Title	市場均衡の安定性II : 粗代替財体系と大域的安定性
Sub Title	The stability of a market equilibrium II : the gross substitute system and the global stability
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1975
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.68, No.1/2 (1975. 2) ,p.1- 46
JaLC DOI	10.14991/001.19750201-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19750201-0001

市場均衡の安定性 II

——粗代替財体系と大域的安定性——

福岡正夫

1　前稿[1]において述べたように，安定分析の究極の目的は，経済体系がどのような条件を具えたときに変数の動きが均衡に接近するかを解明することにある。当面の競争市場経済についていうならば，これは価格のメカニズムが，収束する調整経路を与えるに足る条件を明らかにすることを意味しており，そのような十分条件としては今日いわゆる粗代替性の事例，優対角元素の事例，顕示選好の弱い公理の事例など，さまざまなものが知られている。なかでも近時の理論の発展コース上もっとも集中的にとり扱われてきたのは粗代替性の事例であって，これとはまったく隔絶した他の事例なるものは知られていないから，以下本稿においてはこの条件にもとづく安定性の証明を主眼として今日確立されている諸成果を概観し，あわせて若干の交通整理を図っておくことにする。

2　ここで粗代替性 (Gross Substitutability) とは，当該の経済が，$\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ のどの1対の財についてもそれらが互いに粗代替財となるような性質を満たしていることをいい，その場合の粗代替財の定義は社会的な超過需要関数 $E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ について行われる[2]。いまある任意の財 i の価格を除いて，他のすべての財の価格が不変にとどまり，p_i のみが騰貴したとき，価格が不変にとどまる財の超過需要がすべて増加するようであれば，その経済体系は粗代替性を満たすという。すなわち

(S)　$\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ のなかの任意の i について $p_i < p_i'$ で，かつすべての $j \neq i$ について $p_j = p_j'$ のとき，それらの $j \neq i$ について $E_j(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) < E_j(p_1', p_2', \cdots\cdots, p_n')$ となる

ようであれば，その経済は粗代替性を満たしている。またもし $E_i(p)$ がその定義域において微分可能であるとすれば，そこに含まれるどの p についても

(S′)　すべての i, j，ただし $j \neq i$ について $\partial E_j(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)/\partial p_i > 0$ となる

注(1)　福岡正夫「市場均衡の安定性 I —序論的考察」，『三田学会雑誌』，1973年2・3月号。

(2)　個別的な消費者の需要関数について，最初に粗代替財を定義したのはモザックである。J. L. Mosak, *General Equilibrium Theory in International Trade*, 1944, p. 45. また生産の場合は所得効果がないから，粗という形容詞にこだわる必要はない。

ことが粗代替性の定義となる。ここで (S) と (S′) とは明らかに同値ではないが，後者が前者を意味することはいうまでもないであろう。

これらの定義が空虚でないことを示すミクロ理論的具体例としては，つぎのような効用関数の事例があげられよう。(3)

$$u=\prod_{i=1}^{n} x_j^{\alpha_j} \quad \text{あるいは} \quad u=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \log x_j$$

$$\text{ここで} \quad \alpha_j>0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j=1$$

これらの効用関数を予算制約式

$$\sum_{i=1}^{n} p_j x_j=\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j$$

の下で最大化するとすれば，いずれの場合も

$$x_i=\alpha_i \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j \bar{x}_j}{p_i} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

という形の需要関数が得られ，(4) したがって $\partial x_i/\partial p_j=\alpha_i \bar{x}_j/p_i$ となるから，$\bar{x}_j>0$ であるかぎり粗代替財の事例が成立する。生産の場合は所得効果がないことを考えれば，この場合社会的にも粗代替財のケースが成立つことは，容易に理解されよう。

3　安定性の議論そのものに立入る前に，若干の予備的補助定理を証明しておくのが便利であろう。

補助定理1　粗代替性 ((S) あるいは (S′)) の下では，$E_i(p)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ の共通の定義域 $\tilde{P}$ は正の成分のみから成る。すなわち前稿の I^+ は $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ のすべてを含むことになる。

証　明

(S) の定義を順繰りに用いることによって，$p_i<p_i'$ となる i の集合 Q が1個より多くの元を含むとしても，なおのこりのすべての $j \in R=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}-Q$ について $p_j=p_j'$ のとき，$E_j(p)<E_j(p')$ となることが明らかである。そこでいま $\tilde{P}$ が0成分をもつ p を含んでいたとすれば，$p'=\lambda p$, $\lambda>1$ とすることによって $Q=\{i|\ p_i>0\}$, $R=\{j|\ p_j=0\}$ とできるから，$j \in R$ については $E_j(p)<E_j(\lambda p)$ が成立たざるをえない。ところが $E(p)$ のゼロ次同次性から，すべての j について $E_j(p)=E_j(\lambda p)$ となるから，上の結果と両立しえない。

補助定理2　粗代替性の下では，均衡価格 p^* はすべて正の成分のみから成る。

注(3)　K. J. Arrow and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, I", *Econometrica*, October 1958, p. 550.

(4)　ラグランジュ乗数を λ とすれば，$\partial u/\partial x_i=u_i=\alpha_i u/x_i$ あるいは α_i/x_i となるから，均衡条件から $\alpha_i u=\lambda p_i x_i$ あるいは $\alpha_i=\lambda p_i x_i$ を得る。これを合計し，予算制約式ならびに $\sum \alpha_j=1$ の条件を用いることによって，$\lambda=u/\sum p_j \bar{x}_j$ あるいは $\lambda=1/\sum p_j \bar{x}_j$ を得，これを上記の均衡条件に代入して，本文の結果を得る。

証　明

補助定理 1 から自明。したがって (S) の下での均衡条件はすべて等式 $E_j(p^*)=0$ $(j=1,2,\cdots\cdots,n)$ のみから成る。

補助定理 3　粗代替性の下では，任意の不均衡価格 p および均衡価格 p^* について

$$\frac{p_k}{p_k^*}=\max_i\left\{\frac{p_i}{p_i^*}\right\},\quad \frac{p_{k'}}{p_{k'}^*}=\min_i\left\{\frac{p_i}{p_i^*}\right\}$$

とするとき，

$$E_k(p)<0,\quad E_{k'}(p)>0$$

となる。[5]

証　明

すべての i について $p_k/p_k^*=p_i/p_i^*$ であったとすれば，ある $\lambda>0$ について $p=\lambda p^*$ となって，ゼロ次同次性から p もまた均衡価格となってしまうから，仮定に反する。よって少くともある i については $p_k/p_k^*>p_i/p_i^*$ となるのでなくてはならない。そこでいま $p'\equiv(p_k^*/p_k)p$ と定義すれば，一般に

$$p_i'\equiv\frac{p_k^*}{p_k}p_i\leqq\frac{p_i^*}{p_i}=p_i^*$$

であり，また上の結果から少くとも一つの i については $p_i'<p_i^*$ でなくてはならないから，結局 $p'\leqq p_i^*$ で，とくに k については $p_k'=p_k^*$ である。ゆえにゼロ次同次性 (H)，粗代替性 (S) ならびに補助定理 2 から

$$E_k(p)=E_k(p')<E_k(p^*)=0$$

となり，$E_k(p)<0$ がいえたことになる。

同様に $p''=(p_{k'}^*/p_{k'})p$ とおけば，$p^*\leqq p''$，$p_{k'}^*=p_{k'}''$，したがって (H), (S) から

$$0=E_{k'}(p^*)<E_{k'}(p')=E_{k'}(p)$$

となって，$E_{k'}(p)>0$ を得る。

補助定理 4　粗代替性の下では，均衡価格比は一意的である。[6]

証　明

いま $E(p^*)=E(p^{**})=0$ で，すべての $\lambda>0$ について $p^*\neq\lambda p^{**}$ であったとしよう。ここで

注(5) K. J. Arrow, H. D. Block and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II", *Econometrica*, January 1959, p. 89.

(6) この定理をはじめて提唱したのはワルドである。A. Wald, "On Some Systems of Equations of Mathematical Economics", *Econometrica*, October 1951, pp. 385-7 (もとのドイツ語の論文は 1936 年)．また Arrow, Block and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 89-90 参照。

$$\frac{p_{k'}^*}{p_{k'}^{**}}=\min_i\left\{\frac{p_i^*}{p_i^{**}}\right\}$$

とし，$p^{***}=\mu p^{**}$, $\mu>0$ で $p_{k'}^{***}=p_{k'}^*$ となるような p^{***} をつくってみれば，$p^{***}\leq p^*$ となるから，前と同じ議論を用いて (S) から

$$E_{k'}(p^{***})<E_{k'}(p^*)=0$$

となり，p^{**} したがって p^{***} が均衡価格であるという仮定に反する。よってかならずある $\lambda>0$ について $p^*=\lambda p^{**}$ となるのでなくてはならない。

補助定理5　粗代替性の下では，任意の不均衡価格 p および均衡価格 p^* について

$$p^*E(p)\equiv\sum_{i=1}^n p_i^*E_i(p)>0$$

となら ねばならない。(7)

証　明

証明の基本的な方針としては，$p^*=e=(1, 1, \cdots\cdots, 1)$ という特殊な p^* について結論が成立つこと，したがって

（1）　$E(p)\neq 0$ なら $\sum_{i=1}^n E_i(p)>0$

となることを明らかにする。

（a）　もし（1）がいえれば，一般の場合にも結論が成立つことは，つぎのような簡単な推論をつうじて証明できる。いま財の測定単位を変更して，もとの価格は $\tilde{p}_i$, $\tilde{p}_i^*$ で示し，新価格は

（2）　$p_i=\dfrac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_i^*}$　$(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

で定義するとしよう。$p_i^*=1$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ なのであるから，これは均衡価格に対する不均衡価格の比を不変に保つ変換であるとも考えることができよう。すると

$$\tilde{p}_i^*\tilde{E}_i(\tilde{p})=\tilde{p}_i^*\tilde{E}_i(p\tilde{p}^*)$$

で $\tilde{p}_i^*$ はすべて既知であるから，$E_i(p)\equiv\tilde{p}_i^*\tilde{E}_i(p\tilde{p}^*)$ と定義すれば $\tilde{p}_i^*\tilde{E}_i(\tilde{p})=E_i(p)$，したがって

$$\tilde{p}^*\tilde{E}(\tilde{p})=eE(p)=\sum_{i=1}^n E_i(p)$$

となり，（1）が成立てばただちに $\tilde{p}^*\cdot\tilde{E}(\tilde{p})>0$ となることが分る。そこであとは $\tilde{E}(\tilde{p})\neq 0$ なら（1）の前提の $E(p)\neq 0$ が成立つことさえ示せばよい。帰謬法を用いて，もし $E(p)=0$ であるとすれば，ある $\lambda>0$ について $p=\lambda p^*$ であるから，

$$\frac{\tilde{p}_i}{\tilde{p}_i^*}=\frac{p_i}{p_i^*}=\lambda\quad(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

で，$\tilde{p}$ もまた $=\lambda\tilde{p}^*$。ゆえに $\tilde{E}(\tilde{p})=\tilde{E}(\lambda\tilde{p}^*)=\tilde{E}(p^*)=0$ となって，不合理が生ずる。

よって以下では $p^*=(1, 1, \cdots\cdots, 1)$ という特殊な p^* についてのみ議論を進めればよいのである。

注（7）　Arrow, Block and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 90-93.

（b） そこで任意の正の不均衡価格 p について

（3） $eE(p)\equiv\sum_{i=1}^{n}E_i(p)>0$

となることを示すのが，以下での眼目である。

いま一般性を失うことなく，財の番号を

（4） $p_1\geqq p_2\geqq\cdots\cdots\geqq p_n$

となるように並べかえるとする。ここでもし $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$ であれば，それらは $(1, 1, \cdots\cdots, 1)$ に比例し，(H) から p は均衡価格となってしまうから，仮定に反する。ゆえに p が不均衡価格である以上は，（4）のどこかでかならず厳格な不等号が成立つのでなくてはならない。

この点を考慮にいれた上で，p の成分を用いてつぎの n 次のベクトル系列 $\{p^1, p^2, \cdots\cdots, p^n\}$ を定義することにしよう。

$$
\begin{aligned}
&p^1=(p_1,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_1)\\
&p^2=(p_1,\ p_2,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_2)
\end{aligned}
$$

（5） $p^3=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_3)$

$$
\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p^s=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_{s-1},\ p_s,\ p_s,\ \cdots\cdots,\ p_s)\\
&p^{s+1}=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_{s-1},\ p_s,\ p_{s+1},\ \cdots\cdots,\ p_{s+1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&p^n=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots\cdots,\ p_{n-1},\ p_n)
\end{aligned}
$$

すなわち，より簡単に記せば $p^s=(p_1{}^s, p_2{}^s, \cdots\cdots, p_n{}^s)$ の成分は，要するに

（6） $p_i{}^s=\max(p_s, p_i)$

となるようにつくられており，

（7） $p_i{}^s=\begin{cases}p_i & (i\leqq s)\\ p_s & (i>s)\end{cases}$

（8） $p_i{}^{s+1}=\begin{cases}p_i & (i\leqq s)\\ p_{s+1} & (i>s)\end{cases}$

となっている。また p^1 は $(1, 1, \cdots\cdots, 1)$ に比例するから，明らかに均衡価格であって

（9） $E(p^1)=0$

が成立ち，他方

（10） $p^n=p$

であることも言を俟たないであろう。このように p^1 が均衡価格であり，p^n が不均衡価格である以上，$1\leqq v<n$ のどの v かについて，p^v が均衡価格で p^{v+1} が不均衡価格になるところがなければならず，その v については当然 $p^v\neq p^{v+1}$，したがって $p_v>p_{v+1}$ となるのでなくてはならない。

ところでわれわれの狙いは(3)を証明することにあり，これは(10)から

(11)　$eE(p^n)>0$

を証明することにひとしいが，さらに $E(p^n)$ は

(12)　$E(p^n)=[E(p^n)-E(p^{n-1})]+[E(p^{n-1})-E(p^{n-2})]+\cdots\cdots+[E(p^2)-E(p^1)]+E(p^1)$

と書きかえられるから，結局(9)を考慮すれば

(13)
$$e[E(p^{s+1})-E(p^s)]\geqq 0 \quad (s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$
$$e[E(p^{v+1})-E(p^v)]>0$$

となること，あるいは同じことであるが

(14)
$$\sum_{i=1}^{n}E_i(p^{s+1})\geqq\sum_{i=1}^{n}E_i(p^s) \quad (s=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$
$$\sum_{i=1}^{n}E_i(p^{v+1})>\sum_{i=1}^{n}E_i(p^v)$$

となることを示せば足りる。

そこでこの目標への第一歩として，まず p^{s+1} と p^s とを較べてみると，(5)から明らかに

(15)
$$p_i^{s+1}=p_i^s \quad (i\leqq s)$$
$$p_i^{s+1}\leqq p_i^s \quad (i>s)$$

であるから，粗代替性 (S) によって

(16)　$E_i(p^{s+1})\leqq E_i(p^s) \quad (i\leqq s)$

となる。

つぎに $p_{s+1}>0$ であることを考慮して

(17)　$\hat{p}^{s+1}=\left(\dfrac{p_s}{p_{s+1}}\right)p^{s+1}$

と定義すれば，(4)から $p_s/p_{s+1}\geqq 1$ であるから

(18)
$$\hat{p}_i^{s+1}\geqq p_i^s \quad (i\leqq s)$$
$$\hat{p}_i^{s+1}=p_i^s \quad (i>s)$$

であり，したがってふたたび (S) を用いることによって

(19)　$E_i(\hat{p}^{s+1})\geqq E_i(p^s) \quad (i>s),$

よってゼロ次同次性 (H) から

(20)　$E_i(p^{s+1})\geqq E_i(p^s) \quad (i>s)$

を得る。

(20)はまた

(21)　$E_i(p^{t+1})\geqq E(p^t) \quad (i>s\geqq t\geqq 1)$

とも書くことができ，したがって帰納法によって一般に $E_i(p^{t+1})\geqq E(p^1)$ $(i>s\geqq t\geqq 1)$，そして右辺の $E(p^1)$ は(9)から0であるから，t を $s-1$ とおくことによって

(22)　$E_i(p^s)\geqq 0 \quad (i>s)$

が得られる。

以上にもとづき，(14)が成立つことを示すことにしよう。それにはケースを二つに分け，（イ）$p_s=p_{s+1}$ および（ロ）$p_s>p_{s+1}$ の場合を順次に考察するのが便利である。

