Title	公企業の予算制約条件の下における最適税率について
Sub Title	Optimal taxation under the bedgetary constraint of the public sector
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1975
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.68, No.4 (1975. 4) ,p.316(14)- 327(25)
JaLC DOI	10.14991/001.19750401-0014
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19750401-0014

公企業の予算制約条件の下における最適税率について[1]

川　又　邦　雄

1 序

各財の市場が完全競争的であるとし，外部経済効果，公共財等の存在を無視するものとしよう。そのような経済では，家計の効用最大化行動と企業の利潤最大化行動がパレート最適な資源配分を導くことはよく知られている。ただし平均費用が逓減する企業では赤字が発生するから，政府はそのような企業を存続させるために何らかの手段を講じなければならない。ここでは説明の便宜上それらの企業はすべて公営であるものとし，そこでの生産は以下に述べるように社会的厚生を基準に決定されるものと仮定する。

さてこのような企業の赤字を租税で補填するものと想定すれば，いわゆる一括固定額税 (lump sum tax) を課することが可能でない限り，何らかの市場のゆがみ——限界代替率均等の条件(価格＝限界生産費の条件) からの逸脱——を回避することができない。この場合各財にどのように課税するのがよいかを調べること，そして，民間企業の直面する価格と公企業の潜在価格 (公企業の生産可能曲面の最適生産点における法線ベクトルと一致する) との乖離の条件について吟味するのが本稿の目的である。

これと類似の問題はラムゼイの租税についての古典的論文においてすでに取扱われており，ボァトーによる公共料金についての論文〔3〕も原理的に同様の問題をヨリ一般的手法で処理したものである。最近の論文ダイアモンド＝マーリーズ〔6, 7〕，ボーモル＝ブラッドフォード〔2〕，ディキシット〔8〕，スティグリッツ＝ダスグプタ〔15〕も関連した問題を新しい視点から論じ，上記の２つの古典的論文を発展させたものである。

本稿では，これらの議論を一般的なモデルによって整理するとともに，「最適税率」についての

注(1) 本稿の作成にあたっては，とりわけ慶應大学助教授大山道広氏よりていねいなコメントをいただいた。ここに感謝の意を表したい。もちろんありうべき誤りはすべて筆者の責任に帰するものである。

いくつかのよく知られた命題が，ある基本関係を特定化することによって導かれることを示すことにしよう。また従来特別な場合（需要関数と供給関数が分離可能な場合など）についてしか知られていなかった，消費税がプラスであるための条件をかなり一般的な場合について与えることにしよう。なお分析の手法は，本質的にはボアトー〔3〕のそれを踏襲しているが，手続きはかなり簡単化され，議論の本質が明瞭となっている。

2　問題の定式化

われわれの考察しようとする経済は，民間部門と公共部門から成り立っている。簡単化のために，民間部門は1人の消費者と1人の生産者によって，そして公共部門はただ1つの企業によって代表されるものとしよう。また経済にはすべてで n 種類の財が取引されるものと想定しよう。

消費者は効用関数

$$u=u(\underline{x}) \tag{1}$$

によってその満足が示されるものとする。ここで $\underline{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ は彼の消費ベクトルを示すものとする。彼は所得 I と消費価格ベクトル $\underline{p}=(p_1,, \cdots, p_n)$ が与えられたとき，

$$p\underline{x}=\mathrm{I} \tag{2}$$

の制約の下に(1)を最大にするものと想定しよう。以下では $\underline{p}$ はその最後の成分 p_n が1であるように選ばれているものとする。

さて効用関数の擬凹性，内点における二階連続微分可能性その他の通常の仮定の下では，消費行動の最適条件は

$$u_i/u_n=p_i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1) \tag{3}$$

と示されることはよく知られている。ただし $u_i(i=1, 2, \cdots n)$ は $u(x)$ の第 i 成分に関する偏微分を示すものとする。この(3)と(2)によって通常のように彼の需要関数

$$\underline{x}=\underline{x}(\underline{p}, \mathrm{I}) \tag{4}$$

が定義され，したがって間接的効用関数 $u=u(\underline{x}(\underline{p}, \mathrm{I}))$ が導かれる。以下では後者を

$$u=v(\underline{p}, \mathrm{I}) \tag{5}$$

と表わすことにしよう。

つぎに民間部門の生産者について，その生産関数

$$f(\underline{y})=0 \tag{6}$$

が定義されるものとしよう。ここで $\underline{y}=(y_1, \cdots, y_n)$ はこの生産者の純生産量を示すベクトルである。また生産者価格を $\underline{q}=(q_1, \cdots, q_n)$ とするとき彼は $q\underline{y}$ を最大にするように $\underline{y}$ を定めるものとする。以下の議論では $\underline{q}$ はその最後の成分 q_n が1になるように選ばれているものと想定する。

