定理 4 $\tilde{A}$ がメッツラー行列であれば，Aは全安定である。

証　明

証明の方針としては，まず(i) $\tilde{A}$ がメッツラー行列であれば，A が負の優対角行列となることを示し，ついで(ii) A が負の優対角行列であれば，それが全安定となることを示す。ここでAが負の優対角行列であるというのは，$a_{ii}<0\,(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ で，かつある正のベクトル$\{c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{n-1}\}$に対して

$$c_i|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}c_j|a_{ij}|\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

あるいは

$$c_i|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}c_j|a_{ji}|\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

のいずれかが成立つことである。

(i) ゼロ次同次性を用いれば，均衡点 p^* においては $\sum_{j=1}^{n}p_j{}^*A_{ij}=0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ となっているから，これを書きかえて

$$\sum_{j=1}^{n-1}p_j{}^*A_{ij}=-p_n{}^*A_{in}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{26}$$

を得，$p_j{}^*A_{ij}=q_j{}^*a_{ij}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\ ;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ の関係を用いて，

$$\sum_{j=1}^{n-1}q_j{}^*a_{ij}=-p_n{}^*A_{in}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{27}$$

を得る。ところが粗代替性の仮定から $A_{in}>0$ であるから

$$\sum_{j=1}^{n-1}q_j{}^*a_{ij}<0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{28}$$

となって，

$$\sum_{j\neq i}q_j{}^*a_{ij}<-q_i{}^*a_{ii}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{29}$$

が得られ，ここで $A_{ii}<0,\ A_{ij}>0\ (i\neq j)$ したがって $a_{ii}<0,\ a_{ij}>0\ (i\neq j)$ であることを考慮して

$$q_i{}^*|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}q_j{}^*|a_{ij}|\quad(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{30}$$

を得る。

つぎにワルラスの法則から，それを微分すれば，均衡点では

$$\sum_{i=1}^{n}p_i{}^*A_{ij}=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{31}$$

が成立つから，前と類似の議論によって

(32) $\sum_{i=1}^{n-1} q_i^* a_{ij} < 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

が得られ，ここでふたたび $a_{ii}<0,\ a_{ij}>0\ (i \neq j)$ を考慮することによって

(33) $q_j^*|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} q_i^*|a_{ij}| \quad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

が得られる。

以上の結果(30)および(33)から，粗代替性の下ではAが行についても列についても負の優対角性を満たすことが明らかとなった。[24]

(ii) 後段の議論はマッケンジーに負うが，これを1個の補助定理の形にまとめて示す。

補助定理 1 Aが負の優対角行列であれば，Aは全安定である。[25]

証 明

まずAの負の優対角性がその正則性を意味することの証明から始める。いまもしAが正則ではないとすれば，任意，正の対角行列Dに対して $DAx=0$ となるようなベクトル $x \neq 0$ が存在し，したがって

(34) $\sum_{j=1}^{n-1} d_j a_{ij} x_j = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

が成立つ。そこで $|x_k| = \max_i |x_i|$ となるようにkを選べば，そのようなkについても(34)が成立つから

(35) $d_k a_{kk} x_k = -\sum_{j \neq k} d_j a_{kj} x_j,$

ゆえに

(36) $$d_k|a_{kk}||x_k| = |d_k a_{kk} x_k| = |\sum_{j \neq k} d_j a_{kj} x_j|$$
$$\leqq \sum_{j \neq k} d_j |a_{kj}||x_j| \leqq \sum_{j \neq k} d_j |a_{kj}||x_k|$$

となって，

(37) $d_k|a_{kk}| \leqq \sum_{j \neq k} d_j |a_{kj}|$

が得られる。同様に $y'DA=0,\ y \neq 0$ から，やはりあるkについて

(38) $d_k|a_{kk}| \leqq \sum_{j \neq n} d_j |a_{jk}|$

注(24) 上記の推論のうちゼロ次同次性を用いる発想については T. Negishi, "A Note on the Stability of an Economy where all Goods are Gross Substitutes", *Econometrica*, July 1958 を，またワルラス法則を用いる発想については F. Hahn, "Gross Substitues and the Dynamic Stability of General Equilibrium", *Econometrica*, January 1958 を見よ。ここでの議論については M. McManus, "The Arrow and Hurwicz and Hahn Theorem", Stanford, Mimeographed, 1958 (Quirk and Saposnik, *op. cit.*, pp. 172-173 による) および T. Yasui, "A Note on Metzlerian Matrix", 『分配理論の研究——高田保馬博士古稀記念論文集』1964年所収を参照した。

