Title	OLS, TSLSの小標本分布論について
Sub Title	On the exact sampling distribution of ordinary and two stage least squares estimators
Author	松野, 一彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1974
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.67, No.9 (1974. 9) ,p.753(15)- 773(35)
JaLC DOI	10.14991/001.19740901-0015
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19740901-0015

はない。資本の節約には，信用関係展開の前提である競争の展開に規定されたより具体的次元の問題が登場する。端的に言えば，信用による利潤率均等化の機構，すなわち，諸資本家間での資本の効率的配分と共同的利用の関係の展開がそれである。こうした観点から当然要請されるべき信用論展開の論理段階的差異をヒルファディングは事実上，無視し，貨幣の節約という観点で形式上一貫させようとするのである。『金融資本論』の展開に即していうと，第一篇での資本信用の展開が，貨幣節約なる信用の基本的役割と直接的に結びつけられている。そして第三篇第十一章ではじめて，明示的に信用関係の競争論的基礎づけがなされるに至っている。こうした信用論の構成は，信用論の競争論を媒介とした再生産論的位置づけを非常に不明瞭なものにしてしまっている。したがって，第十一章以降が，競争過程によりつつ再生産過程の独自の把握をめざしたものだとすることもできない。しかし資本信用の措定のうちにある上記のごとき混乱が，混乱ゆえに信用の基本的問題のあり方を逆説的に示すことになっているともいえる。それだからこそ，帝国主義把握の基軸的概念として金融資本も理論的に措定しえた。すなわち，独占形成の基礎としての生産の集積をもたらす資本集中過程を基軸に，信用論的資本集中過程も問題にされるべきものである。それをヒルファディングはいわば貨幣資本蓄積という視点からのみなそうとしている。

かれの金融資本規定は，ほぼ3つの類型においてとらえることができるが，それが，序言での問題の提示，すなわち独占の形成と金融資本の形成に分裂し，後者にのみ信用関係が関与しているとする理解[(36)]は成立し難いのである。独占（＝独占的結合）の形成は金融資本展開の主要契機とされている。しかし，それを，結局のところ，貨幣資本蓄積の論理に収斂させてしまう。カルテルの展開に示される独占資本の発展は根底には資本集中を契機として推し進められる。そして資本集中は，株式資本と，それの擬制資本としての措定を契機とする信用関係自体の展開によって遂行される過程でもある。マルクスは，『経済学批判要綱』以来，こうした問題をかれの信用論の視野のうちにもち[(37)]，それを「信用」論の座標軸の一つとしていたが，他方で，現実資本の運動との対応を論理化する意図をも捨てなかった。ヒルファディングはそれを貨幣資本の蓄積の問題として把握し，現実資本の運動をその枠内におしこめて体系化を計ったのである。そこにあるのは，再生産過程の両蓄積運動の対応関係ではなかった。ここにマルクス―ヒルファディングの理論的継承と達成の成否を判断する鍵があるといってよいように思うし，ヒルファディング体系の現実性もあるように考えられる。

（経済学部教授）

注(36)　保住前掲論文 53-4頁。これについては，「金融学会報告」第39号所収の拙稿の参照を乞う。
(37)　K. Marx, Grundrisse der Kritik der politischen Ökonomie [Rohentwurf] 1851-1858, 1953 Berlin, S. 522.

OLS，TSLS の小標本分布論について

松　野　一　彦

1.　序

経済分析における統計的方法と，この方法が検証を試みようとする理論モデルとは切り離して考えることはできない。このことを確率論の観点からとらえて，経済分析での統計的方法として生まれたものの一つが同時推定法である。同時方程式体系で表わされるモデルに従来の最小二乗法を適用しても，一致性等の望ましい統計学的性質を持った推定値は得られない。望ましい性質を持った推定値を得るには，例えば，最尤推定法に頼らなければならない。

この指摘に従い，同時方程式体系に対する各種の推定法が考案された。そしてこれらの推定法の大標本における特性が明らかにされた。例えば，ある条件の下で，完全情報最尤法，三段階最小二乗法，制限情報最尤法及び二段階最小二乗法（TSLS）は一致性，漸近的正規性を持つ。また漸近的有効性に関する各推定量の序列は，推定量が含んでいる先験的情報の量に対応している。一方，一致性を持たない古典的最小二乗法（OLS）の分散が大標本において小さいことも示されている。

このような同時推定法の出現と共に新たな問題も提出された。すなわち，大標本特性によって支持されている同時推定法が，小標本を取り扱う実際の分析においても分析者の要求を満たしているかどうかという問題である。実際の分析では小標本しか得られないという点，及びある理論モデルを長期間の標本の分析に用いることは無理を生じさせるかもしれないという点から見て，各推定量の小標本における特性を調べなければならない。そこで同時推定法の小標本分布論として次のような問題が扱われる。

同時方程式体系に含まれる構造方程式の係数推定においてどの推定法を用いれば良いかという問題については，次のようなものである。同時推定法における一致推定量は小標本における偏りについてどのような性質を持つのか。OLSの分散は小さいということが小標本においても言えるか。また大標本での一致性の証明は必ずしも，漸近的不偏性及び分散のゼロへの収束を意味しない。小標本での偏り及び分散が求められれば，それらの収束性，例えばゼロに収束するか，単調に収束する

か，等を吟味できる。これ以前の問題として，推定量のモーメントが存在するか否かをも確かめなければならない。

パラメタについての仮説の有意性検定については，大標本理論に基づいた正規分布，t 分布及び F 分布を使う検定法がある。[(1)] また構造方程式の識別の為に課せられた制約を検定する方法がある。各検定の為にはどういった統計量を構成したらよいのか，またこれらの検定量の小標本分布も導かなければならない。

構造方程式の係数を推定する場合の他に，誘導型の係数を推定する場合もある。これは内生変数の予測の為に用いられる。それには，誘導型を直接的に最小二乗法で推定する方法と，構造推定から誘導型の推定へと逆算する方法とがある。もし過剰識別の制約があるならば，それを考慮して誘導型係数を推定する事になる後者の方が有効推定量である（Klein〔7〕）。しかし，この大標本における性質が小標本においても成立するかどうかは明らかでない。

大標本分布理論に基づいて，推定量の小標本特性についての目安を立てたり，小標本分布理論での研究課題を見つけることはできるが，はっきりした答を引き出すことはできない。大標本理論では予想できなかったことも，精密分布及びモーメントを導びく小標本理論によって明らかになる場合もある。小標本分布に対するモンテカルロ法，また近似的接近法も試みられている。これらの接近法による結果は，精密分布による小標本分布理論から改めて説明できる場合もある。そしてこのような推定量特性についての各分析法の諸結果の関係を明らかにすることも，精密分布による小標本分布理論の課題である。