生産技術についての凸性と，生産関数の内点における二階連続微分可能性を含む通常の仮定の下では，この企業の最適生産の条件は

$$f_i/f_n=q_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{7}$$

と示されることは周知の事実である。ただしここで $f_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は f の第 i 成分に関する偏微分を示すものとする。さらに(6)の関係を考慮すれば，この企業の供給関数

$$\underline{y}=\underline{y}(\underline{q}) \tag{8}$$

が定義される。

さて最後に公企業の生産活動について述べよう。まずその生産関数が

$$g(\underline{z})=0 \tag{9}$$

と表現できるものとする。ここで $\underline{z}=(z_1,\ \cdots,\ z_n)$ は公企業の純生産量を示すベクトルである。生産技術についても私企業と同様微分可能性，凸性等の仮定をおくが，公企業については生産を行うための固定的投入物が大きく，したがって（仮りに生産物が1種類として）平均費用が逓減する局面がありうると考えよう。以下がは議論を鮮明にするために，均衡点 $\underline{z}$ における公企業の潜在価格（$\underline{z}$ における生産曲面の法線ベクトル）を $\underline{\pi}$ とするとき，それで評価した利潤が負であること，つまり

$$\underline{\pi}\,\underline{z}<0 \tag{10}$$

となることを仮定する場合がある。

さて公企業の予算上の要請は赤字の額 $-\underline{\pi}\,\underline{z}$ をあらかじめ外生的に定められた一定値 $-c$ 以内に抑えることである。ただし，それをうめあわせるために租税を用いることが許されるものとする。この場合，いわゆる一括固定額税（lump sum tax）を課することの可能性を認めれば，よく知られるように，消費および生産（私企業および公企業を含む）における任意の2財の間の限界代替率の均等がわれわれの経済の最適資源配分（消費者の効用を最大にするような達成可能な資源配分）をもたらす。しかし以下では租税は必ず消費税の形をとり，それを課せば消費者価格 $\underline{p}$ と生産価格 $\underline{q}$（ともにその最後の成分を1に規準化してあるものとする）の乖離をともなわざるをえないと想定しよう。以上の議論によって，われわれは公企業の予算制約式を

$$(\underline{p}-\underline{q})\underline{x}+\underline{q}\,\underline{z}=c \tag{11}$$

とあらわすことにしよう。ここで c は一定の数である。また左辺の第1項は総税収入を，第2項は公企業の利潤（負の場合にはその絶対値は赤字）を示すものである。(11)を不等号の制約にしないのは特に予算制約式が有効な制限となる場合に注意を集中するためである。

さて均衡においては，各財の需給がバランスするから

$$\underline{x}=\underline{y}+\underline{z} \tag{12}$$

が成立しなければならない。ここでわれわれの問題は，技術についての条件(6)，(9)および，需要・供給関数(4)，(8)を所与として，市場均衡の条件(12)と予算制約条件(11)を満たし，かつ消費者の効用が

最大になるような，$\underline{p}$, I（したがって$\underline{x}$）とq（したがって$\underline{y}$）および$\underline{z}$を選ぶことである。

さて市場の均衡条件の下では，予算制約式は

$$\underline{p}\underline{x}-\underline{q}\underline{y}=c \tag{11}'$$

表わされることが容易に示される。とくに公企業が存在しない場合（$\underline{z}=0$ のとき）には(11)′は

$$(\underline{p}-\underline{q})\underline{x}=c \tag{11R}$$

となり，われわれの予算制約式はラムゼイ〔12〕のそれと同一のものとなる。また消費税による赤字の補顛が許容されない場合には(11)は

$$\underline{q}\underline{z}=c \tag{11B}$$

となり，ボァトー〔3〕の制約条件に帰することが知られる。

3 モデルの分析

前節で述べたわれわれの問題を解くために，ラグランジ形式

$$\begin{aligned}\mathrm{U}=&v(\underline{p}, \mathrm{I})-\underline{\pi}(\underline{x}(\underline{p}, \mathrm{I})-\underline{y}(\underline{q})-\underline{z})\\&-g\phi(\underline{z})-\beta(\underline{p}\underline{x}(\underline{p}, \mathrm{I})-\underline{q}\underline{y}(\underline{q})-c)\end{aligned}$$