(25) L. W. McKenzie, "The Matrix with Dominant Diagonal and Economic Theory", in K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes, ed., *Mathematical Methods in Social Science 1959*, 1960, p. 49. また Quirk and Saposnik, *op. cit.*, pp. 167-168 参照。

が得られるから，(37)と相俟ってAの対角優位の仮定と矛盾する。

つぎにAの安定性をいうために，行列$A-\lambda I$を考え，λの実数部を$R(\lambda)$と書けば，いうまでもなく

(39) $|a_{ii}-\lambda|\geqq|a_{ii}-R(\lambda)|$

である。そこでいま結論に反して$R(\lambda)\geqq 0$であったとすれば，$a_{ii}<0$であるところから$|a_{ii}-R(\lambda)|\geqq|a_{ii}|$となり，したがってもし$A$が優対角行列であれば，$A-\lambda I$もまた優対角行列たらざるをえない。ゆえに前のパラグラフの帰結が適用されて$A-\lambda I$は正則となり，これはλがAの特性根とはなりえないことを意味している。よってAの特性根の実部はすべて負となるほかはなく，その安定性が成立した。

ところで優対角性の定義から，Aが優対角行列であれば，そのあらゆる次数の首座部分行列もすべて優対角行列である。

そしてAが優対角行列で，ある正の数$c_1, c_2, \cdots\cdots, c_{n-1}$に対して$c_i|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}c_j|a_{ji}|\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$が成立てば，任意，正の対角行列$D$を与えて，$\bar{c}_i=c_i/d_i$とするとき（ここで$d_i$は$D$の正の対角元素），$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots\cdots, \bar{c}_{n-1}$について$\bar{c}_i|d_ia_{ii}|>\sum_{j\neq i}\bar{c}_j|d_ja_{ji}|\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$が成立つことも明らかである。よって$DA$は安定，すなわち$A$は$D$安定となり，前のパラグラフの議論と併せて，$A$が全安定となることが知られた。

8　以上の議論によって，われわれは前稿のそれと平行的に，粗代替性の仮定の下での局所的安定性を確立した。しかし補完関係にある財が皆無という条件は，とりわけ生産を考慮にいれる場合にはきびしい条件であるから，できうることなら補完財が認められる方向に議論を拡張することが望ましいであろう。

こうした拡張の一つとしては，すでに補助定理1として掲げた優対角行列の事例があげられるが，これとはまったく異なった方向として一部の経済学者の興味を惹きつづけてきたのは，いわゆる森嶋行列（Morishima Matrices）の事例である。[26]

森嶋が企図した一般化は，価値尺度財以外の財を2群R，Sに分け，$i, j\ (i\neq j)$がともにRに属するかSに属する場合には$a_{ij}>0$，それらの片方がRに属し他方がSに属する場合には$a_{ij}<0$と仮定することから成っている。これはそれぞれの群に属する財が同群の財に対しては粗代替財となり，他群の財に対しては粗補完財となることを意味しており，Aが

$$(40)\quad \begin{array}{l} \mathrm{sgn}\, a_{ij}=\mathrm{sgn}\, a_{ji} \\ \mathrm{sgn}\, a_{ik}a_{kj}=\mathrm{sgn}\, a_{ij} \end{array}$$

注(26)　M. Morishima, "On the Laws of Change of the Price-system in an Economy Which Contains Complementary Commodities", *Osaka Economic Papers*, May 1952.