同時推定法の小標本分布理論は充分とは言えないまでも，かなり進められてきた。少なくとも，研究の枠組みは目に見えて来ている。その中でも，構造推定についての小標本分布論が多い。内生変数の個数の少ない小さなモデルに対する推定量の精密分布を導くことは可能になってきている。そして，この精密分布をもとにして，分析者が必要とする推定量の特性を明らかにすること，及び大きなモデルに対する推定量の分布を導くことが次の課題となっている。

同時方程式体系についての仮説検定法及び予測方法の小標本分布論は数少ない。いくつかの検定方法及び予測法についての議論がある程度である。

これら同時推定法に関する小標本分布理論は，一般の統計学における標本分布論の拡張と見なされる統計理論的側面，及び同時推定法の利用にとって必要とされる情報を明らかにするという側面を持つ。ここでは，この2つの側面に注目して，構造推定法特によく考察されているOLS及びTSLSについての小標本分布理論を概観する。

OLS, TSLS に関しては，種々のモデルについての精密分布が導かれてきた結果，内生変数2個を含むモデルについての精密分布の一般形が得られている。このように，精密分布導出の為に内生

注（1） TSLS を用いた場合の方法については Dhrymes〔7〕，pp. 197，272～277 参照。

変数の個数でモデルを分類する代りに，分布導出の基礎となる各 noncentral Wishart 分布の利用可能性によってモデルを分類することができる。そして noncentral Wishart 分布の一つである noncentral *linear* Wishart 分布が，OLS 及び TSLS の分布を導びく為に利用可能となるモデルのグループを明らかにできる。このようなモデルについての OLS, TSLS の分布の一般的な形を導びくこともここでの目的である。

§2では，OLS 及び TSLS の標本分布導出の為に，同時方程式体系の統計的構造を明らかにする。そして従来の標本分布理論との関係を述べる。OLS, TSLS の分布導出の問題は，確率行列 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ が noncentral Wishart 分布に従う時の $A_{22}^{-1}A_{21}$ の分布を求めるという問題に帰着する。特に A が noncentral linear Wishart 分布に従う時の $A_{22}^{-1}A_{21}$ の分布が§3で導かれる。§3で得られる一般的内容の結果を同時方程式体系の OLS または TSLS の標本分布と読む為の議論は §4 においてなされる。またこの結果によって，今までいくつかのモデルについて導かれてきた標本分布の整理をする。これらの分布を利用して，OLS, TSLS の小標本特性について §5 でまとめる。§6では構造推定法以外の同時方程式体系における統計的方法についての小標本分布論にについてもふれる。§7はいくつかの結論をまとめる。付録 A, B は数学注である。§3で得られる統計理論が，多重共線性が存在するエラーモデルについての標本分布論にも適用できることを付録 C で示す。

2. 同時方程式モデル

以下の節では，OLS, TSLS の標本分布を導く。その為に，ここでモデルを提示して，問題の統計学的構造を明らかにする。

同時方程式体系に含まれる一本の構造方程式を次のように定める。

$$(2.1)\qquad y_{1t}=\beta_2 y_{2t}+\cdots+\beta_G y_{Gt}+\gamma_1 z_{1t}+\cdots+\gamma_{K_1} z_{K_1 t}+u_t,\quad t=1,\cdots,N.$$

ここで y_{gt}, $g=1,\cdots,G$, は内生変数，z_{kt}, $k=1,\cdots,K_1$, は先決変数，u_t は攪乱項，N はサンプルサイズ。β_g, γ_k は種々の方法によって推定される未知パラメタ。同時方程式体系は他に K_2 個の先決変数 $z_{K_1+1t},\cdots,z_{Kt}$, $K=K_1+K_2$, を含む。式（2.1）に含まれる内生変数の誘導型を次のように書く。

$$(2.2)\qquad \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{Gt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11}\cdots\cdots\pi_{1K_1} & \pi_{1K_1+1}\cdots\cdots\pi_{1K} \\ \pi_{21}\cdots\cdots\pi_{2K_1} & \pi_{2K_1+1}\cdots\cdots\pi_{2K} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_{G1}\cdots\cdots\pi_{GK_1} & \pi_{GK_1+1}\cdots\cdots\pi_{GK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1t} \\ \vdots \\ z_{K_1t} \\ z_{K_1+1t} \\ \vdots \\ z_{Kt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ \vdots \\ v_{Gt} \end{bmatrix},\quad t=1,\cdots\cdots,N,$$

ただし π_{gk}, $g=1,\cdots,G$, $k=1,\cdots K$, は誘導型パラメタ，v_{gt} は誘導型の攪乱項。便宜の為に行列による表示をするならば（2.2）は，

(2.3) $$Y'=\begin{bmatrix} y_1' \\ Y_2' \end{bmatrix}=\Pi Z'+V'=\begin{bmatrix} \Pi_{1\cdot} \\ \Pi_{2\cdot} \end{bmatrix}Z'+V'=\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{bmatrix}+V'$$

となる，ただし $$Y'\equiv\begin{bmatrix} y_{11}\cdots y_{1N} \\ \hline y_{21}\cdots y_{2N} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ y_{G1}\cdots y_{GN} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} y_1' \\ Y_2' \end{bmatrix},\quad \Pi\equiv\left[\begin{array}{c|c} \pi_{11}\cdots\pi_{1K_1} & \pi_{1K_1+1}\cdots\pi_{1K} \\ \hline \pi_{21}\cdots\pi_{2K_1} & \pi_{2K_1+1}\cdots\pi_{2K} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ \pi_{G1}\cdots\pi_{GK_1} & \pi_{GK_1+1}\cdots\pi_{GK} \end{array}\right]$$

$$\equiv\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} \Pi_{1\cdot} \\ \Pi_{2\cdot} \end{bmatrix},\quad Z'\equiv\begin{bmatrix} z_{11}\cdots\cdots z_{1N} \\ \cdot\ \cdots\cdots\ \cdot \\ z_{K_11}\ \cdots z_{K_1N} \\ \hline z_{K_1+11}\cdots z_{K_1+1N} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ z_{K_1}\ \cdots z_{KN} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{bmatrix},\quad V'\equiv\begin{bmatrix} v_{11}\cdots v_{1N} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ v_{G1}\cdots v_{GN} \end{bmatrix}.$$ ここで，