まず(イ)の条件を満たす s については，$p^s=p^{s+1}$ であるから

(23)　$\sum_{i=1}^{n} E_i(p^{s+1})=\sum_{i=1}^{n} E_i(p^s)$

が成立つことはいうまでもない。

つぎに(ロ)の場合は，(15)で $p_i^{s+1}<p_i^s$ $(i>s)$ となるから，(S)から(16)の条件がすべて強い不等式

(24)　$E_i(p^{s+1})<E_i(p^s)$　$(i\leqq s)$

の形で満たされる。そこでいま

(25)　$D=\sum_{i=1}^{n} p_i^{s+1} E_i(p^{s+1})-\sum_{i=1}^{n} p_i^s E_i(p^s)$

という式を考えてみると，ワルラスの法則（W）から右辺の2項はいずれもゼロとなるから，(22)と(24)によって

(26)
$$
\begin{aligned}
0=D&=\sum_{i=1}^{s} p_i^{s+1} E_i(p^{s+1})+\sum_{i=s+1}^{n} p_i^{s+1} E_i(p^{s+1})-\sum_{i=1}^{s} p_i^s E_i(p^s)-\sum_{i=s+1}^{n} p_i^s E_i(p^s)\\
&=\sum_{i=1}^{s} p_i\,[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]+p_{s+1}\sum_{i=s+1}^{n} E_i(p^{s+1})-p_s\sum_{i=s+1}^{n} E_i(p^s)\\
&=\sum_{i=1}^{s} p_i\,[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]+p_{s+1}\sum_{i=s+1}^{n}[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]+(p_{s+1}-p_s)\sum_{i=s+1}^{n} E_i(p^s)\\
&\overset{(8)}{<}p_{s+1}\sum_{i=1}^{s}[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]+p_{s+1}\sum_{i=s+1}^{n}[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]+(p_{s+1}-p_s)\sum_{i=s+1}^{n} E_i(p^s)\\
&\overset{(9)}{\leqq}p_{s+1}\sum_{i=1}^{n}[E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)]
\end{aligned}
$$

となり，$p_{s+1}>0$ で割って結局

(27)　$\sum_{i=1}^{n} E_i(p^{s+1})>\sum_{i=1}^{n} E_i(p^s)$

が成立つことになる。

前にも述べたように，$v=s$ のところではかならず（ロ）の条件が満たされるから，以上で証明が完了したことは明らかである。

この補助定理の結論は，しばしば均衡価格 p^* と任意の不均衡価格 p について，社会的な意味で顕示選好の弱公理が成立つことだといわれている。たしかに p^*, $p(\neq p^*)$ についてこの公理の主張が満たされるとすれば，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,E_i(p)\geqq\sum_{i=1}^{n} p_i\,E_i(p^*)\ \text{なら}\ \sum_{i=1}^{n} p_i^*\,E_i(p^*)<\sum_{i=1}^{n} p_i^*\,E_i(p)$$

ということができ，ここで目下の場合は $\sum p_iE_i(p)$ がワルラス法則から 0，$\sum p_iE_i(p^*)$ が均衡条

注(8)　$p_s>p_{s+1}$ から $p_i>p_{s+1}$ $(i\leqq s)$，そして (24) から $E_i(p^{s+1})-E_i(p^s)<0$ $(i\leqq s)$。
(9)　$p_{s+1}-p_s<0$，そして (22) から $E_i(p^s)\geqq 0$ $(i>s)$。

件 $E_i(p^*)=0$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ から0となるところから，この主張の仮設は $0=0$ という trivial な形でかならず満たされるということができる。他方結論の左辺 $\sum p_i^*E_i(p^*)$ もまたワルラス法則と均衡条件の二重の理由で0となるから，かならず補助定理の帰結 $\sum p_i^*E_i(p)>0$ が導かれるのである。

しかし，弱公理の主張が均衡価格と不均衡価格の対について成立つということは，かならずしもそれが任意の価格の対について成立つということを意味しない。この点が顕示選好の弱公理と粗代替性との基本的な相違点であって，前者の一般的な成立はその背後に社会的無差別マップの存在を秘めているが，後者の事例はかならずしもそのような背景を必要としないのである。この点をめぐっては，また第12節で関説する機会をもつであろう。

4　以上の補助定理の結果を踏まえた上で，本題の安定性の分析にとりかかることにしよう。われわれが依拠する市場調整のメカニズムは，前稿の(16)

$$\dot{p}_i=F^i[E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)]=H^i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ならびにその特殊ケースである (21)

$$\dot{p}_i=K_i\cdot E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

（そしてそれらを規準化した(17)，(22)）である。(16)については前稿でも述べたように

（i）　F^i は $E_i(p)$ の上で一価連続，したがって $H^i(p)$ も $\tilde{P}$ の上で一価連続

（ii）　$\mathrm{sgn}\,F^i(E_i)=\mathrm{sgn}\,H^i=\mathrm{sgn}\,E_i$

が仮定されるが，(21)の場合は当然（i）は $E_i(p)$ の連続性から保証され，また（ii）は $K_i>0$ であるところから満たされている。

ところで粗代替性の場合においては，前述の補助定理1から，価格はもっぱら正領域に限られるから，われわれはどんな初期条件から出発するにせよ，それらがすべて正の成分から成ると仮定してよいであろう。そこで以下では，まず上記の調整過程(16)（したがって(21)）が，そうした任意の正の $p^0\epsilon\tilde{P}$ から出発する局所解ならびに大域解をもちうることを示しておこう。

補助定理6　任意の初期条件 $p^0>0$ を与えるとき，(16)（および(21)）は，ある区間 $[0, \tau)$, $\tau>0$ の上で定義され，かつ $p(0)=p^0$ を満たす局所解 $p(t)$ をかならずもち，しかもそれらは $[0, +\infty)$ の上で定義される大域解に延長することが可能である。(10)

証　明

まず $[0, \tau)$, $\tau>0$ で定義される局所解 $p(t)$ の存在は，（i）によって $H(p)$ が開部分集合 $\tilde{P}$ 上で

注(10)　Arrow, Block and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 96 ff. また H. Nikaido, *Convex Structure and Economic Theory*, 1968, pp. 345-347 参照。

連続であることから，自明である。

つぎにそれが大域解に延長できることをいうためには，これらの局所解がすべて $\tilde{P}$ のあるコンパクト部分集合に含まれることをいえばよい。そこでその目的のために，まず任意の均衡価格 $p^*>0$ について

$$(28)\quad v_\alpha(t)=\max_i\left\{\frac{p_i(t)}{p_i{}^*}\right\},\quad v_\beta(t)=\min_i\left\{\frac{p_i(t)}{p_i{}^*}\right\}$$

と定義する。p^0 は正，$p(t)$ は連続であるから，$p(t)$ が正にとどまりつづけるような区間 $\tau>t>0$ が存在し，したがってそのような t の最小の上限をとって，それを ω とすることができる。すると $t\in[0,\ \omega)$ については

$$(29)\quad \begin{aligned} M_\alpha(t)&=\{i\mid p_i(t)/p_i{}^*=v_\alpha(t)\}\\ M_\beta(t)&=\{i\mid p_i(t)/p_i{}^*=v_\beta(t)\}\end{aligned}$$

と定義することによって，補助定理3からそれぞれ $E_i[p(t)]<0$, $E_i[p(t)]>0$ がいえ，したがって仮定の (B) から

$$(30)\quad \begin{aligned} &H_i[p(t)]<0\quad (i\in M_\alpha(t),\ t\in[0,\ \omega))\\ &H_i[p(t)]>0\quad (i\in M_\beta(t),\ t\in[0,\ \omega))\end{aligned}$$

となる。

上の結果にもとづいて，$[0,\ \omega)$ で $v_\alpha(t)$ が減小し，$v_\beta(t)$ が増大することを示すのが，以下での議論の狙いである。これらは同種の推論で証明できるから，まず

$$(31)\quad \lim_{h\to0}\sup\frac{v_\alpha(t+h)-v_\alpha(t)}{h}<0\quad (t\in[0,\ \omega))$$

となることを示すことにしよう。事実それぞれの $t\in[0,\ \omega)$ について

$$(32)\quad \begin{cases} h_\nu\to0\quad (\nu\to\infty)\\ \lim\limits_{h\to0}\sup\dfrac{v_\alpha(t+h)-v_\alpha(t)}{h}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{v_\alpha(t+h_\nu)-v_\alpha(t)}{h_\nu}\end{cases}$$

となるような非ゼロの数列 $\{h_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が存在し，各 h_ν に応じて最大元の集合 $M_\alpha(t+h_\nu)$ が定まって

$$(33)\quad v_\alpha(t+h_\nu)=\frac{p_{k(\nu)}(t+h_\nu)}{p_{k(\nu)}{}^*}\quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$(34)\quad k(\nu)\in M_\alpha(t+h_\nu)\quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

のような $k(\nu)$ を選ぶことができる。が，ここで $k(\nu)$ は $\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ のすべての値について有限の $\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$ のなかから選ばれるのであるから，ν が無限大となるときは少くともある1個の同じ k が無限回反復されるのでなくてはならない。そこでそのような k を固定すれば，それについて一般性を失うことなく

$$(35)\quad v_\alpha(t+h_\nu)=\frac{p_k(t+h_\nu)}{p_k{}^*}\quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$(36)\quad k\in M_\alpha(t+h_\nu)\quad (\nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

と仮定してよい。そしてさらに $\nu\to\infty$ となるとき，$p_k(t)$ と $v_\alpha(t)$ の連続性を斟酌すれば，(35)は極限において

(37) $v_\alpha(t)=\dfrac{\dot{p}_k(t)}{p_k{}^*}$

となり，したがって

(38) $k\in M_\alpha(t)$

となるから，以上を綜合して結局

(39) $$\lim_{\nu\to\infty}\frac{v_\alpha(t+h_\nu)-v_\alpha(t)}{h_\nu}=\frac{1}{p_k{}^*}\lim_{\nu\to\infty}\frac{p_k(t+h_\nu)-p_k(t)}{h_\nu}$$
$$=\frac{1}{p_k{}^*}\lim_{h\to0}\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=\frac{1}{p_k{}^*}\dot{p}_k=\frac{H^k[p(t)]}{p_k{}^*}$$

がいえることになる。ところが(30)と(38)から，(39)の最右辺は負となるから，(32)とあわせて(31)を得る。

つぎに

(40) $$\lim_{h\to0}\inf\frac{v_\beta(t+h)-v_\beta(t)}{h}>0\quad(t\in[0,\ \omega))$$

が成立つことも，まったく同様の推論をつうじて示すことができよう。

こうして $[0,\ \omega)$ で $v_\alpha(t)$ が減小し，$v_\beta(t)$ が増大することが明らかとなったが，ここでもし $\tau>\omega$ であれば，$p_i(\omega)\geqq v_\beta(0)p_i{}^*>0$ で，したがってまた $\omega+h\in[0,\ \tau)$ を満たす任意の小さい $h>0$ について $p_i(\omega+h)>0$ となるから，ω の定義と相反する。よって $\omega=\tau$ でなくてはならず，要するに

(41) $$v_\alpha(0)\geqq v_\alpha(t)\geqq\frac{p_i(t)}{p_i{}^*}\geqq v_\beta(t)\geqq v_\beta(0)>0\quad(\tau>t\geqq0)$$

がいえたことになる。これは前稿(16)の解 $p(t)$ がすべて

$$B(p^0)=\{p\mid v_\alpha(0)p_i{}^*\geqq p_i\geqq v_\beta(0)p_i{}^*\}$$

のなかにとどまることを意味しており，$B(p^0)$ が $\tilde{P}$ のコンパクト部分集合であることはいうまでもないから，証明は完了した。

5　そこでいよいよこの大域解の，均衡点への収束の考察に移る。はじめにまず，より簡単な前稿(21)の調整過程を考えることにし，この場合の動点 $p(t)$ から任意に固定した均衡点 p^* への距離の指標として加重されたユークリッドの距離の2乗

(42) $$v_E(t)\equiv V_E[p(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}(p_i-p_i{}^*)^2$$

を用いることにしよう[(11)]。前に証明したところから，$p^0>0$ ならすべての $t\geqq0$ について $p(t)>0$ で

注(11)　以下の分析については Arrow, Block and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 102-103 参照。

ありつづけるから，$v_E(t)$ はつねに導関数をもち，そこで(42)から $\dot{v}_E(t)$ を求めて，前稿(21)およびワルラス法則を考慮すれば，

(43) $\dot{v}_E(t)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}(p_i-p_i^*)\dot{p}_i=2\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_i^*)E_i(p)=-2\sum_{i=1}^{n}p_i^*E_i(p)$

を得る。ところが補助定理5で証明したように，(S) の下では $E(p)\neq 0$ であるかぎり $\sum_{i=1}^{n}p_i^*E_i(p)>0$ となるから，(43) から不均衡状態ではかならず $\dot{v}_E(t)<0$ となり，$v_E(t)$ は単調に減小しつづけることが分る。

ところでこれもまた前に証明したように，$p(t)$ が $\tilde{P}$ のコンパクト部分集合 $B(p^0)$ に含まれる以上は，$V_E(p)$ の連続性から $V_E[p(t)]$ もまた有界であることが明らかであり，よって上記の単調減小の帰結と考えあわせて，それには極限値 $\lim_{t\to\infty}v_E(t)=v_E^\infty$ が存在する。他方同じく $p(t)\in B(p^0)$ であることから，数列 $\{t_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$，$t_\nu\to\infty$ $(\nu\to\infty)$ を選んで

(44) $\lim_{\nu\to\infty}p(t_\nu)=p^\infty$，$p^\infty\in B(p^0)$

とすることができ，そこで p^∞ を初期点とする(21)の解 $p^\infty(t)=p(t,p^\infty)$ を考えて，$v_E^\infty(t)=V_E[p^\infty(t)]$ とすれば，$V_E(p)$ の連続性と，$p(t,p^0)$ の一意性ならびに初期点に関する連続性から，すべての $t\geqq 0$ について

$$(45)\quad \begin{aligned} v_E^\infty(t)&=V_E[p(t,\ p^\infty)]=V_E[\lim_{\nu\to\infty}p(t,\ p(t_\nu))]=\lim_{\nu\to\infty}V_E[p(t,\ p(t_\nu))]\\ &=\lim_{\nu\to\infty}V_E[p(t+t_\nu,\ p^0)]=\lim_{\nu\to\infty}v_E(t+t_\nu)=v_E^\infty \end{aligned}$$

となる。この帰結から極限経路 $p^\infty(t)$ 上の点はすべて均衡点であることが分り，なかんずく $p^\infty=p^\infty(0)$ もまた均衡点である。これは (21) の調整過程が漸近擬安定性を満たすことを意味し，解 $p(t)$ と均衡価格の集合 $P^*\equiv\{p\mid p=\lambda p^*,\ \lambda>0\}$ との距離は結局ゼロに収束する。

ところが (42) の定義の均衡点は任意の $p^*\in P^*$ を固定して考えたものであり，任意の初期点 p^0 から出発する大域解 $p(t)$ との距離 $v_E(t)$ の単調非増加 ($E(p)\neq 0$ なら単調減小) が示されたのであるから，いま上記の p^∞ を p^* として用いれば，$\lim_{t\to\infty}p(t)=p^\infty$ となることは明らかである。しかも p^∞ の近傍から出発する解経路がリヤプーノフの意味での安定性を満たすことも明らかであるから，以上で(21)の大域的安定性が示されたことになる。

定理1　超過需要関数 $E(p)$ が，前稿の仮定 (C)(H)(W) にさらに加えて，粗代替性 (S) を満たすとすれば，調整過程(21)は大域的に安定である。

ところでいま前稿(21)のかわりに，その規準化された形態すなわち前稿の

(22) $\dot{q}_i=k_i\cdot e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})$，$k_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

を考えるとしても，まったく同様に

(46) $v_E(t)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{k_i}(q_i-q_i^*)^2$

と定義して

(47) $\dot{v}_E(t)=2\sum_{i=1}^{n-1}(q_i-q_i^*)\,e_i(q)$

を導くことができる。しかしこの場合は，ぢかにワルラス法則を用いることができないから，若干工夫して，(22)を拡大された体系

(48) $$\begin{cases}\left(\dfrac{\dot{p_i}}{p_n}\right)=k_i\cdot e_i\left(\dfrac{p_1}{p_n},\ \dfrac{p_2}{p_n},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{p_{n-1}}{p_n}\right)\\ \dot{p}_n=0\end{cases}$$

のなかに「はめ込む」ことにする。するとこれは q_i を p_i/p_n でおきかえ，p_n を一定値に保つことを意味するから，$p_n=p_n^*=1$ とおけば，(47)を

(49) $$\dot{v}_E(t)=2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{p_i}{p_n}-\frac{p_i^*}{p_n^*}\right)e_i\left(\frac{p}{p_n}\right)+(1-1)\,e_n\left(\frac{p}{p_n}\right)$$
$$=2\sum_{i=1}^{n}(p_i-p_i^*)\,E_i(p)$$

と書きなおすことができ，これに (W) が使えて，あとは規準化されない場合とまったく同様に事が運ぶ。よって規準化された過程についても

定理2　定理1と同じ仮定の下で，調整過程(22)は大域的に安定である

を得ることができた。

6　ここで前稿(16)の形の一般化された調整過程に眼を転ずることにしよう[12]。(16)については $p(t)$ から p^* への距離の指標として，ユークリッドの意味での距離の2乗和をとる代りに，いわゆる最大値ノルムの距離

(50) $$v_M(t)\equiv V_M[p(t)]=\max_i\left|\frac{p_i-p_i^*}{p_i^*}\right|=\max_i\left|\frac{p_i}{p_i^*}-1\right|$$

をとることにする。この場合も前節の場合と同じく，不均衡状態においては $v_M(t)$ が t とともに減小していくことを示すのが議論の眼目である。が，(42)の場合とは異なって，ここでの $v_M(t)$ はつねに導関数をもつとは限らないから，やや慎重なとり扱いが必要である。まず最初に単純な場合から考えることにして，(50)での最大値がつねに $\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$ のただ一つの元たとえば k について達せられるとすれば，$\dot{v}_M(t)$ が存在するから，

(51) $$\dot{v}_M(t)=\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{p_k}{p_k^*}-1\right)\right]\frac{1}{p_k^*}\dot{p}_k=\left[\operatorname{sgn}\left(\frac{p_k}{p_k^*}-1\right)\right]\frac{H^k(p)}{p_k^*}$$