の条件を満たすことと同値である。あるいはこれを経済的に表現すれば，第i財が第j財に対して粗の意味で代替財（補完財）なら，第j財も第i財に対して代替財（補完財）であること，また第i財が第j財の代替財のまた代替財（あるいは補完財のまた補完財）なら，第i財はかならず第j財の代替財であること，そして第i財が第j財の代替財の補完財（あるいは補完財の代替財）なら，第i財はかならず第j財の補完財であること，でもある。以上の定義から，もしRまたはSのいずれかが空であれば，この事例がメッツラー行列の事例に帰することは明らかであろう。

さてAが上記の条件(40)を満たす場合には，いうまでもなくKAもまた同種の条件を満たすから，いまKAの対角元素にそのいずれの絶対値よりも大きい正数sを加えて，適当な置換をほどこすならば，

$$\Pi[KA+sI]\Pi^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{R} & \overbrace{\quad}^{S} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} + & - \\ \hline - & + \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \}R \\ \}S \end{array}$$

のような符号配置を得る。今日森嶋行列と呼ばれているのは，一般にこのような符号配置の条件を具えた行列のことである。ここでもR，Sのいずれかが空であれば，この行列がフロベニウスの正行列に帰することはいうまでもない。こうしてAがメッツラー行列であることが$KA+sI$をフロベニウス行列たらしめるように，Aが(40)を満たすことが本質的に$KA+sI$を森嶋行列たらしめるわけであるが，以下ではいささか語法を変えて，より根源的にAが(40)を満たすこと自体がAの森嶋行列性の定義であると考えることにしよう。

するとさきのメッツラーの定理1に対応して，つぎの森嶋の定理が成立する。

定理5　Aが森嶋行列であれば，ヒックスの完全安定とKAの（動学的）安定とは同値である。

証　明

いま$M=KA+sI$とおけば，さきにも述べたようにある置換行列Πに対して

$$\Pi M\Pi^{-1}=M_{\Pi}=\begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RS} \\ M_{SR} & M_{SS} \end{bmatrix}$$

となり，ここで$M_{RR}>0$, $M_{SS}>0$ そして$M_{RS}<0$, $M_{SR}<0$となる。ところがドゥブリュー＝ハースタインが示したように[27]

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{RR} & M_{RS} \\ M_{SR} & M_{SS} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{RR} & -M_{RS} \\ -M_{SR} & M_{SS} \end{bmatrix}$$

のごとくであって，

$$M_p=\begin{bmatrix} M_{RR} & -M_{RS} \\ -M_{SR} & M_{SS} \end{bmatrix}$$

注(27)　Debreu and Herstein, *op. cit.*, p. 603, n. 8.

はいうまでもなく正行列である。そして M_{Π} と M_p が同一の特性根をもつことは明らかであるから，あとはまったく定理1をもって証明に代えることができる。

こうしてメッツラー行列と森嶋行列とのあいだにはきわめて密接な平行関係のあることが知られるわけであるが，さらに一歩を進めて，安定性そのものの十分条件という視点から両者を較べてみた場合は，どうであろうか。われわれはすでに前節の定理4で，体系が価値尺度財をも含めて粗代替性を満たす場合，換言すれば $n\times n$ の $\tilde{A}$ 行列がメッツラー行列である場合には，Aはかならず全安定となることを見た。これになぞらえて，いま A から $\tilde{A}$ へ森嶋行列性を拡張して仮定した場合には，果して同じ結論が導かれるであろうか。

この設問に対する答は一般にはノーであり，結果が安定になるか不安定になるかは，ひとえに価値尺度財と他の財との代替・補完関係にかかっていることが，最近の成果として知られている。[28]

この点をさらに究明してみるために，まず財の集合を，一般性を失うことなく $R=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$, $S=\{m+1, \cdots\cdots, n-1\}$ および価値尺度財 n の3群に分割してみよう。するとゼロ次同次性によって，定理4の場合と同様，均衡点では

$$(41)\quad \sum_{j\in R} p_j{}^*A_{ij}+\sum_{k\in S} p_k{}^*A_{ik}+p_nA_{in}=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

となるから，

$$(42)\quad \sum_{j\in R} q_j{}^*a_{ij}+\sum_{k\in S} q_k{}^*a_{ik}=-p_n{}^*A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$$

が得られる。そこでこれを適当に書きなおして

$$(43)\quad \begin{aligned} &\sum_{j\in R} q_j{}^*a_{ij}+\sum_{k\in S} q_k{}^*(-a_{ik})=-(p_n{}^*A_{in}+2\sum_{k\in S} q_k{}^*a_{ik}) \quad (i\in R)\\ &\sum_{j\in R} q_j{}^*(-a_{ij})+\sum_{k\in S} q_k{}^*a_{ik}=-(p_n{}^*A_{in}+2\sum_{j\in R} q_j{}^*a_{ij}) \quad (i\in S)\end{aligned}$$