構造方程式 (2.1) と誘導型 (2.2) の関係より誘導型パラメタには次の制約がある，$\beta'=[\beta_2\cdots\beta_G]$，$\gamma'=[\gamma_1\cdots\gamma_{K_1}]$，として，

(2.4) $$\Pi_{12}=\beta'\Pi_{22},\quad \Pi_{11}=\beta'\Pi_{21}+\gamma'.$$

構造パラメタ β' 及び γ' の OLS による推定量 $b'_{(1)}c'_{(1)}$，は次のように表わされる，

(2.5) $$\begin{bmatrix} b_{(1)} \\ c_{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y_2'Y_2 & Y_2'Z_1 \\ Z_1'Y_2 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} Y_2'y_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [Y_2'M_1Y_2]^{-1}[Y_2'M_1y_1] \\ (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(y_1-Y_2b_{(1)}) \end{bmatrix},$$

ただし $M_1=I-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'$. また TSLS による推定量 $b'_{(2)}c'_{(2)}$，を次のように定義する。$\hat{Y}_2=Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_2$ として，

(2.6) $$\begin{bmatrix} b_{(2)} \\ c_{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{Y}_2'\hat{Y}_2 & \hat{Y}_2'Z_1 \\ Z_1'\hat{Y}_2 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \hat{Y}_2'y_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [Y_2'M_2Y_2]^{-1}[Y_2'M_2y_1] \\ (Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'(y_1-\hat{Y}_2b_{(2)}) \end{bmatrix},$$

ただし $M_2=Z(Z'Z)^{-1}Z'-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'$。(2.5), (2.6) の第三項は，それぞれ第二項の分割された行列の逆行列を求めれば，導かれる。

観察値 y_{gt} の確率的性質は誘導型 (2.2) によって特定化される。すなわち，先決変数 z_{kt} と攪乱項 v_{gt} の確率的性質，及び誘導型パラメタ π_{gk} の値を定めれば，これらの関数である y_{gt} の確率的性質も定まる。ここでは次の確率的仮定を設ける。

(2.7) $$v_{\cdot t}=\begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ \vdots \\ v_{Gt} \end{bmatrix}\sim N\left(0,\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right)\equiv N(0\ \Sigma)\quad t=1,\cdots,N,$$

ただし $\Sigma=\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} 1\times 1 & 1\times\overline{G-1} \\ \hline \overline{G-1}\times 1 & \overline{G-1}\times\overline{G-1} \end{array}\right]$ で対称正値定符号行列[(2)]。

(2.8) $v_{\cdot t}$ と $v_{\cdot s}$，$t\neq s$，は独立。

(2.9) Z は純粋の外生変数で繰り返される標本で固定されている。

すなわち，誘導型攪乱項は独立に平均ゼロ，共分散行列 Σ をもった多変量正規分布に従う。またモデルは先決内生変数を含まない。以上の仮定より，観察される内生変数 $y_{\cdot t}'=[y_{1t}\cdots y_{Gt}]$ の分布は，

注(2) $G=2$ で Σ が特異行列の時の OLS，間接最小二乗法 (ILS) の標本分布は Bergstrom〔5〕が導いている。

$z'_{\cdot t}=[z_{1t}\cdots z_{Kt}]$ として，

(2.8) $$y_{\cdot t}\sim N(\Pi z_{\cdot t}\ \Sigma),\quad t=1,\cdots,N,$$
$y_{\cdot t}$ と $y_{\cdot s}$，$t\neq s$，は独立。

すなわち $y_{\cdot t}$ は独立に，観察点毎に変化する期待値 $\eta_{\cdot t}\equiv\Pi z_{\cdot t}$，と一定の共分散行列 Σ をもった，多変量正規分布に従う。

従来の多変量解析の標本分布論では，$y_{\cdot t}$ の期待値が観察期間内で変化せずに一定であるモデルが主に考察されてきた[(3)]。例えば，期待値が一定の $y_{\cdot t}$ のモーメント行列の分布，またこのモーメント行列の関数である回帰係数，相関係数，固有値等の分布が導き出された。これから扱うモデルでは期待値が変化するという点において，従来のものの拡張になっている。$y_{\cdot t}$ の期待値を単に $\eta_{\cdot t}$ として扱い，$y_{\cdot t}$ のモーメント行列等の分布を導くこともできる。後では特に $\eta_{\cdot t}=\Pi z_{\cdot t}$ というように，未知パラメタ Π と既知パラメタ $z_{\cdot t}$ との積として $\eta_{\cdot t}$ を扱う。また Π に関する制約 (2.4) を考慮する。そして，$y_{\cdot t}$ の期待値 $\eta_{\cdot t}$ に対するこの2つの制約が同時方程式モデルの特徴である。

$y_{\cdot t}$ が $y_{\cdot s}$ と独立であるということは仮定 (2.8), (2.9) に基づく。もし $v_{\cdot t}$ が系列相関をもったり，または z_{kt} の中に先決内生変数を含んで (2.2) が自己回帰モデルであると，$y_{\cdot t}$ の独立性は破られる。$G=1$ で単一方程式モデルのケースでも，系列相関が存在する回帰モデル及び自己回帰モデルは独自の難しさを含んでいる。それらのモデルと多変量モデルとを結び合わせた同時方程式体系の標本分布論は非常に取り扱いにくいものとなるだろう。ここで扱う (2.8) のモデルは，以上の難しさを含まないものである。

式 (2.5), (2.6) で示されるように $c_{(\alpha)}$，$\alpha=1,2$，は $b_{(\alpha)}$ の関数として示される。$b_{(\alpha)}$ が与えられた時 $c_{(\alpha)}$ は正規分布する y_1 と Y_2 または $\hat{Y}_2$ の線型結合であるから $c_{(\alpha)}$ 自体も正規分布に従う。かつその時の $c_{(\alpha)}$ の条件付き期待値は，$Ey_1'=\Pi_{1\cdot}Z'$，$EY_2'=\Pi_{2\cdot}Z'$，$E\hat{Y}_2'=\Pi_{2\cdot}Z'$ であるから，

(2.9) $$\begin{aligned} E(c_{(\alpha)}|b_{(\alpha)})&=(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z(\Pi_{1\cdot}-\Pi_{2\cdot}b_{(\alpha)}) \\ &=\gamma+D(\beta-b_{(\alpha)}),\quad \alpha=1,2, \end{aligned}$$

ただし $D=[\Pi_{12}-(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2\Pi_{22}]$ であり，第三項は (2.4) を考慮して得られる。$c_{(\alpha)}$ は $b_{(\alpha)}$ が与えられた時に条件付き分布として期待値 (2.9) をもった正規分布に従う。従って $b_{(\alpha)}$ の周辺分布が導かれれば，それらの積が $(b_{(\alpha)}c_{(\alpha)})$ の同時分布となる。(2.9) について更に $b_{(\alpha)}$ に関する期待値をとれば $c_{(\alpha)}$ の期待値を得る。すなわち，

(2.11) $$\begin{aligned} E(c_{(\alpha)})=E\{E(c_{(\alpha)}|b_{(\alpha)})\}&=(Z_1'Z)^{-1}Z_1'Z(\Pi_{1\cdot}-\Pi_{2\cdot}E(b_{(\alpha)})] \\ &=\gamma+D[\beta-E(b_{(\alpha)})],\quad \alpha=1,2. \end{aligned}$$

このようにまず $b_{(\alpha)}$ の分布及びモーメントを求めることが問題となる。

注(3) 例えば Anderson〔1〕.