のようであって，$p_k/p_k^*-1>0$ なら $\dot{v}_M(t)=H^k(p)/p_k^*$，また $p_k/p_k^*-1<0$ なら $\dot{v}_M(t)=-H^k(p)/p_k^*$ である。ところが $p_k/p_k^*-1>0$ なら $p_k/p_k^*=\max_i\{p_i/p_i^*\}$ であるから，補助定理3および仮定(ii)から $H^k(p)<0$ となり，したがって $\dot{v}_M(t)<0$ となる。他方 $p_k/p_k^*-1<0$ なら $p_k/p_k^*=\min_i\{p_i/p_i^*\}$

注(12)　以下の議論については Arrow, Block and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 97 ff 参照。

であるから，同様の理由で $H^k(t)>0$ となり，したがってやはり $\dot{v}_M(t)<0$ となる。よって $E(p)\neq 0$ であるかぎり，いずれにせよ $\dot{v}_M(t)<0$ となって，$v_M(t)$ は単調に減小する。

つぎに最大値が1個ではなく複数個存在する一般の場合をとり扱い，t におけるそれらの集合を

(52) $M(t)=\{i \mid p_i(t)/p_i^*=v_M(t)\}$

と書こう。この場合は $v_M(t)$ が導関数をもつとは限らないが，しかし前に補助定理6で(31)を示したのと同じ手法で

(53) $$\limsup_{h\to 0}\frac{v_M(t+h)-v_M(t)}{h}<0$$

となることを示すことができる。

事実いま簡単化のため $p_i/p_i^*\equiv Q_i$ と記し，充分小さい h については $M(t+h)=M(t)$ と考えうることを斟酌すれば，

(54) $$\limsup_{h\to 0}\frac{\max_i|Q_i(t+h)-1|-\max_i|Q_i(t)-1|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\max_{i\in M(t)}\left|\frac{Q_i(t+h)-1}{h}\right|-\max_{i\in M(t)}\left|\frac{Q_i(t)-1}{h}\right|\right\}$$
$$\leqq\limsup_{h\to 0}\left\{\max_{i\in M(t)}\left[\frac{|Q_i(t+h)-1|-|Q_i(t)-1|}{h}\right]\right\}$$

となるが，この最後の式については補助定理6の場合と同様

(55) $$\limsup_{h\to 0}\left\{\max_{i\in M(t)}\left[\frac{|Q_i(t+h)-1|-|Q_i(t)-1|}{h}\right]\right\}$$
$$=\lim_{\nu\to\infty}\left\{\max_{i\in M(t)}\left[\frac{|Q_i(t+h_\nu)-1|-|Q_i(t)-1|}{h_\nu}\right]\right\}$$

となるような数列 $\{h_\nu\}$ が存在する。そこで第4節の議論に準じ，一般性を失うことなくある共通の元 k を固定して考えれば，

(56) $$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\max_{i\in M(t)}\left[\frac{|Q_i(t+h_\nu)-1|-|Q_i(t)-1|}{h_\nu}\right]\right\}$$
$$=\lim_{\nu\to\infty}\frac{|Q_k(t+h_\nu)-1|-|Q_i(t)-1|}{h_\nu}=\mathrm{sgn}\,[Q_k(t)-1]\,\dot{Q}_k$$

となり，以上(54)，(55)および(56)をまとめて

(57) $$\limsup_{h\to 0}\frac{v_M(t+h)-v_M(t)}{h}\leqq\left[\mathrm{sgn}\left(\frac{p_k}{p_k^*}-1\right)\right]\frac{H^k(p)}{p_k^*}$$

を得たことになる。よって前と同様，不均衡下では充分に小さい h について $v_M(t+h)<v_M(t)$ が成立ち，そして $v_M(t)$ は t に関して連続であるから，任意の h についても $v_M(t+h)<v_M(t)$ が成立ったことになる。

つぎに解経路 $p(t)$ が事実ある均衡点に収束することを示す。ふたたび $v_\alpha=\max_i\{p_i(t)/p_i^*\}$，$v_\beta(t)=\min_i\{p_i(t)/p_i^*\}$ の動きに注目し，前述のようにそれらがそれぞれ減小，増大することを考えれば，

$v_\alpha(0) \geqq v_\alpha(t) \geqq p_i(t)/p_i^* \geqq v_\beta(t) > 0$ であることから，それらには極限値

(58) $\lim_{t\to\infty} v_\alpha(t) = v_\alpha^\infty$, $\lim_{t\to\infty} v_\beta(t) = v_\beta^\infty$

が存在する。また同じく上述の条件から $p_i(t)$ もコンパクト集合に含まれ，したがって

(59) $$\begin{aligned} &t_\nu \to \infty \quad (\nu \to \infty) \\ &\lim_{\nu\to\infty} p(t_\nu) = p^\infty \end{aligned}$$

となるような数列 $\{t_\nu\}$ が存在するから，その極限点 p^∞ を初期点とする(16)の極限経路 $p^\infty(t)$ を考えれば，前と同じ推論をつうじて $p^\infty(t)$ 上の点はすべて均衡価格となり，とりわけ $p^\infty = p^\infty(0)$ もまた均衡点となる。

さて(59)からすべての i について

(60) $\lim_{\nu\to\infty} \dfrac{p_i(t_\nu)}{p_i^\infty} = 1$

となるから，当然

(61) $\lim_{\nu\to\infty} \max_i \dfrac{p_i(t_\nu)}{p_i^\infty} = \lim_{\nu\to\infty} \min_i \dfrac{p_i(t_\nu)}{p_i^\infty} = 1$

ともならねばならず，しかも(58)の p^* は任意の均衡点であってよかったわけであるから，p^∞ を p^* の代りに用いることにより，

(62) $v_\alpha^\infty = v_\beta^\infty = 1$

となるのでなくてはならない。ゆえに重ねて $v_\alpha(t) \geqq p_i(t)/p_i^\infty \geqq v_\beta(t)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ であることから，結局

(63) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{p_i(t)}{p_i^\infty} = 1 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

とならねばならないことになり，$\lim_{t\to\infty} p(t) = p^\infty = \lambda p^*$, $\lambda > 0$ となる。

こうして

定理3 超過需要関数 $E(p)$ が (C)(H)(S) を満たすとすれば，調整過程 (16) は大域的に安定である[(13)]

が成立したことになる。

他方，規準化された過程〔前稿の(17)〕についても，

$$\frac{p_k}{p_k^*} \geqq \frac{p_i}{p_i^*} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

が

$$\begin{aligned} &\frac{q_k}{q_k^*} \geqq \frac{q_i}{q_i^*} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \\ &q_n = 1 \end{aligned}$$

注(13) この定理はワルラスの法則 (W) を仮定しなくても成立つことに注意。

と同値（≦についても同様）であることを考えれば，まったく同じ議論があてはまるから，

定理4　定理3と同一の仮定の下で，調整過程(17)は大域的に安定である

が成立つことはいうまでもないであろう。

7　以上が粗代替財モデルにおける安定分析の骨子であり，以下の3節の所論はそれをいわゆる弱い粗代替財のモデルに一般化することを目的としている。冒頭の粗代替性の定義 (S) のなかで $E_j(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) < E_j(p_1', p_2', \cdots\cdots, p_n')$ の条件が $E_j(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \leqq E_j(p_1', p_2', \cdots\cdots, p_n')$ のように等号を含むときに，その経済は弱い意味での粗代替性 (Weak Gross Substitutability) を満たすといわれる。すなわちこの場合は，p_i が騰貴して他のすべての p_j が不変にとどまるときに，それらの $j \neq i$ について E_j はかならずしもそのすべてが増加しなくてもよく，たんに減少するものがなければよいのである。われわれは以下この条件を (S_W) という略号で呼んでいくことにしよう。もし $E_j(p)$ が導関数をもつとすれば，(S′) に対応して，その $\partial E_j(p)/\partial p_i > 0$ の条件を $\partial E_j(p)/\partial p_i \geqq 0$ に緩めたものが，(S_W) の微分型の定義 (S_W') となることはいうまでもない。

ところでこのように (S)(S′) を (S_W)(S_W') に緩和したとしても，それに加えてある特殊な条件が満たされるときには，前節までの分析がなおそのまま妥当する。その特殊な条件というのはいわゆる分解不可能性 (indecomposability) の条件であり，これは上記の不等式 $E_j(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \leqq E_j(p_1', p_2', \cdots\cdots, p_n')$ ($j \neq i$) のうち少くとも1個が厳格な不等号で成立すること，あるいは微分型の定義についていえば，行列 $[E_{ij}] \equiv [\partial E_i/\partial p_j]$ の行と列をどのように並べかえても，それを

$$\Pi^{-1}[E_{ij}]\Pi = \begin{bmatrix} E_{II} & E_{IJ} \\ 0 & E_{JJ} \end{bmatrix}$$

の形には分割できないこと（ここで Π は適当な置換行列）を意味している。この条件があれば，前述の補助定理や定理の成立はまったく支障を来さないが，この点はそれらにおける (S) の使い方からほとんど自明であるから，読者みずから確かめられたい。したがって以下で弱い粗代替性の事例をとりあげるのは，むしろこの特殊な条件が保証されない一般的な場合について，どこまで議論が拡張できるかを明らかにするところに主眼がおかれているのである。

弱い粗代替性の場合について，とくに考慮を払わねばならない第一の点は，一般には $E(p)$ の定義域が前節までの場合のように正の価格ばかりから成るとはかぎらず，ゼロの価格（座標軸そのもの）をも含みうるということである。それゆえ以下の所論では価格の運動経路がどの時点かでゼロ軸に接触する可能性をも排除するわけにはいかず，また均衡点 p^* そのものもある成分についてゼロを含むことがありうるであろう。そこでこうしてゼロとなる価格があったときに，それをどのように処理するかがあらためてわれわれの新課題となり，そのためにはいくつかの補助定理が要請される。

結論を先取りしていうならば，結局これらの予備考察の目的は，ある時点以後正でありつづける価格の組とゼロでありつづける価格の組が判然と二分されること，したがって前者に属する財のみの体系にモデルを縮約し，それについていままでの分析を適用していけばよいこと，を示す点にあるといってよいであろう。

前節までの所論と異なるもう一つの点としては，こんどの場合は均衡価格比の一意性が失われ，規準化された均衡価格も一般にある集合を形成するということに注意しなければならない。しかし，この点についてはマッケンジーに負う補助定理があり，これらの均衡価格の集合は孤立点から成るのではなく，凸集合となることが主張できる。前のパラグラフで言及した補助定理は，この主張を証明する上でも有用性を発揮するであろう。

以下では上記の議論の方向づけに沿いつつ，必要な補助定理を逐一証明していくことにしよう。[14] まず前稿の記号どおり I^+ を，$E(p)$ の定義域 $\tilde{P}$ においてつねに $p_i>0$ であるような i の集合とすれば，

補助定理7　$j \notin I^+$ のような j については，$\tilde{P}$ のどの p についても $E_j(p) \leqq 0$ である。[15]

証　明

すべての $i \neq j$ について $p_i=0$ となる場合には $p_j>0$ とならねばならず，したがってワルラス法則 (W) からすべての $p \in \tilde{P}$ について $E_j(p)=0$ となって，定理の成立は自明である。よって以下では，もっぱら j 以外の i について少くとも一つは正の価格がある場合をとり扱う。

いま $p_i(t)=p_i\ (i \neq j)$，$p_j(t)=t$ のような $p(t)$ を考えれば，どんな $t \geqq 0$ についても $p(t) \in \tilde{P}$ であることはいうまでもない。そして $t>0$ については $p_i(t)=p_i(0)=p_i\ (i \neq j)$，$p_j(t)>p_j(0)$ となっているから，弱い粗代替性 (S_W) から，すべての $i \neq j$ について

(64)　$E_i(p(t)) \geqq E_i(p(0))$

とならねばならない。そこでこれらの式にそれぞれ $p_i(t)$ をかけて足し合わせ，$p_j(0)=0$ であることを考慮すれば，(W) から

(65)
$$\sum_{i \neq j} p_i(t)\, E_i(p(t)) \geqq \sum_{i \neq j} p_i(t)\, E_i(p(0))$$
$$= \sum_{i \neq j} p_i(0)\, E_i(p(0)) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0)\, E_i(p(0)) = 0$$

注(14)　以下の議論については K. J. Arrow and L. Hurwicz, "Some Remarks on the Equilibria of Economic Systems", *Econometrica*, July 1960, *ditto*, "Competitive Stability under Weak Gross Substitutability: The 'Euclidean Distance' Approach", *International Economic Review*, January 1960, *ditto*, "Competitive Stability under Weak Gross Substitutabilty: Nonlinear Price Adjustment and Adaptive Expectations", *International Economic Review*, May 1962, L. McKenzie, "Stability of Equilibrium and the Value of Positive Excess Demand", *Econometrica*, July 1960, H. Nikaido, *Convex Structure and Economic Theory*, 1968 など参照。

(15)　Arrow and Hurwicz, "The 'Euclidean Distance' Approach", Lemma 2, Nikaido, *op. cit.*, Lemma 18.6 (i) pp. 326 ff.

となり，ふたたび (W) から $\sum_{i=1}^{n} p_i(t)E_i(p(t))=0$ となるところから，(65)の帰結を用いて

(66)　$p_j(t)E_j(p))\leqq 0$,

したがって

(67)　$tE_i(p(t))\leqq 0$

を得る。ゆえにすべての $t>0$ について

(68)　$E_j(p(t))\leqq 0$

となり，連続性から $t\leqq 0$ についても(68)が成立つ。よって t を p_j に置きかえれば，どの $p\in\tilde{P}$ についても

(69)　$E_j(p)\leqq 0$

が成立つことになる。

つぎに $j\in I^+$ のような j について事実 $p_j=0$ であるときの価格の集合 $\{p|\ p_j=0,\ p\in\tilde{P}\}$ を $\tilde{P}(j)$ と書くことにしよう。すると

補助定理 8　$j\in I^+$ のような j については，$\tilde{P}(j)$ のどの p についても $E_j(p)$ は定数となる。[16]

証　明

$\tilde{P}(j)$ のなかから p', p'' をとり，ここで j 以外のすべての i については $p_i'>0$, $p_i''>0$ としよう。

$$\beta=\min_{i\neq j}\frac{p_i'}{p_i''}$$

とおけば，$p_i'\geqq\beta p_i''\ (i\neq j)$, $p_j'=\beta p_j''=0$ であるから，(H) と (S_W) から

(70)　$E_j(p')\geqq E_j(\beta p'')=E_j(p'')$

とならねばならない。また p' と p'' を入れ替えても同じ議論が成立つから，$E_j(p')\leqq E_j(p'')$ がいえ，ゆえに(70)と相俟って

(71)　$E_j(p')=E_j(p'')$

となる。ところで以上の議論は p_j 以外の成分がみな正の p', p'' についてなされているが，そのような p', p'' は $P(j)$ の稠密な部分集合をつくっているから，連続性によって，どんな p', $p''\in P(j)$ についても(71)が成立つ。

補助定理 9　$j\in I^+$ のような j については，ある $p'\in\tilde{P}$ の下で $E_j(p')=0$ なら，どんな $p\in\tilde{P}(j)$ の下でも $E_j(p)=0$ である。[17]

注(16)　Arrow and Hurwicz, "The 'Euclidean Distance' Approach", Lemma 1, p. 42. および Nikaido, *op. cit.*, Lemma 18.6 (ii), pp. 326 ff. アロー＝ハーヴィッチの証明は $E(p)$ の微分可能性を仮定しているので，ここではそれを仮定しない二階堂の証明に拠る。

(17)　Nikaido, *op. cit.*, Lemma 18.6 (iii), pp. 326 ff

証　明

前の補助定理によって，どんな $p \in \tilde{P}(j)$ についても $E_j(p)$ は同じとなるから，少くともある1組の $p \in \tilde{P}(j)$ の下で $E_j(p)=0$ となることがいえればよい。

まず $p_j'=0$ の場合は $p' \in \tilde{P}(j)$ であるから，定理の仮定自体が結論を満たし，その成立は自明である。

また $p_j'>0$ であっても他のすべての $p_i'=0$ の場合は，$I^+=\emptyset$ となるから，補助定理7からどんな $p \in \tilde{P}$ についても $E_i(p) \leqq 0$ $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となる。よって (W) から $p_jE_j(p)=0$ $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となり，$p>0$ であれば $E_j(p)=0$ $(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ となるが，正の p ベクトルは $\tilde{P}$ のなかで稠密な部分集合をつくっているから，連続性からすべての $p \in \tilde{P}$ について $E_j(p)=0$ $(j \in I^+)$ となる。

そこであとは $p_j'>0$ 以外に少くとも1個は $p_i'>0$ $(i \neq j)$ となる成分がある場合を考えればよいわけである。この場合についてふたたび $p_i'(t)=p_i'$ $(i \neq j)$, $p_j'(t)=t$ とおけば，$p_j' \geqq t>0$ のような p' と $p'(t)$ については明らかに $(\mathrm{S_W})$ から

(72)　$E_i(p') \geqq E_i(p'(t))$　$(i \neq j)$

となる。ゆえに前と同様それぞれ p_i' をかけて足し合わせれば

(73)　$\sum_{i \neq j} p_i' E_i(p') \geqq \sum_{i \neq j} p' E_i(p'(t)) = \sum_{i \neq j} p_i'(t) E_i(p'(t))$