とすれば，森嶋行列の仮定から，左辺の係数の符号はメッツラー行列の場合とまったく同じ配置となる。ゆえにここでもし右辺がすべて負であると仮定するならば，すなわち

$$(44)\quad \begin{aligned} &p_n{}^*A_{in}+2\sum_{k\in S} q_k{}^*a_{ik}>0 \quad (i\in R)\\ &p_n{}^*A_{in}+2\sum_{j\in R} q_j{}^*a_{ij}>0 \quad (i\in S)\end{aligned}$$

の条件がすべて満たされると仮定するならば，それがメッツラー行列の場合の $A_{in}>0$ (all $i\neq n$) の仮定に該当するわけであり，したがって定理4の場合と同様，Aの負の優対角性したがってその

注(28) 森嶋行列の性質をそのまま無条件にAから$\tilde{A}$へ拡張すれば，かならず不安定性が生ずる事実は，最初アロー＝ハーヴィッチによって指摘され，やがてバセット＝ハビバガイ＝カーク，ケネディなどによって証明された。これに対して森嶋は安定性が保証される方向に十分条件を補強した。Cf. K. J. Arrow and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I", *Econometrica*, October, 1958, L. Basset, H. Habibagahi, and J. Quirk, "Qualitative Economics and Morishima Matrices", *Econometrica*, April 1967, C. Kennedy, "The Stability of the 'Morishima System'", *The Review of Economic Studies*, April 1970, および M. Morishima, "A Generalization of the Gross Substitute System", *ibid*

全安定性を導くことが期待できよう。ところが森嶋行列の仮定をそのまま $\tilde{A}$ に拡張するとすれば，明らかに(44)の条件がすべて成立つことは不可能であるから，不安定性が生ずることになるであろう。

以下の二つの定理は，これらの主張の精確な証明を企図したものである。

定理 6 Aが森嶋行列で，その対角元素 a_{ii} がすべて負であり，かつ上記(59)の条件がすべて満たされるとすれば，Aは全安定である。[29]

証 明

(43)と(44)から

$$(45)\quad \begin{aligned} &\sum_{i\in R} q_j^* a_{ij} - \sum_{k\in S} q_k^* a_{ik} < 0 \quad (i \in R) \\ &-\sum_{j\in R} q_j^* a_{ij} + \sum_{k\in S} q_k^* a_{ik} < 0 \quad (i \in S), \end{aligned}$$

ゆえに

$$(46)\quad \begin{aligned} &-q_i^* a_{ii} > \sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}} q_j^* a_{ij} - \sum_{k\in S} q_k^* a_{in} \quad (i \in R) \\ &-q_i^* a_{ii} > -\sum_{j\in R} q_j^* a_{ij} + \sum_{\substack{k\in S\\ k\neq i}} q_k^* a_{ik} \quad (i \in S) \end{aligned}$$

となるが，仮定によって

$$(47)\quad \begin{aligned} &q_i^* |a_{ii}| > \sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}} q_j^* |a_{ij}| + \sum_{k\in S} q_k^* |a_{ik}| \quad (i \in R) \\ &q_i^* |a_{ii}| > \sum_{j\in R} q_k^* |a_{ij}| + \sum_{\substack{k\in S\\ k\neq i}} q_k^* |a_{ik}| \quad (i \in S) \end{aligned}$$

となるから，正の均衡価格 $\{q_1^*, q_2^*, \cdots\cdots, q_{n-1}^*\}$ についてAは負の優対角行列となる。ゆえに補助定理1によって，結論が成立する。

つぎに(44)の条件が成立しない事例として

$$(48)\quad \begin{aligned} &p_n^* A_{in} + \sum_{k\in S} q_k^* a_{ik} \leqq 0 \quad (i \in R) \quad \text{あるいは} \\ &p_n^* A_{in} + \sum_{j\in R} q_j^* a_{ij} \leqq 0 \quad (i \in S) \end{aligned}$$

を仮定してみよう。するとこんどはAの不安定性を証明することができるが，その前にそこで用いる補助定理をあらかじめ証明しておこう。

補助定理 2 Aがメッツラー行列でかつ安定であれば，Aは負の優対角行列である。[30]

証 明 Aのどの $|a_{ii}|$ よりも大きい正の数として s を選べば，仮定により $A+sI$ は正の行列

注(29) M. Morishima, *op. cit.*, pp. 181-183, また M. Ohyama, "On the Stability of Generalized Metzlerian Systems", *The Review of Economic Studies*, April 1972, p. 200.