再び繰り返すと，$y_{\cdot t}$ が独立に $N\left(\begin{bmatrix}\beta'\Pi_{12}+\gamma' & \beta'\Pi_{22}\\ \Pi_{12} & \Pi_{22}\end{bmatrix}z_{\cdot t},\ \Sigma\right)$ に従う時に $b_{(\alpha)}=[Y_2{}'M_\alpha Y_2]^{-1}[Y_2{}'M_\alpha y_1]$, $\alpha=1, 2$, の分布を導くことが問題である。この設定においても一般的な答は得られていない。今までに小標本分布導出の為に扱われてきたモデルを次のように分けてみる：(I) ①$G=2$, $K_2=3$, $\Pi_{22}=[0\ 0\ 0]$, Basmann [3, section 4], ② $G=3$, $K_2=3$, $\Pi_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, Basmann [4, Appendix] 等のケース，（II）③ $G=2$, $K_2=2$, Basmann [3, section 3], Kabe [8], ④ $G=2$, Richardson [14], Sawa [18], Richardson & Wu [16], ⑤ $G=3$, $K_2=3$, $\Pi_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&\pi_{33}\end{bmatrix}$, Basmann [4], Kabe [9, section 2, 3] 等のケース，（III）⑥ $G=3$, $K_2=3$, $\Pi_{22}=\begin{bmatrix}\pi_{22}&0\\0&\pi_{33}\end{bmatrix}$, Kabe [9, section 4] 等のケースがある。各モデルに関する（I），（II），（III）の分類はモデルが含む内生変数の個数 G に従ってなされているのではなく，モデルのパラメタである Π_{22} の位数，$\rho(\Pi_{22})=0, 1, 2$, に従ってなされている。以下では，（II）（または(I)）のクラスに含まれるべきモデルに対する OLS 及び TSLS の標本分布を導く。すなわち，内生変数を任意個含むが誘導型パラメタ Π_{22} の位数が1（またはゼロ）となるモデルに対しての各推定量の標本分布を導く。

(2.5), (2.6) で表わされる OLS, TSLS は (2.8) の確率的仮定及び制約 (2.4) に従う確率変数 y_t の関数として表わされる。ここで，

(2.12) $$A^{(\alpha)}=\begin{bmatrix}A_{11}^{(\alpha)} & A_{12}^{(\alpha)}\\ A_{21}^{(\alpha)} & A_{22}^{(\alpha)}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}1\times 1 & 1\times \overline{G-1}\\ \hline G-1\times 1 & G-1\times\overline{G-1}\end{array}\right]=Y'M_\alpha Y,\quad \alpha=1, 2,$$

と書けば，OLS, TSLS は，

(2.13) $$b_{(\alpha)}=A_{22}^{(\alpha)-1}A_{21}^{(\alpha)},\quad \alpha=1, 2,$$

と書きなおされる。従って $A^{(\alpha)}$ の分布を導いた後に，この $A^{(\alpha)}$ の関数となる $b_{(\alpha)}$ の分布を導けばよい。(4)

一般的に，$G\times 1$ の確率ベクトル $y_{\cdot t}$, $t=1, \cdots, N$, が期待値 $\eta_{\cdot t}$ と共分散行列 Σ を持った正規分布に独立に従い，M を位数 n の $N\times N$ 巾等行列とすると，$Y'MY$ は，ただし $Y'=[y_{\cdot 1}\cdots y_{\cdot N}]$, noncentral Wishart 分布に従う。(5) そしてこの分布はパラメタセット $(\Sigma, H'MH, G, n, \tau)$ で特徴付けられ，$W(A, \Sigma, T, G, n, \tau)$ と書く。ただし $H'=[\eta_{\cdot 1}\cdots\eta_{\cdot N}]$, $\tau=\rho(H'MH)$, $T=H'MH$ である。Σ は sigma matrix, T は means sigma matrix, n は自由度と呼ばれる。$M=I_N$ とすれば，τ は期待値のベクトル $\eta_{\cdot 1}, \cdots, \eta_{\cdot N}$ が G 次元空間内で構成している空間の次元を表わしている。この τ の値によって noncentral Wishart 分布は分類される。$\tau=0$ ならば期待値が t に関して一定であり，通常の central Wishart 分布である。$\tau=1$ ならば $\eta_{\cdot t}$ は一次元空間を構成し，分布は noncentral linear Wishart 分布と呼ばれる。$\tau=2$ のケースは noncentral planar Wishart 分布と呼ばれる。

M_1, M_2 はそれぞれ巾等行列で位数は $n_1=N-K_1$, $n_2=K-K_1$ である。従って $A^{(\alpha)}$, $\alpha=1, 2$,

注(4) この方法は Kabe によって始められ Richardson, Sawa が拡張した。初めて TSLS の標本分布を導いた Basmann は違う方法を採用している。

(5) 付録 A.