となるが，他方仮定 $E_j(p')=0$ と (W) から

(74)　$\sum_{i \neq j} p_i' E_i(p') = \sum_{i \neq j} p_i' E_i(p') + p_j' E_i(p') = 0$

であるから

(75)　$\sum_{i \neq j} p_i'(t) E_i(p'(t)) \leqq 0$。

ところがふたたび (W) から

(76)　$\sum_{i \neq j} p_i'(t) E_i(p'(t)) + p_j'(t) E_j(p'(t)) = 0$

であるから，(75)を用いて結局

(77)　$p_j'(t) E_j(p'(t)) \geqq 0$,

したがって $p_j'(t)=t$ から

(78)　$E_j(p'(t)) \geqq 0$　$(p_j' \geqq t > 0)$

となるのでなくてはならない。よって連続性から

(79)　$E_j(p'(t)) \geqq 0$　$(p_j' \geqq t \geqq 0)$

となり，

(80)　$E_j(p'(0)) \geqq 0$

となるが，他方 $p_j'(0)=0$ であるところから $p'(0) \in \tilde{P}(j)$，したがって補助定理7から

(81)　$E_j(p'(0)) \leqq 0$

である。ゆえに $p'(0)\in\tilde{P}(j)$ において

(82) $E_j(p'(0))=0$

となり，$\tilde{P}(j)$ に属するある p の下で $E_j(p)=0$ となることが証明された。

補助定理 9 の系　少くとも 1 組の正の均衡点があるとすれば，どんな均衡点 $p^*\geqq 0$ においても

$$E_i(p^*)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

が満たされる。すなわち $E_i(p^*)<0$, $p_i^*=0$ の形で均衡条件が成立つことはない。[18]

証　明

$p^*>0$ であれば帰結は自明。また p^* のなかに 0 の成分がまじる場合も，定理の仮定からある正の均衡点 $p^{*\prime}\in\tilde{P}$ がある以上，$j\notin I^+$ についても $E_j(p^{*\prime})=0$ となっているから，補助定理 9 から $\tilde{P}(j)$ のどこにおいても $E_j(p)=0$, ゆえに $E_j(p^*)=0$ となり，結局すべての i について

$$E_i(p^*)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)。$$

補助定理10　財の番号の部分集合 Z が I^+ を含むとすれば，$E_Z(p_Z,0)$ は $E(p)$ の性質 (H)(C)(W)(B)(S_W) のすべてを満たす。[19]

証　明

$E_Z(p_Z,\ 0)$ が (H)(C)(B)(S_W) を満たすことは自明であるから，あとそれが (W) を満たすことをいえばよい。

まず $E(p)$ が (W) を満たすところから，すべての $p\in\tilde{P}$ について

(83) $pE(p)=p_Z E_Z(p_Z,\ p_{\bar{Z}})+p_{\bar{Z}}E_{\bar{Z}}(p_Z,\ p_{\bar{Z}})=0$

であるが，ここで $p_{\bar{Z}}$ を単調に 0 に近づければ，(S_W) から E_Z は単調に減少し，しかも (B) からそれは下に有界である。他方，仮定から $\tilde{Z}$ の元は I^+ には含まれないから，補助定理 7 からすべての $p\in\tilde{P}$ について $E_{\bar{Z}}(p)\leqq 0$ となり，したがって $E_{\bar{Z}}$ は上に有界で，また (B) から下にも有界である。そこで結局 $p_{\bar{Z}}E_{\bar{Z}}(p_Z,\ p_{\bar{Z}})$ は 0 に近づくことになり，極限において

(84) $p_Z E_Z(p_Z,\ 0)=0$

となる。

補助定理11　p^* を $E(p)$ の均衡点とすれば，$(p_Z^*,\ 0)$ もまた $E(p)$ の均衡点となり，p_Z^* は $E_Z(p_Z,\ 0)$ の均衡点となる。[20]

注(18)　Arrow and Hurwicz, *op. cit.*, p. 47. の Remark, Nikaido, *op. cit.*, Lemma 19.4, p. 343.

(19)　Arrow and Hurwicz, *op. cit.*, Lemma 3 前半。アロー＝ハーヴィッチは定理の仮定のなかに $E_{\bar{Z}}(p)\leqq 0$ をあげているが，それが $Z\supset I^+$ の仮定に含まれることは補助定理 7 から明らかなところである。

(20)　Arrow and Hurwicz, *op. cit.*, Lemma 3 後半, Nikaido, *op. cit.*, Lemma 19.5.

証　明

(S_W) から

(85)　$E_Z(p^*)=E_Z(p_Z^*, p_{\bar{Z}}^*)\geqq E_Z(p_Z^*, 0)$

となるが，他方定理の仮定から $E_Z(p^*)\leqq 0$ であるから

(86)　$E_Z(p_Z^*, 0)\leqq 0$。

また補助定理7で証明したように，すべての $p\in\tilde{P}$ について $E_{\bar{Z}}(p)\leqq 0$ が成立つから，当然

(87)　$E_{\bar{Z}}(p_Z^*, 0)\leqq 0$

で，上の帰結とあわせて

(88)　$E(p_Z^*, 0)\leqq 0$。

よってワルラス法則 $p^*E(p^*)=0$, $p_Z^*E(p_Z^*, 0)=0$ を考慮すれば，定理の成立は明らかである。

補助定理12　任意の不均衡価格 $p>0$ および均衡価格 $p^*>0$ について，$\pi(i)$ を

$$\frac{p_{\pi(i)}}{p^*_{\pi(i)}}\leqq\frac{p_{\pi(i+1)}}{p^*_{\pi(i+1)}}$$

となるような $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の置換とするとき，$k=\max\{i \mid E_{\pi(i)}\neq 0\}$ については $E_{\pi(k)}(p)<0$ となる。また仮定の不等号を逆にした場合，$k'=\max\{i \mid E_{\pi(i)}\neq 0\}$ については $E_{\pi(k')}(p)>0$ となる。[(21)]

証　明

補助定理5の場合と同様，一般性を失うことなく $p_i^*=1$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ とすることができ，また同じく一般性を失うことなく財の番号をつけかえることによって $p_i\leqq p_{i+1}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ とすることができる。そこでそう仮定した上で，(5)と同じ要領で価格ベクトルの系列 $\{p^1, p^2, \cdots\cdots, p^n\}$ をつくってみれば，前と同じ推論をつうじて，$(S_W)(H)$ から

(89)　$E_i(p^{s+1})\geqq E_i(p^s)$　$(i\leqq s)$

(90)　$E_i(p^{s+1})\leqq E_i(p^s)$　$(i>s)$

となるのでなくてはならない。そして(90)からは帰納法をつうじて，やはり前と同様一般に

(91)　$E_i(p^{s+1})\leqq E_i(p^1)=0$　$(i>s\geqq 1)$

がいえる。

さて $k\leqq s$ か $k>s$ かのいずれかであるが，後者の場合をさきにとりあげ，$k=s+1$ すなわち $s=k-1$ とおいて，さらに $i=k$, $i>k$ の二つの場合を分けて考えれば，(91)から

(92)　$E_k(p^k)\leqq 0$

(93)　$E_i(p^k)\leqq 0$　$(i>k)$

注(21)　Arrow and Hurwicz, "Nonlinear Price Adjustment", Lemma 4 (B).

となる。そこで(93)にそれぞれ p_i^k をかけて足し合わせれば

(94) $\sum_{i=k+1}^{n} p_i^k E_i(p^k) \leqq 0$

を得，これと (W) とから

(95) $\sum_{i=1}^{k} p_i^k E_i(p^k) \geqq 0$

を得るが，p^k のつくり方から $i \leqq k$ については $p_i^k = p_i$ であるから

(96) $\sum_{i=1}^{k} p_i E_i(p^k) \geqq 0$

となる。

他方 $i \leqq k \leqq s$ でについては(89)から帰納法をつうじて

$$E_i(p^s) \geqq E_i(p^k)$$

が得られ，したがって $s=n$ については $p^n=p$ であることから

(97) $E_i(p) \geqq E_i(p^k) \quad (i \leqq k)$

が得られる。

そこで最後に (W) から

$$0 = \sum_{i=1}^{n} p_i E_i(p) = \sum_{i=1}^{k} p_i E_i(p) + \sum_{i=k+1}^{n} p_i E_i(p)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} p_i E_i(p^k) + \sum_{i=1}^{k} p_i [E_i(p) - E_i(p^k)] + \sum_{i=k+1}^{n} p_i E_i(p)$$

となるが，右辺の第1項は (96) から $\geqq 0$，第3項はすべての $i > k$ について $E_i(p)=0$ であることから $=0$ となるから，(97)をも考慮にいれると

$$0 \geqq \sum_{i=1}^{k} p_i [E_i(p) - E_i(p^k)] \geqq 0$$

となって，結局

(98) $\sum_{i=1}^{k} p_i [E_i(p) - E_i(p^k)] = 0$

となる。ところが(97)から左辺の各項が $\geqq 0$ なのであるから，それぞれの $i \leqq k$ についても $p_i[E_i(p) - E_i(p^k)] = 0$ となり，$p_i > 0$ でわって

(99) $E_i(p) = E_i(p^k) \quad (i \leqq k)$,

とりわけ

(100) $E_k(p) = E_k(p^k)$

である。よって(92)から

(101) $E_k(p) \leqq 0$

となり，しかも k については仮定から $E_k(p) \neq 0$ なのであるから，$E_k(p) < 0$ とならざるをえない。

k' について $E_{k'}(p) > 0$ となることも，まったく同様に証明できる。

補助定理13 弱い粗代替性 (S_W) の下でも，任意の不均衡価格 p および均衡価格 p^* について

$$p^* E(p) > 0$$

が成立つ。[22]

証　明

補助定理5の証明を，(S) の定義に等号が入ること，および p に0の成分がまじりうることを斟酌して，適当に拡張すればよい。議論は（i）$p^*>0$ の場合，（ii）p^* に0の成分がまじる場合，の二つの部分に分けて行われる。

（i）$p^*>0$ の場合は，おおむね補助定理5の証明に準ずるから，とくに留意すべき点のみを補足するにとどめよう。まず $p^*>0$ であっても $p>0$ であるとはかぎらないが，全成分が0となることはできないから，(4)において p_1 はかならず >0，また $p^*>0$ の仮定と補助定理9の系から，$E(p^1)=0$ である。

つぎに(17)を用いて(20)を導くにあたっては，$p_{s+1}>0$ と仮定しなければならないが，いまかりにそう仮定して(20)を導いたのち，$E(p)$ の連続性を考慮すれば，(20)自体は $p_{s+1}=0$ でも成立つことができる。

さて前の推論ともっとも大きく異なるのは，(14)の証明にさいして，$p_s>p_{s+1}$ であってもすべての $i\leqq s$ について $E_i(p^{s+1})<E_i(p^s)$ になるとはかぎらないという点である。そこでこんどは，前の(イ)(ロ)の分類に代えて，(イ) $p_s=p_{s+1}$ の場合，(ロ) $p_s>p_{s+1}$ で，しかも少くとも1個の $i\leqq s$ について $E_i(p^{s+1})<E_i(p^s)$ となる場合，および (ハ) $p_s>p_{s+1}$ で，すべての $i\leqq s$ について $E_i(p^{s+1})=E_i(p^s)$ となる場合，の三つを分類することにする。

しかし(イ)の場合に(23)が成立つことはまったく同じであり，また(ロ)の場合に(26)(27)が成立つことも同様であるから，新たに考察を加えねばならないのは(ハ)の場合だけである。この場合はその前提から

$$\sum_{i=1}^{s} E_i(p^{s+1})=\sum_{i=1}^{s} E_i(p^s)$$

となるから，(20)［これが (S_W) の下でも成立つことは明らかである］とあわせて

$$\sum_{i=1}^{n} E_i(p^{s+1})\geqq\sum_{i=1}^{n} E_i(p^s) \tag{102}$$

が得られる。ところがいま p^v を均衡価格，p^{v+1} を不均衡価格とすると，$E(p^v)\leqq 0$ であるから，(16)から $E_i(p^{v+1})\leqq 0$ $(i\leqq v)$。そして p^{v+1} が不均衡価格であるからには，少くとも一つの i たとえば i' について $E_{i'}(p^{v+1})>0$ とならねばならず，上の帰結からその i' は v より大きくなくてはならない。それゆえ $E_{i'}(p^v)\leqq 0$ であることから

$$E_{i'}(p^{v+1})>E_{i'}(p^v)\quad (i'>v) \tag{103}$$

となり，仮定 $E_i(p^{v+1})=E_i(p^v)$ $(i\leqq v)$ と (20) $E_i(p^{v+1})\geqq E_i(p^v)$ $(i>v)$ とあわせて

$$\sum_{i=1}^{n} E_i(p^{v+1})>\sum_{i=1}^{n} E_i(p^v) \tag{104}$$

注(22)　Arrow and Hurwicz, "The 'Euclidean Distance' Approach", Theorem 1, pp. 43 ff.

となる。

これらの結論を綜合すれば，$p^*>0$ の場合の定理の証明となっている。

つぎに（ii）p^* に０の成分がまじる場合の考察に移ろう。いま

(105)　$Z=\{i \mid p_i^*>0\}$

と定義し，その補集合を $\tilde{Z}$ とする。すると補助定理７から $E_{\tilde{Z}}(p)$ はすべての $p \in \tilde{P}$ について $\leqq 0$ となるから上に有界であり，また仮定 (B) からそれは下にも有界であるから，$p_{\tilde{Z}}^*E_{\tilde{Z}}(p)$ が定義できて，それは $=0$ である。ゆえに

(106)　$p^*E(p)=p_Z^*E_Z(p)+p_{\tilde{Z}}^*E_{\tilde{Z}}(p)=p_Z^*E_Z(p)$

となるが，ここで $E_Z(p)$ については (S_w) から

(107)　$E_Z(p)=E_Z(p_Z,\ p_{\tilde{Z}})\geqq E_Z(p_Z(p_Z,\ 0)$

がいえ，したがって

(108)　$p_Z^*E_Z(p)\geqq p_Z^*E_Z(p_Z,\ 0)$

となる。

ところで補助定理10から，$E(p)$ が (H)(C)(W)(B)(S_W) をすべて満たせば，$E_Z(p_Z,\ 0)$ もそれらの性質を p_Z の関数としてすべて満たす。そしてそれは正の均衡点 p_Z^* をもっている。ゆえにこの縮約されたシステムに対して前述（ i ）の帰結がそのまま適用され，p_Z が $E_Z(p_Z,\ 0)$ の不均衡価格であれば

(109)　$p_Z^*E_Z(p_Z,\ 0)>0$

となり，また補助定理９の系から p_Z が $E_Z(p_Z,\ 0)$ の均衡価格であれば

(110)　$E_Z(p_Z,\ 0)=0$

となる。

以上の(93)，(95)，(96)の結果を綜合して，p_Z が $E_Z(p_Z,\ 0)$ の不均衡価格なら

$$p^*E(p)>0$$

となることが証明され，また(94)，(97)から p_Z が $E_Z(p_Z,\ 0)$ の均衡価格なら

$$E_Z(p)\geqq 0$$

となることが証明された。ところがもし $E_Z(p)=0$ であるとすれば，$E_{\tilde{Z}}(p)\leqq 0$ と相俟って，p は均衡価格となってしまうから，p が不均衡価格である以上は $E_Z(p)\geqq 0$ で，しかも $E_Z(p)\neq 0$ たらざるをえない。そして $p_Z^*>0$ であるから，$p_Z^*E_Z(p)>0$，したがって(106)から

$$p^*E(p)>0$$

となる。

以上のところから p_Z が $E_Z(p_Z,\ 0)$ の不均衡価格であっても均衡価格であっても，p が $E(p)$ の不均衡価格であるかぎり $p^*E(p)>0$ となることが証明された。

補助定理14 P^* をあらゆる均衡価格 p^* の集合とすれば，$P^*\cup\{0\}$ は凸錐となる。[23]

証　明

任意の均衡価格 $p^{*\prime}, p^{*\prime\prime}$ を P^* からとって，それらの凸1次結合を $p^{*\prime\prime\prime}=\alpha p^{*\prime}+(1-\alpha)p^{*\prime\prime}$, $0<\alpha<1$ とする。証明は帰謬法に拠るとして，いま $p^{*\prime\prime\prime}$ が均衡価格ではなかったとしてみよう。するとすぐ前に証明した補助定理 12 から,

$$p^{*\prime}E_i(p^{*\prime\prime\prime})>0,\quad p^{*\prime\prime}E_i(p^{*\prime\prime\prime})>0$$

となるから,

$$\begin{aligned}p^{*\prime\prime\prime}E_i(p^{*\prime\prime\prime})&=[\alpha p^{*\prime}+(1-\alpha)p^{*\prime\prime}]E_i(p^{*\prime\prime\prime})\\&=\alpha p^{*\prime}E_i(p^{*\prime\prime\prime})+(1-\alpha)p^{*\prime\prime}E_i(p^{*\prime\prime\prime})>0\end{aligned}$$

となるが，これはワルラス法則 (W) と矛盾，よって $p^{*\prime\prime\prime}\in P^*$ でなくてはならない。

$P^*\cup\{0\}$ の錐性はゼロ次同次性 (H) から自明である。

8　これらの準備の下で，分析の動学部分に移ることにしよう。

すでに述べたように，弱い粗代替財の体系では価格がゼロとなる可能性を排除できず，したがってこの場合の動学的調整式としてはコーナー解をも考慮にいれた，前稿の

$$(25)\quad \dot{p}_i=\begin{cases}H^i(p) & \text{for } p_i>0 \text{ or } E_i(p)\geqq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