(30) McKenzie, *op. cit.*, p. 58, Newman, *op. cit.*, p. 7.
この定理は，メッツラー行列の場合は，補助定理1の逆命題が成立つことを示すものである。

となるから，フロベニウスの定理によって絶対値において最大の，正の実根rがあり，すべて正の成分からなるベクトルxに対して

(49) $(A+sI)x=rx$

が成立つ。[31] ゆえに

(50) $Ax=(r-s)x$

となるが，仮定からAは安定であるから，$r-s<0$ であって，したがって $Ax<0$。そこで

(51) $\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}x_j<0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

を満たすような正の $\{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1}\}$ が存在したことになるが，(51)から$-a_{ii}x_i>\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$ で，しかも仮定から $a_{ii}<0,\ a_{ij}>0\ (i\neq j)$ であるから

(52) $|a_{ii}|x_i>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|x_j \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

となる。

定理 7　Aが森嶋行列でその対角元素 a_{ii} がすべて負であり，かつ上記(48)の条件が満たされるとすれば，KA は不安定である。[32]

証　明　いま(48)の前半の式が満たされるとすれば，ゼロ次同次性から

(53) $\sum_{j\in R} q_j{}^*a_{ij}\geqq 0 \quad (i\in R)$

を得る。

以下ではまずm次の部分行列 $A_m=[a_{ij}]\ (i,\ j\in R)$ が負の優対角性を満たしえないことを示す。帰謬法を用い，もしある正の $\{c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_m\}$ について

(54) $c_i|a_{ii}|>\sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}} c_j|a_{ij}| \quad (i\in R)$

となったとすれば，いうまでもなく

(55) $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}}\left(\frac{c_j}{c_i}\right)|a_{ij}| \quad (i\in R)$

を得る。

つぎに(53)から

(56) $\sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}} q_j{}^*a_{ij}\geqq -q_i{}^*a_{ii} \quad (i\in R)$

となるから，

注(31)　Debreu and Herstein, *op. cit.*, p. 598.
(32)　Kennedy, *op. cit.*, pp. 174-175, Basset, Habibagahi, and Quirk, *op. cit.*, p. 229, M. Ohyama, *op. cit.*, pp. 200-001.

(57) $\sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}}\left(\frac{q_j^*}{q_i^*}\right)|a_{ij}|\geqq|a_{ii}| \quad (i\in R)$

が成立ち，ゆえに $q_i^*/c_i=\beta_i$ とおくことによって，(55)，(57)から

(58) $\sum_{\substack{j\in R\\ j\neq i}}\frac{c_j}{q_i^*}(\beta_j-\beta_i)|a_{ij}|>0 \quad (i\in R)$

を得る。ところが $\beta_k=\max\beta_i(i\in R)$ であるようなkについては，明らかに(58)は成立ちえず，不合理が生ずる。

こうしてm次の部分行列 $[a_{ij}]$ $(i,\ j\in R)$ は優対角行列たりえないから，さきに証明した補助定理2によって，それは安定たりえない。ところが，もしそれが安定でなければ，ふたたびそのメッツラー行列性を考慮することによって，それはヒックス行列たりえない。そしてもし部分行列がヒックス行列でなければ，明らかに原行列 $A\equiv[a_{ij}]$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ もまたヒックス行列たりえない。ゆえに定理5で示したように，KA は不安定たらざるをえないのである。

(48)の後半の式が成立つ場合も，議論はまったく同様である。

以上に見たように森嶋行列の場合は，(44)が満たされてR群，S群の財がそれぞれ価値尺度財に対して充分に代替的であり，それが他群の財との補完関係を凌駕するようであれば，安定性が確保されるが，そのような条件が満たされなければ，不安定性が生ずる可能性がある。いまAの森嶋行列性をそのまま$\tilde{A}$に拡張するとすれば，いずれかの群の財と価値尺度財とはかならず補完財たらざるをえないから，(48)が成立して不安定性から免れることはできない。この意味において森嶋行列の事例は stability-preserving な性質を欠くといわねばならないであろう。