は共に次数 $G\times G$ の noncentral Wishart 分布に従うことが解る。そして，sigma matrix Σ, means sigma matrix $T_\alpha=\Pi Z'M_\alpha Z\Pi'$, 自由度 n_α, $\tau_\alpha=\rho(\Pi Z'M_\alpha Z\Pi')$, $\alpha=1, 2$, がそれぞれのパラメタである。ここで同時方程式体系の誘導型パラメタに関する制約 (2.4) を考慮すると，$A^{(1)}$, $A^{(2)}$ は共通の means sigma matrix

(2.14) $$T=T_\alpha=\begin{bmatrix}\beta'\\ I\end{bmatrix}\Pi_{22}Z_2{}'M_1Z_2\Pi_{22}[\beta\ I],\quad \alpha=1, 2;$$

を持つことがわかる。従って $\tau\equiv\tau_\alpha=\rho(T_\alpha)$, $\alpha=1, 2$, でもあり，$A^{(1)}$ と $A^{(2)}$ が従う noncentral Wishart 分布は自由度 n_1 と n_2 だけが異なっている。以上のように

(2.15) $$A^{(\alpha)}\sim W(A^{(\alpha)}, \Sigma, T, G, n_\alpha, \tau),\quad \alpha=1, 2,$$

となる。ここで $G\times G$ の行列 T は，一般的には (2.14) から解るように位数 $\tau=G-1$ を持つ。内生変数の個数 G が大きい程，means sigma matrix の位数は大きくなり，OLS, TSLS の分布導出は，より複雑な noncentral Wishart 分布を利用しなければならない。noncentral Wishart 分布の密度関数は，$\tau=1, 2$, のケースについては Anderson & Girshick [2] によって導かれている。

先に分類した3つのグループの内 (I) における $A^{(\alpha)}$ は central Wishart 分布に従う。それは T の構成要素 Π_{22} が ①，②のモデルで共にゼロ行列である為である。このケースでは，$b_{(\alpha)}$ の分布導出は，期待値が一定である多変量正規分布の回帰係数の標本分布を求めることと同じになる。この分布の一般形は Kshirsagar [12, section 4] によって導かれている。（II）のグループにあるモデル③④⑤においては G の値は異なっていても，$\tau=1$ となる Π_{22} を持っている。従ってここでの $A^{(\alpha)}$ は noncentral linear Wishart 分布に従う。（III）のグループでは，同様に考えて，$A^{(\alpha)}$ は noncentral planar Wishart 分布に従う。以上のような各種の Wishart 分布の関数である $b_{(\alpha)}$ の分布はその下にある Wishart 分布の分布型及び分布のパラメタに依存する。

一般に，noncentral linear Wishart 分布 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ の関数である $\Theta^*=A_{22}{}^{-1}A_{21}$ の分布を導けば，③④⑤のモデルを含む（II）のケースの分布の一般的な形が得られることになる。次の節はこの Θ^* の分布を導くことに当てられる。

τ の値は，G の値及び Π_{22} の値によって制約されることを示してきた。(2.14) 式から解るように Z を含んだ T の位数は Z の値にも制約される。上の Θ^* の分布を導いた後に，$\tau=1$ となる条件を求めなければ，この分布を OLS, TSLS の標本分布として読むことができない。この問題は §4 で扱われる。

3. 統計理論

前節で設定された問題を扱う。すなわち，確率行列 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}r\times r & r\times s\\ \hline s\times r & s\times s\end{array}\right]$ が

(3.1)　$A \sim W[A,\ \Sigma,\ \gamma^*\gamma^{*\prime},\ p,\ n,\ 1]$,

ただし $p=r+s$, $\gamma^{*\prime}=[\gamma_1^{*\prime} \vdots \gamma_2^{*\prime}]=[1\times r \vdots 1\times s]$, に従う時の

(3.2)　$\Theta^*=A_{22}^{-1}A_{21}$

の密度関数 ($d.f$) を導く。

まず,

(3.3)　$S'S=\Sigma^{-1}$

を満たす上半三角行列 $S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ O & S_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} \frac{r\times r}{s\times r} & \frac{r\times s}{s\times s} \end{array}\right]$ を考える。$\Sigma=\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} \frac{r\times r}{s\times r} & \frac{r\times s}{s\times s} \end{array}\right]$

と分割するならば, S の要素は次の式を満たしている。

$$S_{11}'S_{11}=\Sigma_{11\cdot 2}^{-1},$$

(3.4)　$S_{12}'S_{11}'^{-1}=-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$,

$$S_{22}'S_{22}=\Sigma_{22}^{-1},$$

ただし $\Sigma_{11\cdot 2}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$。ここで A から確率行列 B へと変換

(3.5)　$A=S^{-1}BS'^{-1}$,

を施すと, B の分布は次で与えられる,

(3.6)　$B\sim W(B,\ I,\ \gamma\gamma',\ p,\ n,\ 1)$,

ただし,

(3.7)　$\gamma'=[\gamma_1' \vdots \gamma_2']=\gamma^{*\prime}S'=[\gamma_1^{*\prime}S_{11}'+\gamma_2^{*\prime}S_{12} \vdots \gamma_2^{*\prime}S_{22}]$.

そして B の密度関数は [2] より,

(3.8)　$W(B,\ I,\ \gamma\gamma',\ p,\ n,\ 1)$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma'\gamma}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}B}|B|^{\frac{1}{2}(p-n-1)}}{2^{\frac{1}{2}pn}\pi^{\frac{1}{4}p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}[n-i]\right)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\gamma'B\gamma)^j}{2^{2j}j!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}.$$

ここで Θ^* の代りに $B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} \frac{r\times r}{s\times r} & \frac{r\times s}{s\times s} \end{array}\right]$ の関数である

(3.9)　$\Theta=B_{22}^{-1}B_{21}$

を考える。すると, Θ^* と Θ の間には,

(3.10)　$\Theta=S_{22}'^{-1}(\Theta^*+S_{12}'S_{11}'^{-1})S_{11}'$

という関係が成り立つ。まず (3.8) の分布に従う B の関数である Θ の $d.f$, $f_1(\Theta)$, を導びく。次に変換 (3.10) を用いて Θ^* の $d.f$, $f_2(\Theta^*)$, を得る。すなわち,

(3.11)　$f_2(\Theta^*)=J(\Theta\to\Theta^*)f_1[S_{22}'^{-1}(\Theta^*+S_{12}'S_{11}'^{-1})S_{11}']$

として $f_2(\Theta^*)$ を得る。ここで変換のヤコビアンは次のように計算される,

(3.12)　$J(\Theta\to\Theta^*)=|\Sigma_{22}|^{\frac{r}{2}}|\Sigma_{11\cdot 2}|^{-\frac{s}{2}}$.