あるいは $H^i(p)$ を $K_iE_i(p)$ に代置したそのスペシャル・ケース

$$(25')\quad \dot{p}_i=\begin{cases}K_iE_i(p) & \text{for } p_i>0 \text{ or } E_i(p)\geqq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

に依拠するのでなくてはならない。(25) および (25′) で，下段の “otherwise” というのが，$p_i=0$ で，しかも $E_i(p)<0$ となっている場合を指すことはいうまでもない。

さて (25) について新たな論点が生じてくるのは，その解経路の存在問題である。ただちに分るように，この場合は $\dot{p}_i$ を律する関数が p について連続になるとはかぎらないから,[24] 一意的かつ初期点に関して連続な解経路があるための通常の十分条件は保証されない。もちろんきわめて特殊な事例を構成することによってこの問題の解決に代えるのは容易であるが，それでは興趣に乏しいので，以下では端的に希望する帰結を直接仮定してしまう措置をとることにしよう。すなわち以下の議論にとっては,

注(23)　この補助定理をはじめて提唱したのはマッケンジーである。Cf. McKenzie, "Stability of Equilibrium and the Value of Positive Excess Demand," *Econometrica*, July 1960, pp. 612-613. また Arrow and Hurwicz, "Some Remarks", p. 642, Nikaido, *op. cit.*, p. 335, Corollary 参照。

(24)　たとえば Arrow and Hahn, *General Competitive Analysis*, p. 269 参照。

(P) どんな $p^0 \in \tilde{P}$ についても $p(0)=p^0$ となる一意的な大域解 $p(t)$ があり，かつ一定の t について $p(t)$ は p^0 の連続関数である

は新たに付加される一つの仮定である。ひとたびこの仮定を置くならば，議論はつぎのように進行を再開始する。

まず $H^i(p)$ が線型化されているより簡単な (25′) の場合は，第5節の所論になぞらえ，補助定理12の結果を用いることによって，たとえコーナー解があったとしても大域的安定性を確立することができる。いま (25′) で $p_i>0$ あるいは $E_i(p)\geqq 0$，したがって $\dot{p}_i=K_iE_i(p)$ が妥当する i の集合を T，また $p_i=0$ かつ $E_i(p)<0$，したがって $\dot{p}_i=0$ が妥当する i の集合を $\tilde{T}$ としよう。そうした上で前と同様，任意の均衡点 p^* について

$$v_E(t)=\sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i}(p_i-p_i^*)^2$$

と定義すれば，

$$
\begin{aligned}
(111)\quad \dot{v}_E(t)&=2\sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i}(p_i-p_i^*)\dot{p}_i=2\sum_{i\in T}(p_i-p_i^*)E_i(p)\\
&=2\sum_{i=1}^n(p_i-p_i^*)E_i(p)-2\sum_{i\in\tilde{T}}(p_i-p_i^*)E_i(p)\\
&=-2\sum_{i=1}^n p_i^*E_i(p)+2\sum_{i\in\tilde{T}}p_iE_i(p)\leqq -2\sum_{i=1}^n p_i^*E_i(p)
\end{aligned}
$$

となるから[(25)]，補助定理12のから，p が不均衡価格であるかぎり $\dot{v}(t)<0$ がいえ，$v_E(t)$ は単調に減小する。

この結果から解経路が有界となることと，前の場合と同様その極限点が均衡点となることとを斟酌すれば，第5節の推論に準じてある均衡点への収束を結論しうることは明らかであろう。よってコーナー解があるとしても，

定理5 超過需要関数 $E(p)$ が (C)(H)(W)(S_W) を満たすとすれば，調整過程 (25′) は大域的に安定である。

また規準化された過程について，同様の結論が成立つことも，前に準ずるから繰返さない。

9 一般的な $H^i(p)$ をもつ (25) の場合は，議論はそれほど容易でないが，まずコーナー解の問題はつぎのように処理できるであろう。

いま初期点 p^0 で正の価格をもつ財の番号の集合を $I^+(p^0)=\{i \mid p_i^0>0\}$ と定義すれば，明らかに $I^+(p^0)\supset I^+$ であるから，$j\notin I^+(p^0)$ のような j についてはかならず $j\notin I^+$ が満たされており，よっ

注(25) いうまでもなく (W) によって $\sum_{i=1}^n p_iE_i(p)=0$ であることと，$\tilde{T}$ の定義によって $i\in\tilde{T}$ については $p_i=0$, $E_i(p)<0$ であることにもとづく。

てそのような j については補助定理の7からどの $p\in\tilde{P}$ の下でも $E_j(p)\leqq 0$，したがって仮定の(ii)から $H^j(p)\leqq 0$ となる。ゆえに(25)から

(112) $p_j(t)=p_j^0+\int_0^t H^j(p(s))ds=\int_0^t H^j(p(s))ds\leqq 0 \quad (j\in I(p^0))$

となるが，他方 $p_j(t)\geqq 0$ でなくてはならないから，結局

(113) $p_j(t)=0 \quad (j\in I(p^0))$

となるのでなくてはならない。すなわち目下のモデルでは，初期点でゼロの価格はすべての $t\geqq 0$ についてそのままゼロでありつづけ，正に変わることはないことが分かる。

つぎに $j\in I^+(p^0)$ の j についても，いまある有限の時点 $t_j>0$ において $p_j(t_j)=0$ になったとすれば，まったく同様の理由ですべての $p\in\tilde{P}$ の下で $H^j(p)\leqq 0$ とならねばならず，よって初期点で正の価格であっても，ひとたびそれがゼロとなれば，以後はゼロでありつづけるほかはない。

そこで以上をまとめて，時点 $t_j\geqq 0$ 以後 $p_j(t)=0$ となる財 j について

(114) $t_0=\max_j\{t_j\}$

と決めれば，t_0 以後は新たにゼロとなる価格は皆無であるから，結局のところ

(115) $p_Z(t)>0 \quad (t\geqq 0)$

(116) $p_{\bar{Z}}(t)=0 \quad (t\geqq t_0)$

となるように財群を二分することができ，ここで $i\in Z$ の財についてのみモデルを縮約して，

(117) $\dot{p}_Z=H^Z(0,\ p_Z)$

を考えていけばよいのである。

これは要するに，以下では強い粗代替財の場合と同様，(25)の前半部 $\dot{p}_i=H^i(p)$ のみを考察すれば足りることを意味するが，それでもなおつぎの点については強い粗代替財の場合より一そう周到な配慮を必要とすることに注意すべきである。それは目下の弱い粗代替財の場合は，その定義に等号が含まれるところから，不均衡状態においても $v_\alpha(t)$ や $v_\beta(t)$ の強い意味での単調減小，単調増加を導くことができないという点である。換言すれば，それらについてはたんに単調非増加，単調非減小がいえるにすぎず，$p(t)$ の極限経路 $p^\infty(t)$ 上で $\max_i p_i^\infty(t)/p_i^*=v_\alpha^\infty$，$\min_i p_i^\infty(t)/p_i^*=v_\beta^\infty$ になったとしても，前のように，だから $p(t)$ の極限点 $p^\infty=p^\infty(0)$ が均衡点になるとただちに結論することはできないのである。

この点を巧妙に解決したところに1962年のアロー＝ハーヴィッチの功績[(26)]が見出されるが，いま彼らの考案に倣って，ある価格が有限のある t_j 時点以降すべての t をつうじて一定にとどまる場合，それを "eventually constant" な価格と呼ぶことにしよう。$p(t)$ において "eventually constant" な成分をもつ財 i の集合を C と書き，$t_1=\max_i\{t_i\}$ と記すとすれば，この定義から $i\in C$

注(26) Arrow and Hurwicz, "Nonlinear Price Adjustment", *IER*, May 1962.

のすべての i について

(118)　$p_j(t)=\text{constant for all } t \geqq t_1$

となるわけである。そこでこれらの価格は別として，t_1 時点以降なお変化しつづける価格すなわち $i \in \tilde{C}$ に含まれる価格についてのみ

(119)　$v(t,\ \tilde{C})=\max\limits_{i \in C}\left\{\dfrac{p_i(t)}{p_i^*}\right\},\ v_\beta(t,\ \tilde{C})=\min\limits_{i \in}\left\{\dfrac{p_i(t)}{p_i^*}\right\}$

と定義すれば，つぎのような補助定理にもとづいて，$v_\alpha(t,\tilde{C})$ が単調非増加となること，また $v_\beta(t,\tilde{C})$ が単調非減小となること，を主張することができる。

補助定理15　任意の正の均衡価格を p^* とするとき，ある t の区間について $p_i(t)=\text{constant}$ for all $i \in S$ であれば，$\max\limits_{i \in \tilde{S}}\{p_i(t)/p_i^*\}$ は単調非増加，$\min\limits_{i \in \tilde{S}}\{p_i(t)/p_i^*\}$ は単調非減小である。[(27)]

証　明

便宜上

(120)　$v_\alpha(t,\ \tilde{S})=\max\limits_{i \in \tilde{S}}\left\{\dfrac{p_i(t)}{p_i^*}\right\}$

(121)　$M_\alpha(t)\left\{i \mid i \in \tilde{S}, \dfrac{p_i(t)}{p_i^*}=v_\alpha(t,\ \tilde{S})\right\}$

と書き，当該の期間から任意の t' を定めて，$M_\alpha(t')$ のなかから任意の i' をとる。そうした上で，いますべての $p_i(t')/p_i^*$ が i とともに逓増するように財の番号をつけかえるとすれば，$M_\alpha(t')$ のなかではこの比は同一の値をとるから，i' の選択は無差別であり，したがって $M_\alpha(t')$ の最終の元をもってそれとすることができる。するというまでもなく $i>i'$ の i については $p_i(t')/p_i^*>v_\alpha(t,\ \tilde{S})$ となるから，$i \in S$ であり，ゆえにそのような i については仮定から当該期間中 $p_i(t)=\text{constant}$ とならねばならない。よってその i については $\dot{p}_i=H^i(p)$ から $H^i(p(t))=0$，したがって $E_i(p(t))=0$ であり，とりわけ $t=t'$ について

(122)　$E_i(p(t'))=0\quad(i>i')$

を得る。

さて $k=\max\{i \mid E_i(p(t'))\neq 0\}$ とすれば，補助定理 12 によって $E_k(p(t'))<0$ である。ゆえにもし i' について $E_{i'}(p(t'))\neq 0$ のときは (122) から $i'=k$ たらざるをえず，$E_{i'}(p(t'))<0$。よって $E_{i'}(p(t'))\leqq 0$ となるが，$M_\alpha(t')$ のなかの i の並べ方は任意であるから，結局以上の推論から

(123)　$E_i(p(t'))\leqq 0\quad \text{for all } i \in M_\alpha(t')$

となることがいえる。したがって (ii) から

(124)　$H^i(p(t'))\leqq 0\quad \text{for all } i \in M_\alpha(t')$

注(27)　Arrow and Hurwicz, *op. cit.*, Lemma 4 (A).

とならねばならない。

こうして(124)さえいえるならば，あとは第4節の議論に準じて $v_\alpha(t, \tilde{S})$ の単調非増加性が導かれ，また同様に $v_\beta(t, \tilde{S})$ の単調非減小性が導かれる。

さてここで本論の C を補助定理の S とみなすことにより所期の目的が達せられたわけであるが，しかも $v_\alpha(t, \tilde{C})$, $v_\beta(t, \tilde{C})$ はそれぞれ下限，上限をもち，したがってそれらには例のごとく極限値

(125) $\lim_{t\to\infty} v_\alpha(t, \tilde{C}) = v_\alpha^\infty$, $\lim_{t\to\infty} v_\beta(t, \tilde{C}) = v_\beta^\infty$

が存在する。同様に $v_\alpha(0, \tilde{C}) \geqq v_\alpha(t, \tilde{C}) \geqq p_i(t)/p_i^* \geqq v_\beta(t, \tilde{C}) \geqq v_\beta(0, \tilde{C})$ $(i \in \tilde{C})$ であるところから，$p_C(t)$ もまた極限点をもつことになり，他方 $p_C(t)$ が極限点をもつことは(118)から自明であるから，結局 $p(t)$ が極限点 p^∞ をもつ。そこで従前どおり $p^\infty(0)=p^\infty$ から始まる極限経路 $p^\infty(t)$ を考えれば，その上ではすべての $t \geqq 0$ について明らかに

(126) $p_i^\infty(t) = \text{constant} \quad (i \in C)$

(127)
$$v_\alpha^\infty(t, \tilde{C}) = \max_{i \in C} \frac{p_i^\infty(t)}{p_i^*} = v_\alpha^\infty$$
$$v_\beta^\infty(t, \tilde{C}) = \min_{i \in C} \frac{p_i^\infty(t)}{p_i^*} = v_\beta^\infty$$

が成立っている。そこでつぎの補助定理が成立する。

補助定理16　もしすべての $i \in C$ について $p_i(t) = \text{constant}$ for all $t \geqq 0$ であり，また $\max_{i \in} p_i^\infty(t)/p_i^* = v_\alpha^\infty$ (constant), $\min_{i \in C} p_i^\infty(t)/p_i^* = v_\beta^\infty$ (constant) for all $t \geqq 0$ であれば，充分大きなすべての t について

(128) $\dfrac{p_{k'}(t)}{p_{k'}^*} = v_\alpha^\infty$, $\dfrac{p_{k''}(t)}{p_{k''}^*} = v_\beta^\infty$

となるような財 $k', k'' \in \tilde{C}$ が存在する。

証　明

まず

(129) $M_\alpha(t) = \left\{ i \mid i \in \tilde{C}, \dfrac{p_i^\infty(t)}{p_i^*} = v_\alpha^\infty \right\}$

とすれば，どの t についても $M_\alpha(t)$ が非空で正整数の元から成るところから，$M_\alpha(t_*)$ が最小個数の元を含むような t_* を選ぶことができる。そこでいま簡単化のため

(130) $M_\alpha = M_\alpha(t_*)$, $N_\alpha = \tilde{C} - M_\alpha(t_*)$

と記せば，定義から

(131) $v_\alpha^\infty(t, \tilde{C}) = \max\{v_\alpha^\infty(t, M_\alpha), v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)\}$

(132) $v_\alpha^\infty(t_*, M_\alpha) > v_\alpha^\infty(t_*, N_\alpha)$

となることはいうまでもない。ところで $v_\alpha^\infty(t, M_\alpha) > v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)$ が妥当しつづける t については，

(131)から明らかに $M_\alpha(t)\subset M_\alpha$ とならねばならないが，他方定義から $M_\alpha(t)$ は $M_\alpha(t_*)$ より少ない元はもちえないから，$M_\alpha(t)=M_\alpha$ となるのでなくてはならない。すなわち

(133)　$v_\alpha(t, M_\alpha)>v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)$ なら $M_\alpha(t)=M_\alpha$

となるのである。

つぎにどんな $t>t_*$ についても $v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)=v_\alpha^\infty(t, \tilde{C})$ とはならないことを示すことにしよう。帰謬法に拠り，もしある $t>t_*$ についてこの等式が満たされるとすれば，そのような最初の t を t_{**} とすることによって，(131)(132)から

(134)　$v_\alpha^\infty(t, M_\alpha)>v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)$ for $t_*<t<t_{**}$

とならねばならず，よってこの区間の t については(133)から $M_\alpha(t)=M_\alpha$，すなわち $i\in M_\alpha$ のすべての i について $p_i(t)=\text{constant}$, $t_*<t<t_{**}$ とならねばならない。ところでもし $i\in N_\alpha$ なら $i\in M_\alpha$ $(\subset\tilde{C})$ であるか $i\notin\tilde{C}$ であるかのいずれかであり，後者の場合はすべての t について $p_i(t)=\text{constant}$ となるから，上記の結果とあわせて，結局いずれの場合も $i\in N_\alpha$ なら $p_i(t)=\text{constant}$ となる。したがって N_α を S と考えることによって，ふたたび補助定理 15 が使えて $v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)$ は (t_*, t_{**}) において単調非増加となる。ゆえに(129)(131)(132)から

(135)　$v_\alpha^\infty(t_{**}, N_\alpha)\leqq v_\alpha^\infty(t_*, N_\alpha)<v_\alpha^\infty(t_*, M_\alpha)=v_\alpha^\infty=v_\alpha^\infty(t_{**}, \tilde{C})$

となるほかはなく，これは t_{**} の定義と矛盾する。よって帰謬法の仮定は成立せず，すべての $t>t_*$ について

(136)　$v_\alpha^\infty(t, \tilde{C})>v_\alpha^\infty(t, N_\alpha)$,

したがって

(137)　$v_\alpha^\infty(t, M_\alpha)>v_\alpha(t, N_\alpha)$

とならねばならない。ところが(137)は(133)からすべての $t>t_*$ について $M_\alpha(t)=M_\alpha(t_*)$ となることを意味し，結局どんな $k'\in M_\alpha(t_*)$ についても $p_{k'}^\infty(t)/p_{k'}^*=v_\alpha^\infty$ となるのでなくてはならない。k'' の存在についても推論はまったく同様である。

以上に証明したところからは，さらにつぎの補助定理がただちに導かれる。

補助定理17　$p(t)$, $p^\infty(t)$ においてそれぞれ eventually constant な財 i の集合を C, C^∞ とし，それらの補集合を $\tilde{C}$, $\tilde{C}^\infty$ とするとき，$\tilde{C}$ を非空とすれば，その成分のなかには C^∞ の成分が少くとも 1 個はかならず含まれる。