を考察しよう。ここで $\underline{\pi}=(\pi_1, \cdots, \pi_n)$, ϕ および β はラグランジ乗数である。

上の表現を p_j, I, q_j, z_j について偏微分してその結果を 0 とおけば，

$$v_j+\underline{\pi}(\partial\underline{x}/\partial p_j)+\beta(x_j+\underline{p}(\partial\underline{x}/\partial p_j))=0$$
$$(j=1, 2, \cdots, n-1) \tag{13}$$

$$v_{\mathrm{I}}+\underline{\pi}(\partial\underline{x}/\partial\mathrm{I})+\beta\underline{p}(\partial\underline{x}/\partial\mathrm{I})=0 \tag{14}$$

$$\underline{\pi}(\partial\underline{y}/\partial q_j)+\beta(y_j+\underline{q}(\partial\underline{y}/\partial q_j))=0$$
$$(j=1, 2, \cdots, n-1) \tag{15}$$

および

$$\pi_j=\phi\cdot g_j \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{16}$$

がえられる。ここで $v_j=\partial v/\partial p_j$, $v_{\mathrm{I}}=\partial v/\partial\mathrm{I}$, そしてたとえば $\partial\underline{x}/\partial p_j=(\partial x_1/\partial p_j, \cdots, \partial x_n/\partial p_j)$ を示すものとする。

さて $g_n\neq 0$ と仮定すると，(16)は

$$\pi_j/\pi_n=g_j/g_n \quad (j=1, 2, \cdots, n-1) \tag{17}$$

と書き変えることができる。右辺は第 i 財と第 n 財の間の限界代替率を示しているので，$\underline{\pi}=(\pi_1/\pi_n, \cdots\pi_{n-1}/\pi_n, 1)$ は公企業の潜在価格とよぶことができる。幾何学的には，このベクトルは生産関数が定める曲面の法線となっている。必要な場合には記号を定義しなおせばよいから，以下では $\pi_n=1$ と仮定することにする。

さて(14)の両辺に x_j を乗じ，それを(13)の両辺に加え，アントネリ＝ロワの公式

$$v_j+x_jv_1=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

（これについてはアントネリ〔1〕またはロワ〔13〕などを参照。(2)，(3)を用いての直接的証明も容易）を適用すれば

$$\sum_i[(\pi_i+\beta p_i)S_{ij}]=-\beta x_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots n-1) \tag{18}$$

がえられる。ここで S_{ij} はスルツキーの代替項の行列 $\underline{S}$ の第 $i,\ j$ 要素，つまり

$$S_{ij}=\partial x_i/\partial p_j+x_j(\partial x_i/\partial I) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を示すものである。

通常の仮定の下では $\underline{S}$ は対称で

$$\sum_i p_iS_{ij}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{19}$$

を満たす（ヒックス〔9〕p. 311）。よって(18)，(19)より S_{nj} を消去し，$\pi_n=1$ に注意すれば

$$\sum_{i\neq n}(p_i-\pi_i)S_{ij}=\beta x_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{20}$$

をうる。(2)

ここで

$$a_i=p_i-\pi_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots n-1) \tag{21}$$

と定義し，$a=(a_1,\ \cdots,\ a_{n-1})$，$q=(p_1,\ \cdots,\ p_{n-1})$，$\pi=(\pi_1,\ \cdots,\ \pi_{n-1})$，$x=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})$ とおき，S を $\underline{S}$ の最初の $(n-1)$ この行と列からなる行列とすれば，(20)は

$$aS=\beta x \tag{20$'$}$$

と表わすことができる。ここで S は負の定符号をもつと仮定しよう（たとえばサミュエルソン〔14〕p. 115 参照）。

民間部門の生産者についても同様の分析が可能である。代替項の行列を $\underline{F}$ とすれば，その $i,\ j$ 要素は

$$F_{ij}=\partial y_i/\partial q_j \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

で与えられる。これを用いると(15)は

$$\sum_i[(\pi_i+\beta q_i)F_{ij}]=-\beta y_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{22}$$