Θ の $d.f$ を導く為に次の変換をする,

$$B_{11}=Q+\Theta'B_{22}\Theta,$$

(3.13)　$B_{21}=B_{22}\Theta$

$$J[(B_{11},\ B_{21})\to(Q,\ \Theta)]=|B_{22}|^r$$

すると (3.8) の中の変数は次のように置き変えられる。

$$\mathrm{tr}\,B=\mathrm{tr}\,Q+\mathrm{tr}\,RB_{22}R',$$

(3.14)　$|B|=|Q||B_{22}|$,

$$\gamma'B\gamma=\gamma_1'Q\gamma_1+\gamma'RB_{22}R'\gamma,$$

ただし $R'=[\Theta \vdots I_s]$. (3.8), (3.13), (3.14) から Q, Θ, B_{22} の $d.f$ は,

(3.15)　$f_3(Q,\ \Theta,\ B_{22})=C|Q|^{\frac{n-p-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}Q}|B_{22}|^{\frac{n-p-1}{2}+r}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}RB_{22}R'}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1'Q\gamma_1+\gamma'RB_{22}R'\gamma)^j}{2^{2j}j!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}$,

ただし $C=e^{-\frac{1}{2}\gamma'\gamma}/2^{\frac{1}{2}pn}\pi^{\frac{1}{4}p(p-1)}\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}[n-i]\right)$. 二項展開を施して, Q, Θ の $d.f$ は次のように書ける,

(3.16)　$f_4(Q,\Theta)=C|Q|^{\frac{n-p-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}Q}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2j}\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}\sum_{j_1+j_2=j}\frac{(\gamma_1'Q\gamma_1)^{j_1}}{j_1!j_2!}$

$$\times\underset{B_{22}\ \text{positive definite}}{\int\cdots\cdots\int} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}RB_{22}R'}|B_{22}|^{\frac{n-p-1}{2}+r}(\gamma'RB_{22}R'\gamma)^{j_2}db_{r+1\ r+1}db_{r+1\ r+2}\cdots db_{pp}.$$

ここに含まれる積分は付録Bで評価されている。

その値を (3.16) に入れれば, Θ の $d.f$ は次のようになる,

(3.17)　$f_1(\Theta)=C\,2^{\left(\frac{n+r}{2}\right)s}\pi^{\frac{1}{4}s(s-1)}\prod_{i=1}^{s-1}\Gamma\left(\frac{n+r-i}{2}\right)|R'R|^{-\frac{n+r}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2j}\Gamma\left(\frac{n}{2}+j\right)}$

$$\times\sum_{j_1+j_2=j}\frac{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+j_2\right)2^{j_2}}{j_1!j_2!}[\gamma'R(R'R)^{-1}R'\gamma]^{j_2}\underset{Q\ \text{positive definite}}{\int\cdots\cdots\int} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tr}Q}|Q|^{\frac{n-p-1}{2}}(\gamma_1'Q\gamma_1)^{j_1}dq_{11}dq_{12}\cdots dq_{rr}.$$

ここでの積分は先の積分と同じ型のものであり, 付録Bを利用して評価できる。その値を代入し, 定数項を整理して級数の総和法を変えれば Θ の $d.f.$ を得る,

(3.18)　$f_1(\Theta)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}\gamma'\gamma}\prod_{i=1}^{s-1}\Gamma\left(\frac{n+r-i}{2}\right)\prod_{i=1}^{r-1}\Gamma\left(\frac{n-s-i}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}rs}\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}|I+\Theta\Theta'|^{-\frac{n+r}{2}}$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}+i\right)\left(\frac{\gamma_1'\gamma_1}{2}\right)^i\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+j\right)}{i!\ \Gamma\left(\frac{n}{2}+i+j\right)\ j!}\left[\frac{1}{2}(\gamma_1'\Theta'+\gamma_2')(I+\Theta\Theta')^{-1}(\Theta\gamma_1+\gamma_2)\right]^j.$$

(3.11), (3.12) を用いて Θ^* の $p.d.$ を導くことができる。(3.4), (3.7) に注意して結果を整理すると $f_2(\Theta^*)$ は次のようになる,

$$(3.19)\qquad f_2(\Theta^*)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\gamma^{*\prime}\Sigma^{-1}\gamma^*}\prod_{i=1}^{s-1}\Gamma\left(\frac{n+r-i}{2}\right)\prod_{i=1}^{r-1}\Gamma\left(\frac{n-s-i}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}rs}\prod_{i=1}^{p-1}\Gamma\left(\frac{n-i}{2}\right)}|\Sigma_{22}|^{-\frac{n}{2}}|\Sigma_{11\cdot2}|^{-\frac{s}{2}}$$

$$\times|\Sigma_{22}{}^{-1}+(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}{}^{-1}(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})'|^{-\frac{n+r}{2}}$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n-s}{2}+i\right)\left[\frac{1}{2}(\gamma_1{}^{*\prime}-\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}{}^{-1}(\gamma_1{}^*-\gamma_2{}^*\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\right]^i\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+j\right)}{i!\qquad\Gamma\left(\frac{n}{2}+i+j\right)\qquad j!}\left\{\frac{1}{2}\right.$$

$$\times[\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}+(\gamma_1{}^{*\prime}-\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}{}^{-1}(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})']$$

$$\times[\Sigma_{22}{}^{-1}+(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}{}^{-1}(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})']^{-1}$$

$$\left.\times[\Sigma_{22}{}^{-1}\gamma_2{}^*+(\Theta^*-\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}{}^{-1}(\gamma_1{}^*-\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})']\right\}^j.$$

以下では (3.19) を $f_2(\Theta^*, r, s, \Sigma, \gamma^*\gamma^{*\prime}, n)$ と書く。

次に $d.f.$ (3.18), (3.19) の性質について考える。(3.19) において，もし $\gamma^*=0$ ならば，Kshirsagar の central Wishart 分布を扱った結果と一致する。もし $\gamma_1{}^{*\prime}=\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}$ ならば，

$$(3.20)\qquad f_2(\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}+\Theta^*)|_{\gamma_1{}^{*\prime}=\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}}=f_2(\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}-\Theta^*)|_{\gamma_1{}^{*\prime}=\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}},$$

すなわち f_2 は $\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}$ に関して対称である。従って，もし期待値が存在するならば，

$$(3.21)\qquad E(\Theta^*|\gamma_1{}^{*\prime}=\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})=\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}.$$