すなわち解経路 $p(t)$ が eventually constant でない成分を含んでいるとすれば，それらのどれかは極限経路 $p^\infty(t)$ 上ではかならず eventually constant な成分の一つとなるのである。

証　明

(127)の v_α^∞, v_β^∞ について（イ）$v_\alpha^\infty=v_\beta^\infty$ となる場合と（ロ）$v_\alpha^\infty>v_\beta^\infty$ となる場合の二つを分けてとり扱おう。

（イ）の場合はいうまでもなくすべての $p_i^\infty(t)/p_i^*$ $(i\in\tilde{C})$ が均等かつ一定となるから，$p_{\tilde{C}}^\infty(t)$ の成分はみな constant であり，そして $p_C^\infty(t)$ の成分が constant であることは自明であるから，結局 $p^\infty(t)$ の全成分が constant となる。ゆえに仮定から $p(t)$ が eventually constant でない成分をもつ以上，定理の成立は明白である。

つぎに（ロ）の場合は，前に証明したところから，t_* より大きいすべての t について(128)を満たすような財 k', $k''\in\tilde{C}$ があり，したがって $p_{k'}$, $p_{k''}$ が $p^\infty(t)$ 上で eventually constant となる。しかも $v_\alpha^\infty>v_\beta^\infty$ から，k', k'' がともに価値尺度財となることはできないから，かりにその一方がなお numéraire の役割を果すとしても，もう一方は $p(t)$ 上で eventually constant ではなかったわけであり，定理の結論が導かれる。

これらの用意ののちに本題の安定性の証明にとりかかろう。まず

(E)　少くとも1組の正の均衡価格 $p^*>0$ がある

ことを仮定し，その p^* と任意の解 $p(t)$ について $v_\alpha(t)$, $v_\beta(t)$ を(28)のように定義すれば，そこでの議論とまったく同様，それらには極限値 $\lim_{t\to\infty} v_\alpha(t)=v_\alpha^\infty$, $\lim_{t\to\infty} v_\beta(t)=v_\beta^\infty$ のあることがいえ，また $v_\alpha(0)\geqq v_\alpha(t)\geqq p_i(t)/p_i^*\geqq v_\beta(t)\geqq v_\beta(0)$ から，$p(t)$ にも極限点 p^∞ のあることがいえる。この極限点 p^∞ が事実上均衡点となることを明らかにするのが，以下での眼目である。

いま任意の解 $p(t)$ において eventually constant な成分の数を c 個としよう。もし $c=n$ であれば，ある時点以降すべての価格が一定値に落着くわけであるから，結論の成立は trivial である。したがって以下では c に関する逆帰納法を用いることにし，$c_0<c<n$ のような c 個の eventually constant な成分をもつすべての解について結論が成立つことを仮定して，同様に c_0 個の eventually constant な成分をもつ解についても結論が成立つことを証明する。

あらためて c_0 個の eventually constant な成分をもつ解を $p(t)$ とし，その極限点 p^∞ を出発点とする極限経路 $p^\infty(t)$ を考えることにしよう。c_0 個の eventually constant な成分については明らかに $p_i^\infty(t)=\text{constant}$ が成立つから，$p^\infty(t)$ の上でもそれらは当然 eventually constant な成分でありつづける。ところが補助定理の17ので見たように，$p^\infty(t)$ は，$p(t)$ では eventually constant でなかった成分を少くとも1個は eventually constant な成分として含んでいるから，$p^\infty(t)$ における eventually constant な成分の数は $p(t)$ のそれより多いことになる。ゆえに解 $p^\infty(t)$ に帰納法の仮定が使えて，$p^\infty(t)$ はある均衡点 p^{**} に収束する。すなわち

(133)　$\lim_{t\to\infty} p^\infty(t)=p^{**}$

そして(127)からすべての t について

(139)　$p_i^\infty(t)=v_\alpha^\infty p_i^*>0$

であるから，

(140)　$p^{**}>0$

である。ところが極限点の定義から $\lim_{t\to\infty} p_i^\infty(t)/p_i^{**}=1$ となるから，

(141)　$\lim_{t\to\infty} \max_i \dfrac{p_i^\infty(t)}{p_i^{**}}=\lim_{t\to\infty} \min_i \dfrac{p_i^\infty(t)}{p_i^{**}}=1$

とならねばならず，あらためて p^{**} を用いて定義された $v_\alpha(t)$, $v_\beta(t)$ について

(142)　$v_\alpha^\infty=v_\beta^\infty=1$

とならねばならない。他方極限経路上ではいうまでもなく

(143)　$\max_i \dfrac{p_i^\infty(t)}{p_i^{**}}=v_\alpha^\infty$,　$\min_i \dfrac{p_i^\infty(t)}{p_i^{**}}=v_\beta^\infty$

が満たされるから，(142)(143)からすべての $t\geqq 0$ について $p^\infty(t)=p^{**}$ となり，したがってとりわけ $t=0$ については

(144)　$p^\infty=p^\infty(0)=p^{**}$

となって，結局極限点 p^∞ が正の均衡点となることが明らかとなる。

最後にふたたび極限点の定義と $p^\infty>0$ であることから

(145)　$\lim_{\nu\to\infty} \max_i \dfrac{p_i(t_\nu)}{p_i^\infty}=\lim_{\nu\to\infty} \min_i \dfrac{p_i(t_\nu)}{p_i^\infty}=1$

が成立つこと，そして $\max_i p_i(t_\nu)/p_i^\infty \geqq p_i(t)/p_i^\infty \geqq \min_i p_i(t_\nu)/p_i^\infty$ であることから，

(146)　$\lim_{t\to\infty} \dfrac{p_i(t)}{p_i^\infty}=1$　$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

となることはすべて第6節の(60)～(63)の場合と同様である。

よって証明は完了し，

定理6　超過需要関数 $E(p)$ が (C)(H)(W)(E)(S_W) を満たすとすれば，調整過程 (25) は大域的に安定である

が成立した。

この帰結は，粗代替性の下での安定性定理として，現在知られているもののうちもっとも一般的なものであるが，なお少くとも1個の正の均衡価格ベクトルの存在を仮定していることに注意すべきである。前にも見たように(補助定理2)，強い粗代替財の場合は，そうした均衡価格の正性が (S)(H) の仮定におのずから含まれるのであるが，弱い事例にあってはその点は保証されず，したがって正の p^* の存在に関する付加的な仮定 (E) が要請されるのである。この仮定が付加されない場合に何が起るかについては，アロー＝ハーヴィッチによって大域的安定性を満たさない2財の例があげ

られている。[28] したがって (C)(H)(S_W) のみから結論を導きえないことは明らかであるが，(E) をより緩い仮定に代置しうるかどうかは今後に残された一つの課題である。

10　さて以上までのところ，われわれは時間を連続的な継起としてとり扱い，もっぱら微分方程式システムによって市場の調整過程をあらわしてきた。ここでいささか手法を変えて，離散的な時間の想定にもとづく定差方程式モデルの考察に移る。その場合の調整機構としては

(147)　$p_i(t+1)=\max\{0,\ p_i(t)+KE_i(p(t))\},\quad K>0\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

であらわされるものをとり上げるが，これは第8節の (25′) の思想を定差方程式で表現し，かつそこでの K_i をすべて一律に K に代置したものと考えることができるであろう。そのような定式化としては宇沢氏が1960年に提唱したところが，最初のそしていまのところ唯一の試みであるように思われる。[29]

前の議論になぞらえ，均衡点 p^* からの距離の指標を

(148)　$v_E(t)=V_E(p(t))=\sum_{i=1}^{n}(p_i(t)-p_i^*)^2$

で定義すれば，(147) と (W) から

(149)　$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}p_i(t+1)^2&\leqq\sum_{i=1}^{n}[p_i(t)+KE_i(p(t))]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)^2+2K\sum_{i=1}^{n}p_i(t)E_i(p(t))+K^2\sum_{i=1}^{n}(E_i(p(t))^2\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)^2+K^2\sum_{i=1}^{n}E_i(p(t))^2\end{aligned}$$

となるところから，

(150)　$$\begin{aligned}v_E(t+1)-v_E(t)&=\sum_{i=1}^{n}[p_i(t+1)-p_i^*]^2-\sum_{i=1}^{n}[p_i(t)-p_i^*]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i(t+1)^2-2\sum_{i=1}^{n}p_i(t+1)p_i^*-\sum_{i=1}^{n}p_i(t)^2-2\sum_{i=1}^{n}p_i(t)p_i^*\\&\leqq K^2\sum_{i=1}^{n}E_i(p(t))^2-2\sum_{i=1}^{n}[p_i(t+1)-p_i(t)]p_i^*\end{aligned}$$

となるが，ふたたび (147) から $p_i(t+1)\geqq p_i(t)+KE_i(p(t))$ となるから，結局，不等式

(151)　$v_E(t+1)\leqq v_E(t)+\{K^2\sum_{i=1}^{n}E_i(p(t))^2-2K\sum_{i=1}^{n}p_i^*E_i(p(t))\}$

が得られることになる。

さて以下においては粗代替財の仮定 (S) の下で，(147) の大域的安定性を証明するが，(S) が満たされる場合は補助定理の1から $E(p^*)=0$ となり，しかも $E(p)$ は連続であるから，いま所与の $c>0$ に対して適当に $\varepsilon>0$ を選べば，$V_E(p)\leqq\varepsilon$ を満たすすべての p について

(152)　$\|E(p)\|<c$

注(28)　Arrow and Hurwicz, *op. cit.*, pp. 246-247.

(29)　H. Uzawa, "Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange", *Review of Economic Studies*, June 1960. 宇沢氏のモデルはまたアロー＝ハーンによってもとり扱われている。Cf. Arrow and Hahn, *op. cit.*, pp. 307-308.

とすることができる。またわれわれは何ら一般性を失うことなく

(153) $\varepsilon \leqq v_E(0) = V_E[p(0)]$

と仮定することができるであろう。

このように ε の値を決めた上で，

(154) $$r^* = \inf_{V_E(p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon/2}{\sum_{i=1}^{n} E_i(p)^2}}$$

(155) $$r^{**} = \inf_{\frac{\varepsilon}{2} < V_E(p) \leqq V_E(p^0)} \frac{2\sum_{i=1}^{n} p_i^* E_i(p)}{\sum_{i=1}^{n} E_i(p)^2}$$

と定義し，K の値を，$V_E(p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の場合は r^* よりも小さく，$\frac{\varepsilon}{2} < V_E(p) \leqq V_E(p^0)$ の場合は r^{**} よりも小さく選ぶとする。r^* はいうまでもなく正であり，また補助定理５から $\sum_{i=1}^{n} p_i^* E_i(p) > 0$ となることを考えれば，r^{**} も正である。よって上記の条件を満たすような K の値はつねに正値に選ぶことができる。

上記のように選ばれた K の値については，不等式(151)からただちに $v_E(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ならば

(156) $v_E(t+1) \leqq v_E(t) + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \varepsilon$

となり，$\frac{\varepsilon}{2} < v_E(t) \leqq v_E(0)$ ならば

(157) $v_E(t+1) < v_E(t)$

となる。したがって結局(156)(157)から，ある t^* 時点以降はかならず

(158) $v_E(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ for all $t \geqq t^*$

が満たされることになる。

ところで以上の推論をつうじて，解経路がある時点以後は均衡点の $\frac{\varepsilon}{2}$ 近傍に入りつづけることが分ったが，まだその中で $V_E(p)$ が振動する可能性は排除されていない。そこでさらにその可能性をとり除き，$0 \leqq V_E(p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ においても $V_E(p)$ が単調に減小することを導くためには，つぎのような処置が考えられよう。すなわち(158)により t^* 以後においては $\|E(p)\| = (\sum_{i=1}^{n} E_i(p)^2)^{\frac{1}{2}} < c$ が満たされており，したがって(151)から

(159) $v_E(t+1) \leqq v_E(t) + K\{Kc^2 - 2\sum_{i=1}^{n} p_i^* E_i(p)\}$

となるから，こんどは K の正値を r^*, r^{**} そして

(160) $$\inf_{0 < V_E(p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}} \frac{2\sum_{i=1}^{n} p_i^* E_i(p)}{c^2}$$

のいずれよりも小さく選びなおせばよい。そうすれば，その K の下では $0 < V_E(p) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ の場合についても

(161) $v_E(t+1) < v_E(t)$

となり，前と同様の議論をつうじて大域的な安定性が導かれるのである。

ただ上記の結論は，連続的な時間の場合とは異なって，調整速度Kの適当な値の選択に依存している点に注意しておく必要がある。事実，目下のモデルにもとづいて，調整経路が p^* に近づかないようなKの選択を例示することは容易であろう(30)。これをもってしても明らかなように，調整過程が時の遅れを含んでいる場合には，安定性は超過需要関数の性質のみからは導かれえないのであって，粗代替性のような知識はきわめて有益ではあっても決して充分とはいい難いのである。これが定差システムの考察から得られる一つの重要な教訓である。

11　つぎに同じく定差方程式の手法に依拠しつつ，いままでのように全市場で同時に調整が行われる事例ではなく，一市場ごとに逐次的に調整が進行していく事例を分析することにしよう。周知のようにこの事例は，ワルラスが彼の主著『純粋経済学要論』の中で展開したところであり(31)，安井教授がかつて「斉一的方法」に対して「輪環的方法」と呼ばれたもの(32)に相当している。

いま $p(0)=\{p_1(0),\ p_2(0),\ \cdots\cdots,\ p_n(0)\}$ を初期の価格ベクトルとすれば，この調整過程はまず財1の市場のみに注意を集め，そこで需給の均衡が達せられるように p_1 を決定する。すなわちそれは所与の $p_2(0),\ \cdots\cdots,\ p_n(0)$ の下で

$$E_1(p_1,\ p_2(0),\ \cdots\cdots,\ p_n(0))=0$$

を p_1 について解くのである。そのような p_1 の値が $p_1(1)$ に決まれば，つぎに調整は財2の市場について行われ，こんどは所与の $p_1(1),\ p_3(0),\ \cdots\cdots,\ p_n(0)$ の下で

$$E_2(p_1(1),\ p_2,\ p_3(0),\ \cdots\cdots,\ p_n(0))=0$$

を p_2 について解いて，$p_2(1)$ が決定される。以下同様な調整を逐次続行していけば，$p_3(1),\ \cdots\cdots,\ p_n(1)$ がすべて定まるが，そのときなお需給の不均衡が残っていれば，$p(1)=\{p_1(1),\ p_2(1),\ p_3(1),\ \cdots\cdots,\ p_n(1)\}$ を新たな初期点としてふたたび調整が繰返される。この過程を一般化して記せば，

$$(155)\quad E_i(p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i,\ p_{i+1}(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t))=0$$

を p_i について解くことによって $t+1$ 段階の財 i の価格 $p_i(t+1)$ が決まることになり，ここでさらに価格の非負性を考慮にいれれば，より一般的に

$$(155')\quad E_i(p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i,\ p_{i+1}(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t))\leqq 0$$

(155′)　$(155')=0$ を満たす p_i の値が負になる場合は $(155')<0$ で $p_i(t+1)=0$

のようである。$p(t)=\{p_1(t),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ が不変にとどまるのは，いうまでもなく $p(t)$ が均衡価格の場合，しかもその場合のみである。

注(30)　Cf. Arrow and Hahn, *op. cit.*, p. 308.

(31)　L. Walras, *Éléments d'economie politique pure*, edition définitive, 1926, pp. 130 ff. (*Elements of Pure Economics*, tr. by Jaffé, 1954, pp. 170 ff.)

(32)　『安井琢磨著作集』第I巻，pp. 407-409.