と表わされる。

通常の仮定の下では $\underline{F}$ は対称で

$$\sum_i q_iF_{ij}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{19}$$

を満たす。したがって(22)および(23)より F_{nj} を消去すれば

$$\sum_{i\neq n}(q_i-\pi_i)F_{ij}=\beta y_j \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{24}$$

が導かれる。

ここで

注(2) $\pi_n=1$ としない一般の場合には，β/π_n をあらたに β とおいたと考えればよい。

$$b_i=q_i-\pi_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{25}$$

と定義し，$b=(b_1,\ \cdots,\ b_{n-1})$，$q=(q_1,\ \cdots,\ q_{n-1})$，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_{n-1})$ とおき，F を $\underline{\mathrm{F}}$ の最初の $(n-1)$ この行と列とからなる行列とすれば，(24)は

$$b\mathrm{F}=\beta y \tag{24'}$$

と表わすことができる。ここで F は正の定符号をもつと仮定しよう。

つぎに，

$$t_i=p_i-q_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1) \tag{26}$$

と定め，$t=(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})$ と記すことにしよう。t_i は消費者価格と生産者価格の差，したがって財1単位当りの租税の大きさを示している。定義から $t=a-b$ であるから，(20)′ と (24)′ より

$$t=\beta(x\mathrm{S}^{-1}-y\mathrm{F}^{-1}) \tag{27}$$

が導かれる。

さて S が負の定符号，F が正の定符号をもつから，$\beta\neq0$（予算制約式が有効）であって，$x\neq0$ あるいは $y\neq0$ である（以下この条件はつねに満たされているものとする）限り，

$$\beta(ax-by)=\beta^2(x\mathrm{S}^{-1}x-y\mathrm{F}^{-1}y)<0$$

となる。他方(12)および a，b その他の定義から

$$ax-by=\underline{q}\,\underline{x}-\underline{q}\,\underline{y}-\underline{\pi}\,\underline{z}$$

であるから

$$\beta(\underline{p}\,\underline{x}-\underline{q}\,\underline{y}-\underline{\pi}\,\underline{z})>0 \tag{28}$$

したがって(11)より

$$\beta(c-\underline{\pi}\,\underline{z})<0 \tag{29}$$

であることが導かれる。したがって，たとえば $c\geqq0$，$\underline{\pi}\,\underline{z}<0$ の場合には $\beta<0$ となる。

4 モデルの性質

前節までの分析の結果，われわれの仮定の下においては，(20)′ 式が消費者価格 p と公企業の潜在価格 π の乖離の条件を，また (24)′ が生産者価格 q と潜在価格 π の乖離の条件を，その結果として(27)式が消費者価格 p と生産者価格 q の乖離の条件，つまり最適商品税の条件を与えることが明らかになった（ここでたとえば $p=(p_1, \cdots p_{n-1})$，$p_n=1$ である)。またラグランジ乗数 β の符号については (29)式が重要な情報を与えてくる。これらの結果を次に要約しよう。

補助定理1　消費者価格 p，生産者価格 q および公企業の潜在価格 π の間の乖離はつぎの条件によって特色づけられる。

$$a = p - \pi = \beta x S^{-1} \qquad (a)$$

$$b = q - \pi = \beta y F^{-1} \qquad (b)$$

$$t = p - q = \beta(xS^{-1} - yF^{-1}) \qquad (t)$$

ここで x, y はそれぞれ第 n 財を除いた財の消費量および（民間での）生産量，そして S および F はそれに対応する代替項の行列である。また β はスカラーであって，$c - \underline{\pi z}$ が正の場合には負，負の場合には正の値をとる。

注意1　この補助定理と類似の結果はラムゼイ〔12〕，ボアトー〔3〕，ダイアモンド＝マーリーズ〔6〕，スティグリッツ＝ダスグプタ〔15〕らによって，それぞれやや異なった仮定の下に導かれている。しかし彼等は本質的には上の3式のうちどれか1つの式のみを考察している。

なお公企業が存在しない場合には，補助定理の π は公企業の潜在価格という解釈を与えることはできないが，(12)式に対応するラグランジ乗数として依然として消えずに残ること，したがって補助定理の（t）はその場合にも（とくにラムゼイ〔12〕のケースにも）妥当性を失わないことに注意しておこう。