(3.18) において $r=1, s=p-1$ のケースを考える。$1\times\overline{p-1}$ の確率ベクトル $\theta'=[\theta_2\cdots\theta_p]$ の $h_2+\cdots+h_p$ 次のモーメント $E(\theta_2{}^{h_2}\theta_3{}^{h_3}\cdots\theta_p{}^{h_p})$ を求めるには，

$$(3.22)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta_2{}^{h_2+l_2}\theta_3{}^{h_3+l_3}\cdots\theta_p{}^{h_p+l_p}}{(1+\sum_{g=2}^{p}\theta_g{}^2)^{\frac{n+1}{2}+j}}d\theta_2\cdots d\theta_p,\ j=0,1,2,\cdots$$

$$l_1\equiv2j-(l_2+\cdots+l_p)=0,1,\cdots,2j,$$

$$l_2,\cdots,l_p=0,1,\cdots,2j,$$

を計算しなければならない。これは (3.18) に二項展開を適用して得られる。$\theta_2\cdots\theta_p$ を極座標変換，[1, pp. 175~6]，すると，(3.22) の積分は，

$$(3.23)\qquad \int_0^{\infty}\frac{w^{h_2+\cdots+h_p+l_2+\cdots+l_p+p-2}}{(1+w^2)^{\frac{n+1}{2}+j}}dw\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\alpha_2)^{h_2+l_2}(\cos\alpha_2)^{h_3+\cdots+h_p+l_3+\cdots+l_p+p-3}d\alpha_2$$

$$\times\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\alpha_3)^{h_3+l_3}(\cos\alpha_3)^{h_4+\cdots h_p+l_4+\cdots+l_p+p-4}d\alpha_3\times\cdots\times$$

$$\times\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(\sin\alpha_{p-2})^{h_{p-2}+l_{p-2}}(\cos\alpha_{p-2})^{h_{p-1}+h_p+l_{p-1}+l_p+1}d\alpha_{p-2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin\alpha_{p-1})^{h_{p-1}+l_{p-1}}(\cos\alpha_{p-1})^{h_p+l_p}d\alpha_{p-1}.$$

第二から第 $p-1$ 番目の積分はベータ積分である。第一の積分の被積分関数は $O\left(\frac{1}{w^m}\right)$，ただし

$m=n-p+3-(h_2+\cdots h_p)+l_1$, $l_1\geqq0$. この積分が存在する必要充分条件は $m>1$. 従って，積分 (3.22) が存在し，$E(\theta_2{}^{h_2}\cdots\theta_p{}^{h_p})$ が存在するのは，$h_2+\cdots+h_p\leqq n-p+1$ の時で $h_2+\cdots+h_p\geqq n-p+2$ の時は存在しない。

(3.19) で $r=1$ のケースを考える。すなわち $\Theta^*=\theta^*=[\overline{p-1}\times1]=[\theta_2{}^*\cdots\theta_p{}^*]$. 今 $\theta_2{}^*$ の周辺分布のモーメント $E(\theta_2{}^{*h})$ を考える。上三角行列 S の要素を，$S_{11}=s_{11}$, $S_{22}'=\begin{bmatrix}\varepsilon_{22} & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ \varepsilon_{p1} & \cdots & \varepsilon_{pp}\end{bmatrix}$, $\frac{1}{s_{11}}S_{12}'=\begin{bmatrix}f_2\\ \vdots\\ f_p\end{bmatrix}$ とすると (3.10) より，

$$(3.24)\qquad E(\theta_2{}^{*h})=\left(\frac{1}{s_{11}}\right)^hE(\varepsilon_{22}\theta_2-f_2)^h$$

を得る。従って $\theta_2{}^*$ の周辺分布のモーメント存在条件は θ_2 の周辺分布のモーメントの存在条件と同じである。$E(\theta_2{}^h)$ が存在する条件は先の $E(\theta_2{}^{h_2}\cdots\theta_p{}^{h_p})$ の存在条件のスペシァルケースである。以上より $E(\theta_2{}^{*h})$ は $h\leqq n-p+1$ の時存在し，$h\geqq n-p+2$ の時存在しない。またこの議論は $\theta_3{}^*,\cdots,\theta_p{}^*$ に関しても同じである。このことより，$\overline{p-1}\times1$ の θ^* について，$n-(p-1)\geqq1$ ならば，(3.21) より，

$$(3.25)\qquad E(\theta^*|\gamma_1{}^{*\prime}=\gamma_2{}^{*\prime}\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21})=\Sigma_{22}{}^{-1}\Sigma_{21}.$$

4. OLS, TSLS の小標本分布

§2で示したように，OLS $b_{(1)}$，TSLS $b_{(2)}$ は，noncentral Wishart 分布 $W\left[A^{(\alpha)}, \Sigma, \begin{bmatrix}\beta'\\ I\end{bmatrix}\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'[\beta\ I], n_\alpha, \rho\left(\begin{bmatrix}\beta'\\ I\end{bmatrix}\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'[\beta\ I]\right)\right]$ に従う行列 $A^{(\alpha)}$ の関数，

$$(5.1)\qquad b_{(\alpha)}=A_{11}^{(\alpha)-1}A_{21}^{(\alpha)},\ \alpha=1,2,$$

として表わされる。そして §3 では noncentral linear Wishart 分布に従う A の関数 $\Theta^*=A_{22}{}^{-1}A_{21}$ の分布を導いた。従って $A^{(\alpha)}$ の分布の means sigma matrix $\begin{bmatrix}\beta'\\ I\end{bmatrix}\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'[\beta\ I]$ の位数 $\tau=1$ となる条件の下で，Θ^* の分布は $b_{(\alpha)}$ の標本分布と読むことができる。

以下で $\tau\leqq1$ となるケースを捜す。まず $\tau=\rho(\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}')=\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')$ であるから，$\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq1$ の条件を考える。OLS, TSLS は (2.5),(2.6) で定義されており，OLS が存在する為の必要条件は，$N\geqq G+K_1-1$ かつ $|Z_1'Z_1|\neq0$。TSLS が存在する為の必要条件は，$K_2\geqq G-1$ かつ $|Z'Z|\neq0$。これらの必要条件と矛盾しないで $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq1$ となるケースを見つけなければならない。

まず $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq1$ の為の充分条件として次の4つの候補を考える，$(A):\rho(\Pi_{22}')\leqq1$, $(B):\rho(Z_2)\leqq1$ $(C):(A)(B)$ 以外で $\rho(Z_2\Pi_{22}')\leqq1$, $(D):(B)$ 以外で $\rho(M_1Z_2)\leqq1$。条件の意味合いは次のように言える。基準化とゼロ制約だけの下での識別の必要充分条件は $\rho(\Pi_{22}')=G-1$ である。Π_{22} が特殊な値を取るならこの識別の位数条件が満たされずに $\rho(\Pi_{22}')\leqq1$ となることがありこの場合は (A) のケースとなる。$G=2$ であれば自動的に (A) のケースである。Z_2 は $N\times K_2$ の行列で