さて以下では同じく粗代替性 (S) の仮定の下で，この過程の安定性を検討することにしよう。[33] 前と同様，均衡価格 p^* について

$$(156)\quad \begin{aligned} v_\alpha(t)&=V_\alpha[p(t)]=\max_i\left\{\frac{p_1(t)}{p_1^*},\ \frac{p_2(t)}{p_2^*},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_n(t)}{p_n^*}\right\} \\ v_\beta(t)&=V_\beta[p(t)]=\min_i\left\{\frac{p_1(t)}{p_1^*},\ \frac{p_2(t)}{p_2^*},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_n(t)}{p_n^*}\right\} \end{aligned}$$

と定義すれば，$p(t)$ が均衡価格でないかぎり，かならず $v_\alpha(t)$ ないしは $V_\alpha[p(t)]$ が単調減小となり，$v_\beta(t)$ ないしは $V_\beta[p(t)]$ が単調増加となることを以下で示す。ただしこれらの証明はまったく同様であるから，前者のみについて考察すれば足りるであろう。

いま一般性を失うことなく $p_k(t)/p_k^*$ が $\max\{p_1(t)/p_1^*,\ p_2(t)/p_2^*,\ \cdots\cdots,\ p_n(t)/p_n^*\}$ になっていたとし，そのときの財 $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1$ の市場に注目しよう。まず財 1 の市場から順次に考察し，$E_1[p_1(t),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)]<0$ の場合と $E_1[p_1(t),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)]>0$ の場合に分けて考えてみる。前者の場合は $p_1(t+1)<p_1(t)$ とならねばならないから，$p_1(t+1)/p_1^*<p_1(t)/p_1^*\leqq p_k(t)/p_k^*$ となることはいうまでもない。つぎに後者の場合は $p_1(t+1)>p_1(t)$ となるが，それでもなお $p_1(t+1)/p_1^*\geqq p_k(t)/p_k^*$ となることはできない。事実もし $p_1(t+1)/p_1^*\geqq p_k(t)/p_k^*$ となったとすれば，財 1 が $\{p_1(t+1)/p_1^*,\ p_2(t)/p_2^*,\ \cdots\cdots,\ p_n(t)/p_n^*\}$ の maximizer となるが，すると補助定理の 3 によって $E_1[p_1(t+1),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)]<0$ とならねばならず，これは (S) の下での $p_1(t+1)$ 決定の原則 $E_1[p_1(t+1),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)]=0$ と矛盾する。よって以上の推論にもとづき，$E_1[p(t)]$ の正負のいかんにかかわらず

$$\frac{p_1(t+1)}{p_1^*}<\frac{p_k(t)}{p_k^*}$$

とならねばならないことが判明した。

同様に $p_2(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{k-1}(t+1)$ についてもまったく同じ理由から同じ結論が成立つから，結局

$$(157)\quad \frac{p_i(t+1)}{p_i^*}<\frac{p_k(t)}{p_k^*}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1)$$

となって，$i<k$ の財については $p_i(t+1)/p_i^*$ の最大値が $v_\alpha(t)$ を越えることもないし，またそれに匹敵することもない。

つぎに財 k そのものについては，以上の議論によりそれは依然として $\{p_1(t+1)/p_1^*,\ \cdots\cdots,\ p_{k-1}(t+1)/p_{k-1}^*,\ p_k(t)/p_k^*,\ \cdots\cdots,\ p_n(t)/p_n^*\}$ の maximizer であるから，同様に補助定理の 3 から

$$E_k[p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{k-1}(t+1),\ p_k(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)]<0$$

が成立ち，したがって $p_k(t+1)<p_k(t)$，あるいは

$$(158)\quad \frac{p_k(t+1)}{p_k^*}<\frac{p_k(t)}{p_k^*}$$

注(33) 以下の分析については H. Uzawa, "Walras' Tâtonnement in the Theory of Exchange", *Review of Economic Studies*, June 1960 参照。

である。

最後に $i>k$ の財についても $i<k$ の財と同様の推論を適用すれば，やはり

$$\frac{p_i(t+1)}{p_i^*}<\frac{p_k(t)}{p_k^*} \quad (i=k+1,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{159}$$

が成立するから，結局

$$v_\alpha(t+1)=\max_i\left\{\frac{p_1(t+1)}{p_1^*},\ \frac{p_2(t+1)}{p_2^*},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_n(t+1)}{p_n^*}\right\}$$

と定義すれば，以上の(157)(158)および(159)から，$\{p_1(t),\ p_2(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ が不均衡価格であるかぎり

$$v_\alpha(t+1)<v_\alpha(t)$$

がいえたことになり，証明の目的が達せられる。

さきにも述べたように，minimizer についてもまったく同様に

$$v_\beta(t+1)>v_\beta(t)$$

が導かれるから，あとは第6節後半の議論に準じて大域的安定性が導かれる。

ところで上記の証明は，つぎの点で宇沢氏の証明と異なっている。それは宇沢氏が，たとえば $\{p_1(t+1),\ p_2(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ から $\{p_1(t+1),\ p_2(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i(t+1),\ p_{i+1}(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ への移行の都度，すなわち一市場の調整のたびごとに，前者の v_α, v_β を後者の v_α, v_β と比較しているのに対して，われわれは $\{p_1(t), p_2(t), \cdots\cdots, p_n(t)\}$ から $\{p_1(t+1), p_2(t+1), \cdots\cdots, p_n(t+1)\}$ への一巡の調整が行われたのちにおける v_α, v_β の増減を較べている点である。換言すれば，宇沢氏のリヤプーノフ関数の n 回分の調整が，われわれの one round の調整に当っているのである。ここでそのような手法を選んだのは，たんにその方がワルラスの思想に忠実であるばかりでなく，また宇沢方式にはある種の困難が含まれているからである。いま $\{p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ から $\{p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_i(t+1),\ p_{i+1}(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ への移行のさいに，かりに $i<k$ のような財 k が $\{p_j/p_j^*\}$ の maximizer になっているとすれば，それは i 市場の調整ののちも依然として maximizer たりつづけるから，$\{p_1(t+1),\ \cdots\cdots,\ p_{i-1}(t+1),\ p_i(t),\ \cdots\cdots,\ p_n(t)\}$ が不均衡価格であったとしても $v_\alpha(t)$ は減小しないのである。

12　ここで，いままで立脚してきた粗代替性の仮定を離れ，それとは別個な仮定の下でもなお大域的な安定性が確保されるかどうかを解明してみることにしよう。まずその第一のものとしてとりあげたいのは，いわゆる優対角性 (Dominant Diagonal) の仮定である。いま超過需要関数 $E_i(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)$ あるいは $e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})$ がその定義域において微分可能であり，偏導関数 $\partial E_i(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)/\partial p_j$, $\partial e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})/\partial q_j$ をもつことを仮定すればその経済が一般に負の優対角性を満たすとは

すべての価格 q について

(D)

(a) $\dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}<0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

(b) $c_i(q)\left|\dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}\right|>\sum_{j\neq i} c_j(q)\left|\dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_j}\right| \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

となるような正のベクトル $\{c_1(q),\ c_2(q),\ \cdots\cdots,\ c_{n-1}(q)\}$ が存在する

ことである。ここで $\partial e_i/\partial p_j$ は i 財と j 財を任意所与の単位で測ったときの偏導関数の値をあらわしているから，$(c_i\cdot c_j)\partial e_i/\partial p_j$ は，i 財の旧単位による1単位が新単位による c_i 単位にひとしく，j 財の旧単位による1単位が新単位による c_j 単位にひとしいときの偏導関数の値をあらわすわけであり，したがって結局(b)の条件は，適当に測定単位を選べば

$$\left|\frac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}\right|>\sum_{j\neq i}\left|\frac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}\right| \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

が満たされることを意味している。すなわち優対角性とは，各財の超過需要関数がその財みずからの価格の変化に対してもっとも感応的であり，それから受ける効果が他財の価格から受ける効果をすべて合わせたものより一そう大きいことを示しているのである。これは解釈のしようによっては，ワルラスがかつて主著のなかで述べた思想を現代的に再定式化したものともいうことができるであろう。

ところで(D)が，価値尺度財としての第 n 財を除いて，規準化された体系について定義されているのは，n 財までをも含めるとそれを定義することが不可能となるからである。これはつぎのような推論をつうじて，きわめて容易に理解することができよう。いま任意の正ベクトル $\{c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n\}$ について $p_j/c_j\equiv\bar{p}_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ と定義し，

$$\max_j\left(\frac{p_j}{c_j}\right)=\max_j \bar{p}_j=p_r \tag{160}$$

とすれば，$E_r(p)$ についてゼロ次同次性から

$$p_r\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_r}=-\sum_{j\neq r}p_j\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_j} \tag{161}$$

が成立つから，(160)を代入して

$$c_r\bar{p}_r\left|\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_r}\right|=\sum_{j\neq r}c_j\bar{p}_j\left|\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_j}\right|\leqq\bar{p}_r\sum_{j\neq r}c_j\left|\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_j}\right| \tag{162}$$

となり，ゆえに

$$c_r\left|\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_r}\right|\leqq\sum_{j\neq r}c_j\left|\frac{\partial E_r(p)}{\partial p_j}\right| \tag{163}$$

を得る。すなわちゼロ次同次性が満たされている以上，すべての財を含む体系が優対角性の条件を満たすことは不可能なのである。

さて上記の優対角性の定義(D)においては，一般にベクトル $c(q)$ が q に依存することになって

いる。しかし，このような一般的条件の下で市場の大域的安定性を導く試みは，いまのところまだ成功をみていない。そこでここではアロー＝ブロック＝ハーヴィッチの貢献に倣って[34] (D) の条件をより限定し，それを

すべての q について

$$(\mathrm{D}')\quad \begin{cases} (\mathrm{a})\quad \dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}<0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \\ (\mathrm{b})\quad c_i\left|\dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_i}\right|>\sum_{j\neq i} c_j\left|\dfrac{\partial e_i(q)}{\partial q_j}\right| \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \end{cases}$$

となるような正の定数ベクトル $\{c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_{n-1}\}$ が存在する

という強い形のものに改めよう，この形の優対角性の仮定の下で，規準化された調整過程 $\dot{q}_i=k_ie_i(q)$, $k_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ の安定性を導くのが，以下での所論の意図である。

まず目下の事例については

$$(164)\quad v_D(t)=V_D[q(t)]=\max_i \frac{|k_ie_i(q)|}{c_i}$$

と定義し，定石どおり不均衡状態では v_D がかならず単調に減小していくことを示すことにしよう。

$$(165)\quad \frac{|k_re_r(q)|}{c_r}\geq\frac{|k_ie_i(q)|}{c_i} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

と想定すれば，$v_D(t)=|k_re_r(q)|/c_r$ となるから，$\dot{v}_D$ が存在するときにはつねに

$$(166)\quad \dot{v}_D=\frac{k_r}{c_r}(\mathrm{sgn}\ e_r(q))\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\dot{q}_j=\frac{k_r}{c_r}(\mathrm{sgn}\ e_r(q))\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}k_je_j(q)$$

となる。ところで不均衡の状態の下では，少くとも1個の j については $e_j(q)\neq0$ とならねばならず，したがって $|e_j(q)|>0$ とならねばならないから，(165)から明らかに $|e_r(q)|>0$ となり，ゆえに (D′)(b) の r 番目の条件の両辺に $|e_r(q)|$ をかけ，(165)を用いれば，

$$(167)\quad c_r\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_r}\right|\cdot|e_r(q)|>\sum_{j\neq r}c_j\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\right|\cdot|e_r(q)|\geq\sum_{j\neq r}c_j\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\right|\left(\frac{c_r}{k_r}\cdot\frac{k_j}{c_j}\right)|e_j(q)|$$
$$=\frac{c_r}{k_r}\sum_{j\neq r}\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\right|\cdot|e_j(q)|k_j$$

を得る。よって

$$(168)\quad k_r\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_r}\right|\cdot|e_r(q)|>\sum_{j\neq r}k_j\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\right|\cdot|e_j(q)|$$

であり，しかも (D′)(a) から $\partial e_r(q)/\partial q_r<0$ であるから

$$(169)\quad -k_r\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_r}(\mathrm{sgn}\ e_r(q))\,e_r(q)>\sum_{j\neq r}k_j\left|\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}\right|\cdot|e_j(q)|\geq(\mathrm{sgn}\ e_r(q))\sum_{j\neq r}k_j\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}e_j(q),$$

したがって

$$(170)\quad (\mathrm{sgn}\ e_r(q))\sum_{j=1}^{n-1}k_j\frac{\partial e_r(q)}{\partial q_j}e_j(q)<0$$

注(34) Arrow, Block and Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium, II", p. 105.

となる。この帰結を考慮すれば，(166)から v_D が減小することは明らかである。なおまた $\dot{v}_D$ が存在しない場合にも，前の第6節と同様の分析手法を用いることによって，同じ帰結が導かれるであろう。

つぎの事例は社会的超過需要関数 $E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ についていわゆる顕示選好の弱い公理が成立っている場合である。すなわちいま任意の相異なる価格ベクトルを p', p'' とするとき，つぎの条件

(R)　　$p'E(p') \geqq p'E(p'')$, $E(p') \neq E(p'')$ なら $p''E(p'') < p''E(p')$

が満たされているというのがそれである。いま p' が不均衡価格ベクトル p, p'' が均衡価格ベクトル p^* であるとすれば，第3節でも述べたように(R)の最初の不等式の左辺はワルラス法則 $pE(p)=0$ によって0となり，また右辺は価格の非負性 $p \geqq 0$ と均衡条件 $E(p^*) \leqq 0$ によって $pE(p^*) \leqq 0$ となるから，(R) の仮定は自動的に満たされる。他方，結論の不等式の左辺もまた同様にワルラス法則から0となるから，結局この場合，(R)を仮定することは

(171)　$p^*E(p) > 0$

が成立つことにほかならず，これはさきに粗代替性(S)の仮定の下で補助定理5として導いた帰結と合致する。ゆえにあとの推論はすべて既述のところとまったく同じ手順で運ぶことができ，前稿(21)ないしは(22)の大域的安定性が導かれるのである。

ただ上記の命題については，(S)が(R)を意味するのでもなく，また(R)が(S)を意味するのでもないことに留意するのでなくてはならない。前述のように(R)は(171)を意味するが，これはいわば(R)の帰結が，その仮定の条件とともに，価格の一方を均衡価格，他方を不均衡価格にとったスペシャル・ケースについてのみ満たされるということであり，一般的な(R)の成立を保証するものではない。換言すればどんな2組の価格についても(R)が成立つためには，その社会のすべての個人があたかも単一の一個人であるかのごとくに行動すること，すなわち彼らの効用関数が"homothetic"なものであることを要するが，(171)は別にそのような仮定がなくても(S)から導かれうるのである。(S)と(R)の条件の下で，それぞれ別個に安定性を導くことの分析的意義も，この点に見出されるのでなくてはならないであろう。

さてこれと関連した最後の事例として，均衡点における純引取量がゼロの事例をとり扱っておこう。これは価格が均衡値をとる場合には，各取引主体が手持の財保有量に満足し，したがって超過需要量が社会的総和においてゼロとなるのみならず，また個別的にもゼロとなるケースである。ゆえにいま主体 a の超過需要量ベクトルを $z^a(p)$ で記せば，この条件はすべての a について

(172)　$z^a(p^*)=0$

となることで示される。

ところで各個別主体については顕示選好の弱い公理が当然成立つから，p を任意の不均衡価格と

すれば，$pz^a(p) \geqq pz^a(p^*)$，$z^a(p) \neq z^a(p^*)$ なら，かならず $p^*z^a(p^*) < p^*z^a(p)$ となり，(172)と個別的なワルラス法則から，この公理の仮定はかならず満たされる。よってその帰結

(173)　$p^*z^a(p)>0$

もまた成立せざるをえず，これをすべての主体について総計して

(171)　$p^*E(p)>0$

を得る。

13　以上われわれは粗代替性，優対角性，顕示選好の弱い公理，均衡点におけるゼロ取引の事例など，さまざまな事例についてそれぞれ大域的安定性を解明してきた。現在までのところこのようなカタログが，知られているかぎりでのほとんどすべての成果を含み，またこれらのケース間で，その一つが他を意味するという包含関係も見出されない。[35] 今後この方向での進展がありうるとすれば，それは上記のいずれの事例よりもより広い十分条件の開発に求められるべきものであろう。しかし他方，そうした条件がどこまで拡張されるにせよ，事態を他の端から見るときには，少くともそれが無制限ではありえないことをわれわれはすでに知っている。というのは，スカーフおよびゲールの２人の理論家によって，大域的な不安定性が生じる反例がすでにあげられているからである。[36] 彼らの反例はいずれもいわゆるギッフェンの逆説が起る場合に関連しているが，本節ではそれをより巧妙精緻に論じたスカーフの議論を紹介して，すでにかなり長くなった本稿を閉じたいと思う。

スカーフのモデルは３人の取引主体と３種類の財から成っている。これらの主体の効用関数は

$$(174)\quad \begin{aligned} u_2(x_1,\ x_2,\ x_3) &= u_1(x_2,\ x_3,\ x_1) \\ u_3(x_1,\ x_2,\ x_3) &= u_2(x_2,\ x_3,\ x_1) \end{aligned}$$

という巡回的な置換関係にあると想定され，他方彼らの初期保有量もまたこれに対応した置換関係をもつと仮定される。すなわち第１の主体の財１，財２および財３の初期保有量を $(I,\ J,\ K)$ とすれば，第２の主体のそれは $(K,\ I,\ J)$ で，第３の主体のそれは $(J,\ K,\ I)$ であらわされるのである。いまこれらの仮定の下で導かれる第１の主体の超過需要関数を

(175)　$z_1(p_1,\ p_2,\ p_3)$，$z_2(p_1,\ p_2,\ p_3)$，$z_3(p_1,\ p_2,\ p_3)$

と書くことにしよう。すると第２，第３の主体のそれは，上記の関係から財１，２，３について明らかに

注(35)　(D) の形の優対角性は粗代替性から導かれるが，(D′) の形のそれはそのようには導かれえない。Cf. Arrow and Hahn, *op. cit.*, p. 234.

(36)　H. Scarf, "Some Examples of Global Instability of the Competitive Equilibrium", *International Economic Review*, September 1960, D. Gale "A Note on Global Instability of Competitive Equilibrium", *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 10, 1963, reprinted in P. Newman ed., *Readings in Mathematical Economics*, Vol. I, 1968.