9　こうして補完財の存在は disturbing であり，粗代替財のモデルは依然として優位を保ちつづけるかのようにみえる。事実カークは最近の論文のなかで，連関財の定義が符号上対称である場合（$\mathrm{sgn}\,a_{ij}=\mathrm{sgn}\,a_{ji}$ の場合）には，Aが定性的に安定性を満たすのは，粗代替財体系の事例のみであることを指摘している。[(33)]

しかしこれはいうまでもなくAの符号のパターンのみから安定性を導く定性的な分析に限っての帰結であり，前稿の後半でとり扱った顕示選好の弱公理であるとか純取引量ゼロの事例のような定量的な条件をおく場合には，話は別である。たとえば均衡点において純取引量がゼロの事例を考えれば，所得効果はないわけであるから，個別主体の代替項行列の定符号性からAは対称で負の定符号となり，したがって補完財の有無にかかわらず，それは安定（事実のちに証明するようにD安定ならびに全安定）となるのである。

注(33)　J. Quirk, "Complementarity and Stability of Equilibrium", *American Economic Review*, June 1970.

この見地からすればシナリオのなかの悪役は補完財ではなくしてむしろ非対称的な所得効果であり，その点はヒックスの主著第1版の誤謬として，つとにモザックや安井によって指摘されたところである。[34] ところで一般には所得効果は欠如せずまた対称的でもないから，安定性が満たされるためには，それに何らかの量的制約が加えられるのでなくてはならないであろう。よく知られているように，この方向に一歩を進めたのはサムエルソンであり，彼のいわゆる負の準定符号 (quasi negative definite) の議論がそれに当っている。[35]

ここでAが負の準定符号であるというのは，$\frac{1}{2}(A+A')$ あるいは同じことであるが $A+A'$ が負の定符号となることにほかならない。一般にAは対称的な部分と非対称的な部分とに分けられて

$$A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}$$

と書かれるが，ここで2次形式

$$x'Ax=x'\frac{A+A'}{2}x+0,\ x\neq 0$$

が負となるとき，Aを負の準定符号と呼ぶのである。

さてサムエルソンが示したように，Aが負の準定符号であれば，それは安定となる。[36] しかし今日の見地からすれば，この主張はより一般的なリヤプーノフの定理の一つの特殊な形態とみなすことができる。そこで以下ではまずリヤプーノフの基本定理から出発して，それを援用しつつAのD安定，全安定を導く途を採択することにしよう。

定理8 (リヤプーノフの定理) ある正定符号の対称行列Bがあって，$BA+A'B$ が負の定符号となるとき，そしてそのときにのみ，Aは安定である。

証　明

注記の参考文献を参照せよ。[37]

上記の基本定理にもとづくならば，アロー＝マクメイナスに負うつぎの定理が容易に導かれる。[38]

定理9 ある正の対角行列 C があって，$CA+A'C$ が負の定符号となれば，AはD安定である。

証　明

注(34) Mosak, *op. cit.*, p. 42, 安井琢磨「経済理論の基本問題」第4巻,『経済学講座』, 東京経済研究所出版部, 1947, p. 54.（『安井琢磨著作集』第2巻, 1970, pp. 51–52)

(35) P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1947, pp. 140–141.

(36) *ibid.*, p. 438.

(37) W. Hahn, "Eine Bemerkungen zur zweiten Methode von Ljapunov", *Mathematische Nachrichten*, Band. 14, 1955, pp. 350ff., R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, 1960, p. 231 および pp. 242–243.

(38) Arrow and McManus, *op. cit.*, pp. 449–450. Quirk and Saposnik, *op. cit.*, p. 166.