また民間企業の生産が収穫不変の条件に服す（したがって固定費の存在を無視する）なら，最大利潤は0となる（$\underline{qy} = 0$）となる。この場合には (11)′ 式は

$$\underline{px} = c \qquad (11DM)'$$

となるので，(7)とこの場合の(15)および(17)より $q = \pi$ となり，ダイアモンド＝マーリーズの〔6〕生産面における有効性の条件と斉合的な結果がえられることも注意しよう。したがって，この仮定の下では

$$p - q = \beta x S^{-1} \qquad (tDM)$$

という結論が導かれることとなる。

さて補助定理の条件を別の形に述べるために，弾力性の概念を導入しよう。まず（補償された）需要の弾力性を（Sの対称性に注目して），

$$\sigma_{ij} = -S_{ij} p_i / x_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

供給の弾力性を，同様に

$$\theta_{ij} = F_{ij} \cdot q_i / y_j \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

と定義しよう。ここでもちろん x_i, y_i はゼロでないと仮定している。

つづいて P（Q, X, および Y）をその第 i 対角要素が p_i（q_i, x_i および y_i）であるような $(n-1)$ 次の対角行列とし

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ n-1)$$

$$\Theta=(\theta_{ij}) \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

とおこう。すると定義から

$$\Sigma=-\mathrm{PSX}^{-1}$$

$$\Theta=\mathrm{QFY}^{-1}$$

となることは明らかである。

よってすべての価格および数量がゼロでないと仮定すればつぎの結論をうる。われわれの問題において，

定理 1　消費者価格と潜在価格の相対的乖離 $a\mathrm{P}^{-1}$，生産者価格と潜在価格の相対的乖離 $b\mathrm{Q}^{-1}$ および消費者価格と生産者価格の相対的乖離 $t\mathrm{Q}^{-1}$ はつぎの条件によって特色づけられる。

$$a\mathrm{P}^{-1}=-\beta 1\Sigma^{-1} \tag{a}$$

$$b\mathrm{Q}^{-1}=\beta 1\Theta^{-1} \tag{b}$$

$$t\mathrm{Q}^{-1}=-\beta 1(\Sigma^{-1}+\Theta^{-1})(\mathrm{I}+\beta\,\mathrm{diag}(1\Sigma^{-1}))^{-1} \tag{t}$$

ここで I は単位行列，1 はすべての成分が 1 であるベクトル，$\mathrm{diag}(1\Sigma^{-1})$ はその第 i 対角要素が $1\Sigma^{-1}$ の第 i 成分と同一であるような対角行列である。また β は補助定理 1 で述べたスカラー，その他の文字は $n-1$ 次の行列またはベクトルを示している。

証明　(*a*)，(*b*) の証明は補助定理 1 の (*a*) および (*b*) より明らかである。(*t*) を証明するために，定義から $\mathrm{P}=Q+\mathrm{T}$ であることに注目して，補助定理 1 (*t*) を用いると

$$t\mathrm{Q}^{-1}=\beta(x\mathrm{S}^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PQ}^{-1}-y\mathrm{F}^{-1}\mathrm{Q}^{-1})$$

$$=-\beta(1\Sigma^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{TQ}^{-1})-1\Theta^{-1})$$

をうる。したがって

$$(t+\beta 1\Sigma^{-1}\mathrm{T})\mathrm{Q}^{-1}=-\beta 1(\Sigma^{-1}+\Theta^{-1})$$

である。

ここで T が対角行列であることに着目して

$$\beta 1\Sigma^{-1}\mathrm{T}=\mathrm{diag}(\beta 1\Sigma^{-1})\,t$$

であることを用いれば定理の結論がえられる。

注意 2　定理 1 (*a*) は p と π との相対的乖離が代替項の行列の逆行列の列和に比例することを意味している。(*b*) および (*t*) についても同様の解釈が可能である。

定理 1 の系としてつぎの命題は容易に導かれる。

系1　すべての交差弾力性がゼロの場合には p, q および π の3つの価格の乖離はつぎの条件によって特色づけられる。

$$a_i/p_i = -\beta/\sigma_i \qquad (a)$$

$$b_i/q_i = \beta/\theta_i \qquad (b)$$

$$t_i/q_i = \frac{-\beta(\sigma_i^{-1}+\theta_i^{-1})}{1+\beta\sigma_i^{-1}} \qquad (c)$$

ここで $\sigma_i=\sigma_{ii}$, $\theta_i=\theta_{ii}$ とおいてある。

この系の最初の2つの条件は，相対的乖離が弾力性の逆数に比例することを意味している。最後の条件についても同様の解釈が可能である。この最後の条件はラムゼイ〔12〕，ディキシット〔8〕らによって導かれたものと同一である。