(176)　$z_3(p_2,\ p_3,\ p_1),\ \ z_1(p_2,\ p_3,\ p_1),\ \ z_2(p_2,\ p_3,\ p_1)$

および

(177)　$z_2(p_3,\ p_1,\ p_2),\ \ z_3(p_3,\ p_1,\ p_2),\ \ z_1(p_3,\ p_1,\ p_2)$

と書かれ，したがって社会全体の超過需要関数はこれらを総計して

$$\begin{aligned} E_1(p_1,\ p_2,\ p_3)&=z_1(p_1,\ p_2,\ p_3)+z_3(p_2,\ p_3,\ p_1)+z_2(p_3,\ p_1,\ p_2)\\ E_2(p_1,\ p_2,\ p_3)&=z_2(p_1,\ p_2,\ p_3)+z_1(p_2,\ p_3,\ p_1)+z_3(p_3,\ p_1,\ p_2)\\ E_3(p_1,\ p_2,\ p_3)&=z_3(p_1,\ p_2,\ p_3)+z_2(p_2,\ p_3,\ p_1)+z_1(p_3,\ p_1,\ p_2)\end{aligned} \tag{178}$$

のようになる。

動学的な調整過程については，適当に財の単位を選んで $\dot{p}=E_i(p_1,\ p_2,\ p_3)\ (i=1,\ 2,\ 3)$ とすることにしよう。ワルラスの法則 $p_1E_1(p_1,\ p_2,\ p_3)+p_2E_2(p_1,\ p_2,\ p_3)+p_3E_3(p_1,\ p_2,\ p_3)=0$ から，すべての t について $p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2=\text{constant}$ であるから，(37) 価格の運動はつねに原点を中心とし初期の価格ベクトルを通過する球面上にあることになり，よって均衡価格は，それを示す半直線と上記の球面との交点で規準化して考えればよい。ところが目下のモデルでは $p_1=p_2=p_3$ という価格が均衡価格となることが，ワルラス法則と(178)とから容易に確かめられる。(38) よっていま便宜上 $p_1(0)^2+p_2(0)^2+p_3(0)^2=3$ という初期価格を選べば，その均衡価格は (1, 1, 1) に規準化されて示されることになる。

以下ではまず(a)ある小さな正の数 ε について $p_1/p_2>\varepsilon$，$p_2/p_1>\varepsilon$，$p_3/p_2>\varepsilon$ かつ $p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2=3$，$p_1\geqq 0$，$p_2\geqq 0$，$p_3\geqq 0$ を満たすような価格の集合 P_ε のどの点においても $A=\partial E_1/\partial p_2<0$，$B=\partial E_1/\partial p_3>0$ であることを仮定して，均衡点 (1, 1, 1) が P_ε において一意的となることを証明し，つぎに (b) その均衡点において $C=\partial E_1/\partial p_1>0$ であること（ギッフェンの逆説）を仮定して，この均衡点が局所的に不安定となることを証明する。そして最後に (c) 上記の諸仮定を満たす事例を構成して，そこで $p(t)$ が P_ε のどの点から出発するにせよ，その運動経路はかならず P_ε のなかにとどまりつづけることを証明する。これらの三命題がすべて成立すれば，当該の調整過程が大域的不安定性を惹き起しうることは明らかであろう。

(a) の証明

まず P_ε における均衡点 (1, 1, 1) の一意性を示すために，(178)から

$$\begin{aligned} E_2(p_1,\ p_2,\ p_3)&=E_1(p_2,\ p_3,\ p_1)\\ E_3(p_1,\ p_2,\ p_3)&=E_2(p_2,\ p_3,\ p_1)\\ E_1(p_1,\ p_2,\ p_3)&=E_3(p_2,\ p_3,\ p_1)\end{aligned} \tag{179}$$

が成立つこと，また同様に $E_3(p_1,\ p_2,\ p_3)=E_1(p_3,\ p_1,\ p_2)$，…… なども成立つことに注目しよう。

注(37)　$d(\sum p_i{}^2)/dt=2\sum p_i\dot{p}_i=2\sum p_iE_i(p)=0$。

(38)　(178) で $p_1=p_2=p_3\ (>0)$ とすれば $E_1(p)=E_2(p)=E_3(p)$ となるから，それらはすべて同符号とならざるをえない。他方ワルラス法則から $E_1(p)+E_2(p)+E_3(p)=0$ であるから，$E_i(p)=0\ (i=1,\ 2,\ 3)$ となるほかはない。

この事実は目下のモデルでは，(α, β, γ) が均衡点なら (β, γ, α) もまた均衡点となること，さらに (γ, α, β) もまた均衡点となることを意味している。それゆえ，もし P_i のなかに $(1, 1, 1)$ 以外の均衡点があるとすれば，その成分を適当に置換して

(180)　$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$

または

(181)　$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$

とすることができ，そのいずれの場合も少くとも1個の不等号は強い意味で成立つと考えることができる。

ところで(180)の場合と(181)の場合とで議論の本質には何らの差もないから，以下ではもっぱら前者の場合のみをとりあげていくことにしよう。すると(179)から $E_2(\alpha, \beta, \gamma) = E_1(\beta, \gamma, \alpha)$ という関係が成立っているから，目下の仮定の $A = \partial E_1/\partial p_2 < 0$, $B = \partial E_1/\partial p_3 > 0$ の下では，E_2 が α について増加関数，γ について減小関数となることが明らかである。よって(180)で少くとも一方の不等号が強い形で満たされる以上

(182)　$E_2(\alpha, \beta, \gamma) > E_2(\beta, \beta, \beta)$

となるほかはなく，後者は $(1, 1, 1)$ が均衡点であることとゼロ次同次性から明らかにゼロであるから，これは (α, β, γ) が均衡点であるという仮定と矛盾する。

(b) の証明

つぎは均衡点 $(1, 1, 1)$ の局所的不安定性の証明である。いま慣例に倣って

(183)　$V(p_1, p_2, p_3) = \dfrac{1}{2}\sum_i (p_i - 1)^2$

とおけば，ワルラスの法則によって

(184)　$\dot{V} = \sum_i (p_i - 1)\dot{p}_i = \sum_i (p_i - 1)E_i = -\sum_i E_i$

である。ここで E_i をテーラー展開し

(185)　$$\sum_i E_i = 0 + \sum_i \sum \frac{\partial E_i}{\partial p_j}(p_j - 1) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 E_i}{\partial p_j \partial p_k}(p_j - 1)(p_k - 1) + \cdots\cdots$$

$$= \sum_j (p_j - 1)\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial p_j} + \frac{1}{2}\sum_j \sum_k (p_j - 1)(p_k - 1)\sum_i \frac{\partial^2 E_i}{\partial p_j \partial p_k} + \cdots\cdots$$

を得るが，ふたたびワルラス法則 $\sum_i p_i E_i = 0$ を用い，それを p_j で微分すれば

(186)　$E_i + \sum_i p_i \dfrac{\partial E_i}{\partial p_j} = 0,$

ゆえに均衡点 $(1, 1, 1)$ では

(187)　$\sum_i \dfrac{\partial E_i}{\partial p_j} = 0$

を得る。さらにまた(186)を p_k について微分すれば

(188) $$\frac{\partial E_j}{\partial p_k}+\frac{\partial E_k}{\partial p_j}+\sum_i p_i\frac{\partial^2 E_i}{\partial p_j\partial p_k}=0,$$

ゆえに均衡点では

(189) $$\sum_i \frac{\partial^2 E_i}{\partial p_j\partial p_k}=-\left(\frac{\partial E_j}{\partial p_k}+\frac{\partial E_k}{\partial p_j}\right)$$

が得られる。そこでこれらの結果(187)，(189)を(185)に代入して

(190) $$\sum_i E_i=-\frac{1}{2}\sum_j\sum_k(p_j-1)(p_k-1)\left(\frac{\partial E_j}{\partial p_k}+\frac{\partial E_k}{\partial p_j}\right)+\cdots\cdots$$

が得られることになる。

さて均衡点 (1, 1, 1) における E_1, E_2, E_3 のヤコービ行列は

(191) $$\begin{bmatrix}\frac{\partial E_1}{\partial p_1} & \frac{\partial E_1}{\partial p_2} & \frac{\partial E_1}{\partial p_3}\\ \frac{\partial E_2}{\partial p_1} & \frac{\partial E_2}{\partial p_2} & \frac{\partial E_2}{\partial p_3}\\ \frac{\partial E_3}{\partial p_1} & \frac{\partial E_3}{\partial p_2} & \frac{\partial E_3}{\partial p_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & A & B\\ B & C & A\\ A & B & C\end{bmatrix}$$

のように書かれ，また E_1, E_2, E_3 のゼロ次同次性から，同じく均衡点では

(192) $$\sum_i\frac{\partial E_i}{\partial p_j}p_j=A+B+C=0$$

が満たされるから，(190)の右辺第1項の係数行列は

(193) $$\begin{bmatrix}2C & A+B & B+A\\ B+A & 2C & A+B\\ A+B & B+A & 2C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2C & -C & -C\\ -C & 2C & -C\\ -C & -C & 2C\end{bmatrix}$$

となり，ゆえに(190)は

(194) $$\sum_i E_i=-\frac{C}{2}\sum_j\sum_k(p_j-1)(p_k-1)\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}+\cdots\cdots$$

$$=-\frac{C}{2}[(p_1-p_2)^2+(p_2-p_3)^2+(p_3-p_1)^2]+\cdots\cdots$$

となる。

ところが $\sum p_i^2=3$, $p_i\geqq 0$ の球面上では

(195) $$(p_1-p_2)^2+(p_2-p_3)^2+(p_3-p_1)^2\geqq\frac{3}{2}\sum_i(p_i-1)^2$$

となることを主張することができる。事実 $p_1^2+p_2^2+p_3^2=3$, $p_1\geqq 0$, $p_2\geqq 0$, $p_3\geqq 0$ から

(196) $$p_1+p_2+p_3\leqq 3,$$

ゆえに両辺に $\sum p_i$ をかければ

(197) $$3\sum_i p_i\geqq p_1^2+p_2^2+p_3^2+2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)$$

を得，さらに(197)の両辺から9を引いて計算すれば

(198) $\frac{3}{2}(-\sum_i p_i^2+2\sum_i p_i-3)\geqq -2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+2(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)$

を得る。よって(198)から(195)が導かれる。

(195)が成立すれば，(194)から

(199) $\sum_i E_i\leqq -\frac{C}{2}\cdot\frac{3}{2}\sum_i(p_i-1)^2+\cdots\cdots=-\frac{3C}{2}V(p_1,\ p_2,\ p_3)+\cdots\cdots$

となり，仮定から均衡点 (1, 1, 1) では $C>0$，したがってその近傍でも $C>0$，また $p_i=1$ 以外の点では $V>0$ であるから，V が充分小さい場合には $\sum_i E_i<0$ となることが明らかである。それゆえ(184)から $\dot{V}>0$ となり，均衡点 (1, 1, 1) は局所的に不安定となることがいえた。

(c) の証明

最後につぎのような形の効用関数の事例を第1の主体について考えることにする。

(200) $u(x_1,\ x_2,\ x_3)=-\left(\frac{\alpha_1^{a+1}}{x_1^a}+\frac{\alpha_2^{a+1}}{x_2^a}+\frac{\alpha_3^{a+1}}{x_3^a}\right)$

ここで $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ は任意の非負のベクトル，a は正の定数である。初期保有量については，第1の主体のそれを $(I_1,\ I_2,\ I_3)$ であらわすことにしよう。第2，第3の主体の効用関数および初期保有量が，前のように巡回的な置換によって与えられることはいうまでもないであろう。

この事例に立脚して，つぎの三条件

（イ） $a>1$

（ロ） $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ が $(b,\ 1,\ 0)$ の近くに与えられる。ただし $b>(a+1)/(a-1)$

（ハ） $(I_1,\ I_2,\ I_3)$ が $(1,\ 0,\ 0)$ の近くに与えられる

が満たされるときに，かならず不安定性が生じることを示すのが，以下での議論の目的である。そのために最初にまず

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=(b,\ 1,\ 0)$$
$$(I_1,\ I_2,\ I_3)=(1,\ 0,\ 0)$$
$$b>\frac{a+1}{a-1}$$

の場合を詳しく検討してみることにしよう。

この場合には，定石どおりの計算をつうじて，第1の主体の超過需要関数は

$$z_1=\frac{bp_1^{a/(1+a)}}{bp_1^{a/(1+a)}+p_2^{a/(1+a)}}-1$$

(201) $$z_2=\frac{1}{p_2^{1/(1+a)}}\frac{p_1}{bp_1^{a/(1+a)}+p_2^{a/(1+a)}}$$

$$z_3=0$$

となることが容易に分る。そして $p\in P_\varepsilon$ について

$$\frac{\partial z_1(p_1,\ p_2,\ p_3)}{\partial p_2}<0,\quad \frac{\partial z_1(p_1,\ p_2,\ p_3)}{\partial p_3}>0$$

となることもただちに確かめられるから，市場の超過需要関数についても，先述の (a) の仮定が満たされている。つぎに均衡点 (1, 1, 1) での $\partial E_1/\partial p_1$ の値を計算すると，

$$\frac{\partial E_1}{\partial p_1}=\frac{ab-(b+1)-a}{(b+1)^2(a+1)}$$

となるから，$b>(a+1)/(a-1)$ であればこれは正となり，したがって (b) の仮定が満たされることも明らかである。よって前に証明したところにしたがって，この均衡点は P_ε で一意的であり，また局所的に不安定である。

つぎにこの事例においては p がつねに P_ε のなかにとどまり，P の境界からは離れていることを証明しよう。これを示すため

$$\varphi=\min\left(\frac{p_2}{p_1},\ \frac{p_3}{p_2},\ \frac{p_1}{p_3}\right) \tag{202}$$

とするとき，充分小さな正の定数 K が選べて，$\varphi<K$ なら $\dot{\varphi}>0$ となることをいえばよい。ただし以下ではこの最小値をたとえば $p_1/p_3=m$ であるとして，もっぱらその場合について推論を進めれば足りるであろう。というのは，他の場合は再三，巡回的な置換の手続きで処理できるからである。

そこで当面の課題として，m が充分に小さいときに $\dot{m}>0$ すなわち $p_3\dot{p}_1-p_1\dot{p}_3>0$ あるいは $p_3E_1-p_1E_3>0$ となることを証明しよう。E_1, E_3 を(178)にしたがって計算すれば，$p_3E_1-p_1E_3$ は

$$\frac{\left(\dfrac{p_3}{p_1}\right)^2+1}{b\left(\dfrac{p_3}{p_1}\right)^{a/(1+a)}+1}-\frac{\dfrac{p_3}{p_1}}{b\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{a/(1+a)}}-\frac{\dfrac{p_2}{p_3}}{b\left(\dfrac{p_2}{p_3}\right)^{a/(1+a)}+1} \tag{203}$$

と同符号となることが分る。ところが(203)の第1項は

$$\frac{\left(\dfrac{1}{m}\right)^2+1}{b\left(\dfrac{1}{m}\right)^{a/(1+a)}+1}$$

にひとしく，また $p_2/p_3\leqq1/m$ であるところから

$$\frac{-\dfrac{p_2}{p_3}}{b\left(\dfrac{p_2}{p_3}\right)^{a/(1+a)}+1}\geqq\frac{-\dfrac{1}{m}}{b\left(\dfrac{1}{m}\right)^{a/(1+a)}+1},$$

そしてさらに

$$\frac{-\left(\dfrac{p_3}{p_1}\right)}{b\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{a/(1+a)}+1}>-\frac{1}{m}$$

である。ゆえにこれらの項をあわせて考えれば

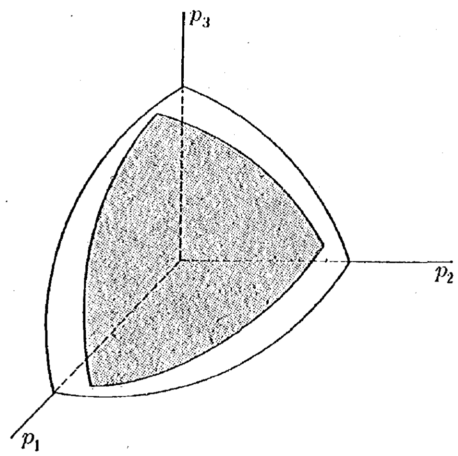
$$(204)\quad \left(\frac{1}{m}\right)^2+1-\frac{2}{m}-b\left(\frac{1}{m}\right)^{1+a/(1+a)}>0$$

となるとき，(203)が正となることが明らかであり，これはmの小さい値についてはかならず真である。ゆえに$\dot{m}>0$であり，超過需要関数のシステム(201)の下での大域的不安定性が示されたことになる。

ところで(201)そのものではなく，それに近似した超過需要関数を考える場合にも（そのような事例はたとえば$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$を$(b, 1, 0)$に近く，$(I_1, I_2, I_3)$を$(1, 0, 0)$に近く選べば得られるであろう），われわれはなお大域的不安定性の生起を主張することができるであろう。この点を明らかにするために，いま第1図に$p_1^2+p_2^2+p_3^2=3$の球面を描き，その上である小さなKの値について

$$\min\left(\frac{p_2}{p_1},\ \frac{p_3}{p_2},\ \frac{p_1}{p_3}\right)\geqq K$$

を満たす諸点の集合を蔭をつけた部分で示すことにすれば，前に証明したところは，Kの値を充分小さくとるかぎり，この領域内から出発する価格の経路は決して当該の領域から外に出ないということである。これは当該領域の境界点では$p_3E_1-p_1E_3$が厳格に正となるからであり，この事実は(201)に近い超過需要関数のシステムについても妥当するであろう。



第1図

新しい需要関数の場合も，

$$\frac{p_2}{p_1}>K,\ \frac{p_3}{p_2}>K,\ \frac{p_1}{p_3}>K$$

で定義される領域においては，$A<0$, $B>0$の条件が妥当しつづけ，また均衡点$(1, 1, 1)$における$C>0$の条件も妥当しつづけるから，問題の均衡点が一意的で局所的に不安定であるという結論には何らの変りもない。また蔭をつけた部分の外の点についてはいざ知らず，その内点から出発する調整経路がこの領域内にとどまりつづけるという結論についても，格別に変った点は見出されないのである。

（経済学部教授）