任意，正の対称行列をDとし，$CD^{-1}=B$とすれば，Bもまた正の対角行列であり，したがってそれは正定符号の対称行列である。ところが

$$B(DA)+(A'D)B=CD^{-1}(DA)+(A'D)D^{-1}C=CA+A'C \tag{59}$$

で，$CA+A'C$は仮定によって負の定符号であるから，結局DAに対して$B(DA)+(A'D)B$を負定符号たらしめる正定符号のBがあったことになり，定理8からDAは安定，したがってAはD安定である。

ところでより精確にいえば，アロー＝マクメイナスが証明したのは，$C=I$の場合についてAが彼らのいわゆるS安定を満たすこと，すなわち任意，正定符号の対称行列Sに対してSAが安定性を満たすことである[39]。正の対角行列Dはいうまでもなく正定符号で対称であるから，S安定が成立てば当然D安定が成立ったことにもなるのである。

アロー＝マクメイナスはまた同時に，Sの正定符号性が十分条件であるのみならず必要条件でもあること，すなわちAが負の準定符号であって，かつ対称のSについてSAが安定になるとすれば，Sは正定符号とならねばならないことをも証明した。彼らの議論のこの部分は，園の定理[40]――Sが対称で，AおよびSAがいずれも負の準定符号であれば，Sは正定符号となる――を一般化したものと解することができるであろう。なぜならSAが負の準定符号であれば，それは安定となるが，その逆はかならずしも真ではないからである[41]。

以上で言及したS安定性の議論は，各財の価格の変化率がその財の超過需要にばかりでなく，他の財の超過需要にも依存する場合（ドン・パティンキンのいわゆる spill-over effect がある場合）に有用である。しかし本稿の意図としてはその種のモデルには立入らないので，以下ではふたたびD安定性の議論に限定して，むしろそれを全安定性の方向に一般化するのが目的に叶うであろう。

定理10　Aが負の準定符号であれば，それは全安定である[42]。

証　明

仮定から任意のベクトル$x\neq 0$に対して$x'(A+A')x<0$，したがって$x'Ax<0$となる。そこで

注(39)　この定理をはじめて示唆したのはサムエルソンである。Cf. Samuelson, *op. cit.*, p. 275. ただしサムエルソンがSを正の準定符号であってもよいと述べているのは誤まりである。アロー＝マクメイナスが指摘しているとおり

$$S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ \text{したがって}\ SA=\begin{bmatrix}3 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

とすれば，Sは正の準定符号，Aは負の準定符号であるが，SAは不安定である。

(40)　M. Sono, "Positive and Negative Relations and Stability Conditions", *Osaka Economic Papers*, March 1955.

(42)　ふたたびアロー＝マクメイナスの反例を借りて

$$S=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\ \text{したがって}\ SA=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -3 & -1\end{bmatrix}$$

とすれば，Sは正定符号，Aは負の準定符号，そしてSAは安定である。ところがSAは準定符号性を満たしていない。

(42)　Quirk and Saposnik, *op. cit.*, p. 167.

いま x の成分のうち m 個 $(0<m<n-1)$ を残して他を全部0とおけば，

(60) $x_m'A_mx_m<0$

が成立ち，ここで x_m は残った m 個の成分からなる非ゼロのベクトル，A_m はそれらに対応する m 次の首座部分行列である。すると A_m は負の準定符号，したがって A_m+A_m' は負の定符号であるから，I を定理9の C とみなすことによって，A_m は D 安定となり，よって A は全安定となる。

定理10の系　A が対称で負の定符号であれば，それは全安定である。

さきにも記したように，所得効果が無視できれば，代替項の定符号性から系の仮定が満たされるから，A はただちに全安定となる。これがサムエルソン＝ランゲによって初期に提唱された命題[(43)]の一般化であることはいうまでもないところであろう。

10　以上を要するに，D 安定性や全安定性の十分条件として一応候補者たる地位を獲得したのは，粗代替性の事例と負の準定符号性の事例である。前者は補完関係の欠如を，後者は所得効果の許容限度をそれぞれその経済的内容として意味するが，定理4の前半部で見たように，粗代替性の事例では A はかならず負の優対角行列となり，またニューマンが示したように[(44)]，A が負の優対角行列であれば，それはかならず負の準定符号となる。反面，その逆命題は明らかに成立しえないから，これら二組の条件のうちより一般的であるのは負の準符号性の条件のほうであるというべきであろう。

(経済学部教授)

注(43)　Samuelson, *op. cit.*, p. 271. O. Lange, *op. cit.*, p. 97 [Newman, ed., *Readings*, p. 184].

(44)　Newman, "Some Notes", p. 7.