つぎの系2では便宜上 $\beta<0$ であると仮定しよう（補助定理1参照）。

系2　3つの財からなる経済においては(i)第1財および第2財が消費されている($x_1>0$, $x_2>0$) なら

$$\sigma_{31}\gtreqless\sigma_{32} \text{ にしたがつて } \frac{a_1}{p_1}\gtreqless\frac{a_2}{p_2}$$

であり，また(ii)第1財および第2財が民間企業で生産されている ($y_1>0$, $y_2>0$) なら，

$$\theta_{31}\gtreqless\theta_{32} \text{ にしたがって } \frac{b_1}{q_1}\gtreqless\frac{b_2}{q_2}$$

である。

証明　この場合には $\Sigma=-\mathrm{PSX}^{-1}$ の行列式を Δ とすると

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\sigma_{22}, & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{21}, & \sigma_{11}\end{bmatrix}$$

であり，仮定より $\Delta<0$ である。

他方(19)より

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ij}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

であるから，

$$\begin{aligned}a_1/p_1-a_2/p_2&=-\beta((\sigma_{22}-\sigma_{21})-(\sigma_{11}-\sigma_{12}))/\Delta\\&=-\beta((\sigma_{22}+\sigma_{11}+\sigma_{31})-(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{32}))/\Delta\\&=-\beta(\sigma_{31}-\sigma_{32})/\Delta\end{aligned}$$

が導かれる。したがって前半の主張が証明された。後半の証明についても同様である。

注意 3　これと類似の結果は，注意 1 (tDM) で示される場合について，コーレット＝ヘイグ〔4〕およびダイアモンド＝マーリーズ〔6〕らによって導出されている。

さて $p-q$ は消費者価格と生産者価格の差を示すが，その差が正であるような財には租税が課され，逆に負であるような財には補助金が与えられていると解釈することができる。つぎの 2 つの定理は 3 つの価格ベクトルの間に $p \geq \pi \geq q$ という関係が成立するための十分条件を与えるものである。ここでも $\beta<0$ が成立するものとして結果を述べよう。

定理 2　(i) 第 n 財以外のすべての財が正の量消費され ($x>0$)，それらの財が互いに代替財あるいは独立財 (すべての $i \neq j$, $i, j=1, 2, \cdots, n-1$ について $S_{ij} \geq 0$) なら $p \geq \pi$ である。(ii) 第 n 財以外のすべての財が民間企業によって正の量生産され ($y>0$)，それらの財が互いに代替財あるいは独立財 (すべての $i \neq j$, $i, j=1, 2, \cdots, n-1$ について $F_{ij} \leq 0$) なら $\pi \geq q$ である。また(iii)上の(i)(ii)の条件が満たされるなら $p \geq q$ である。

証明　(i) $-S$ は正の定符号をもち，その非対角要素が非正であるから $(-S)^{-1} \geq 0$ となる (たとえば Nikaido〔11〕p. 95 参照)。したがって補助定理 1 (a) から結論がえられる。

(ii)　(i)の場合と同様。

(iii)　$p-q=(p-\pi)+(\pi-p)$ であるから(i)(ii)より明らかである。

つぎの定理も上の結果と密接な関係をもつ。

定理 3　(i)すべての財の間の需要の交差弾力性 $\sigma_{ij}(i \neq j)$ が非正，かつ $\sigma_{in}(i \neq n)$ がすべて正なら $p \geq \pi$ である。(ii)すべての財の間の供給の交差弾力性 $\theta_{ij}(i \neq j)$ が非正，かつ $\theta_{in}(i \neq n)$ がすべて正なら $\pi \geq q$ である。また(iii)上の 2 つの条件が満たされるなら $p \geq q$ となる。

証明　(19)より $\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij}=0$ ゆえ，$i \neq n$ については仮定より

$$
\begin{aligned}
\sigma_{jj} &= -\sum_{i \neq j}^{n-1} \sigma_{ij} - \sigma_{in} \\
&> -\sum_{i \neq j}^{n-1} \sigma_{ij}
\end{aligned}
$$

となる。よって Θ の対角要素はすべて正で，しかもその列和はすべて正 (したがって Θ は優対角行列) となる。Θ の非対角要素は非正であるから，このことは $\Sigma^{-1} \geq 0$ を意味する(3)。したがって定理 1 (a)

注(3)　たとえば Nikaido〔11〕p. 386 参照。

と $\beta<0$ を用いると，われわれの求める結果がえられる。

(ii) (i)の証明と同様である。

(iii) (i)および(ii)より明らかである。

つぎの結果は最適税率に関して従来もっとも重要視されたものの1つである。同様の結果はラムゼイ〔12〕，ボアトー〔3〕，ダイアモンド＝マーリーズ〔7〕，ボーモル＝ブラッドフォード〔2〕などに見られる。

定理5　消費者価格（生産者価格）と公企業の潜在価格との差は，その変化による代替効果が消費量（生産量）と比例するような消費者価格（生産者価格）の変量に比例する。

証明　消費者価格の場合についての証明はつぎのとおりである。消費量の変化 Δx が x と比例するような消費者価格の変化 Δp は近似的に

$$\Delta p\mathrm{S}=\Delta x=\lambda x \quad (\lambda \text{ は一連のスカラー})$$

を満たし，したがって $\Delta p=\lambda x\mathrm{S}^{-1}$ とならねばならない。補助定理1 (a) によればこれは $a=\beta x\mathrm{S}^{-1}$ に比例する。

結　び

公企業の予算制約条件が資源配分の最適条件に及ぼす効果についての分析は，本稿のそれでつきるものではない。われわれの分析の前提の中のいくつか，たとえば民間企業の価格受容者としての行動の仮定は，明らかに独占的行動をもゆるす一般的仮定によっておきかえられねばならないであろう。また予算制約のパラメーター c が資源配分や価格の乖離の大きさに与える効果などについての分析も興味あるものであろう。しかしこれらの問題についての分析は，後の機会にゆずらなければならない。ただ本稿の分析が公企業の料金や商品税の決定に関して何らかの示唆と問題を与えるならば，われわれの目的の大きな部分はかなえられたといってよい。

参 考 文 献

〔1〕 Antonelli, G. B. "*Sulla Teoria Matematica della Economia Politica*" Pisa, Nella Tipografia del Folchetto, 1886, English translation "On the Mathematical Theory of Political Economy" In *Preferences, Utility, and Demand.* Edited by J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter and H. F. Sonnenschein, Harcourt Brace Jovanovich, Inc. 1971, pp. 333-364.

〔2〕 Baumol, W. J. and D. F. Bradford. "Optimal Departures from Marginal Cost Pricing", *American Economic Review*, 60 (June, 1970), 265-283.

〔3〕 Boiteux, M. "Sur la gestion des Monopoles Publics astreints a l'equilibre budgetaire", *Econometricca*, 24 (1956), 22-40.

〔4〕 Corlett, W. J. and D. C. Hague. "Complementarity and the Excess Burden of Taxation", *Review of Economic Studies*, 21 (1953-54), pp. 21-30.

〔5〕 Dasgupta, P. and J. Stiglitz. "On Optimal Taxation and Public Production", *Review of Economic Studies*, 39, (January, 1972), 87-104.

〔6〕 Diamond, P. A. and J. A. Mirrlees. "Optimal Taxation and Public Production: I Production Efficiency", *American Economic Review*, 61 (June, 1971) 8-27.

〔7〕 —— "Optimal Taxation and Public Production: II Tax Rules", *American Economic Review*, 61 (Lune, 1971) 261-278.

〔8〕 Dixit, A. K. "On the Optimum Structure of Commodity Taxes", *American Economic Review*, 60 (June, 1970), 295-301.

〔9〕 Hicks, J. R. *Value and Capital* Oxford At the Clarendon Press 1939, Second edition, 1946.

〔10〕 Mirrlees, J. A. "On Producer Taxation", *Review of Economic Studies*, 39, (Jannuary, 1972), 105-111.

〔11〕 Nikaido, H. *Convex Structures and Economic Theory*, New York, Academic Press, 1968.

〔12〕 Ramsey, F. "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal*, 37 (1927), 47-61.

〔13〕 Roy, R. "La distribuction des revenus entre les divers biens", *Econometrica* 15, (1947), 205-225.

〔14〕 Samuelson, P. A. *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Mass. Harvard University Press, 1947.

〔15〕 Stiglitz, J. E. and P. Dasgupta. "Differential Taxation, Public Goods and Economic Efficiency". *Review of Economic Studies*, 38 (April, 1971), 151-174.

(経済学部助教授)