あり，体系には含まれるが問題の構造方程式に含まれない先決変数が1個以下であれば (B) がなり立つ。また $K_2>1$ でも $z_{K_1+1t}\cdots z_{Kt}$ の間に多重共線性があると $\rho(Z_2)\leqq 1$に なりうる。$\rho(Z_2)>1$, $\rho(\Pi_{22}')>1$ でも特殊なケースでは(C)の場合となる。$\rho(Z_2)=K$ であっても，$(z_{K_1+1t}\cdots, z_{Kt})$の$(z_{1t}\cdots z_{K_1t})$上への回帰の残渣 M_1Z_2 は位数が1以下になる特殊なケースが考えられる。例えば $(z_{1t}\cdots z_{K_1t})$ と $(z_{K_1+1t}\cdots z_{Kt})$ の間に多重共線性があれば (D) のケースになりうる。以上のように，$\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ となるケースは，$y_{2t}\cdots y_{Gt}$ の期待値の内で $z_{1t}\cdots z_{K_1t}$ と一次独立な $z_{K_1t}\cdots z_{Kt}$ に帰因する部分の変動が一次元以下に制約されているケースである。すなわち noncentral linear Wishart 分布が適用できる同時方程式体系に於いては，内生変数の系統的な変動の自由度が小さいということができる。実際に観察される変動はこの系統的な変動と確率的に動く変動との結合である。

条件 $(A)(B)(C)(D)$ の内いずれかが成立する時に $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ であり，また例外的に確率ゼロで生じる標本を除いて，OLS は存在する。条件 $(B)(D)$ は TSLS の存在を妨げる。条件 (A) (C) の下で TSLS は確率1で存在し $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ となる。OLS, TSLS の存在を妨げずに $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ の仮定をしよう。すると，

$$(4.2)\qquad \Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'=\zeta\zeta'$$

となる $1\times\overline{G-1}$ のベクトル ζ' が存在する。$[\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')=0$ の時は $\zeta=0$。$]$ 従って，

$$(4.3)\qquad T=\begin{bmatrix}\beta'\zeta\\ \zeta\end{bmatrix}[\zeta'\beta\ \ \zeta'].$$

この仮定の下で $A^{(\alpha)}\sim W\left(A^{(\alpha)},\ \Sigma,\ \begin{bmatrix}\beta'\zeta\\ \zeta\end{bmatrix}[\zeta'\beta\ \zeta'],\ G,\ n_\alpha,\ 0\text{ または }1\right)$, $\alpha=1, 2.$ 以上より $b_{(\alpha)}$ の分布は $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ の時，§3で導いた $f_2(\Theta^*,\ r,\ s,\ \Sigma,\ \gamma^*\gamma^{*\prime},\ n)$ の特殊なケースとなる。ζ の記号を用いずに陽表的に表わす為に整理すれば次の結果を得る，

$$(4.4)\qquad f_5(b_{(\alpha)})=\pi^{\frac{1}{2}(G-1)}\exp-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'$$
$$[\Sigma_{22}^{-1}+(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})']\}$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-G+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_\alpha-G+2}{2}\right)}|\Sigma_{22}|^{-\frac{n_\alpha}{2}}|\Sigma_{11\cdot2}|^{-\frac{G-1}{2}}$$
$$\times|\Sigma_{22}^{-1}+(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})'|^{-\frac{n_\alpha+1}{2}}$$
$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n_\alpha-G+1}{2}+i\right)\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}\right.}{i!\qquad\qquad\Gamma\left(\frac{n_\alpha}{2}+i+j\right)}$$
$$\frac{\left.(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})'\right]^{i}\Gamma\left(\frac{n_\alpha+1}{2}+j\right)}{j!}\left\{\frac{1}{2}\times\mathrm{tr}\,\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'\right.$$
$$\times[\Sigma_{22}^{-1}+(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})']$$

$$\times[\Sigma_{22}^{-1}+(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})']^{-1}$$
$$\left.\times[\Sigma_{22}^{-1}+(b_{(\alpha)}-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})\Sigma_{11\cdot2}^{-1}(\beta-\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})']\right\}^{j}\quad \alpha=1, 2.$$

$\alpha=1$ の (4.4) は $(A)(B)(C)(D)$ のような条件で $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ の時の OLS の標本分布を表わす。$\alpha=2$ の (4.4) は $(A)(C)$ の様な条件で $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')\leqq 1$ の時の TSLS の標本分布を表わす。

上の $d.f$ で $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')=0$ になる時は，$d.f$ は簡単な型になる。例えば先に (§2) 述べた (I) のグループでは $\Pi_{22}=0$ であるために (A) の条件を満たし $\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')=0$ となる。また，構造方程式

$$(4.5)\qquad y_{1t}=\beta_2y_{2t}+\cdots+\beta_Gy_{Gt}+\gamma_1z_{1t}+\cdots+\gamma_Kz_{Kt}+u_t,$$

を OLS で推定する時には，$K_2=0$ 従って (B) の条件を満たし $b_{(1)}$ は簡単な d.f をもつ。この場合については，Sewell [19], Kaufmann [10], Wegge [21] によって細かく扱われている。その結果によれば

$$(4.6)\qquad E(b_{(1)})=\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

である。ここで Y_2, Z が与えられた時の y_1 の条件付き期待値を取ると，

$$(4.7)\qquad E(y_1|Y_2Z)=Y_2\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}+Z(\Pi_{1\cdot}-\Pi_{2\cdot}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

を得るから $b_{(1)}$ は構造パラメタ β ではなくて，(4.7) の回帰係数 $\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ の不偏推定量を与える。この時また，(2.11) によって $c_{(1)}$ も $(\Pi_{1\cdot}-\Pi_{2\cdot}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$ という回帰係数の不偏推定量となる。先の (II) に述べたグループは G の値にかかわらず $\rho(\Pi_{22})=1$ である為に $b_{(\alpha)}$ は (4.4) に従う。$\rho(M_1Z_2\Pi_{22}')>1$ の時には，noncentral planar Wishart 分布等より複雑な分布を利用しなければならない。このようなケースについての標本分布導出は数少ないようである。

5. OLS, TSLS の特性

推定量の分布を導いても (4.4) のような型をしているとただちに推定量の特性についてはっきりしたものを得ることはできない。その為に分布の図を描いたり，分布の特性を表わすパラメタの計算をする。図による d.f の表示は厳密な答にはならないが，有益な情報を与える。またモーメントを計算しても，その複雑な結果からただちに推定量の特性がはっきりしないということもある。それらの結果を取り上げることにする。

$G=2$ のケースについて OLS, TSLS の $d.f$ の図は [3], [18] に見られる。この図によっていくつかの事実を観察することができ，次のようなものである。(1) $\Sigma=I_2$, $\beta_2=0$, $K_2=2$ の時 TSLS $b_{(2)}$ の分布は $b_{(2)}=0$ に関して対称で，近似に用いた正規分布よりも厚い裾を持つ。(2) $\Sigma=\begin{bmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{bmatrix}$ とすると，OLS と TSLS の偏りは ρ の値に影響される。概して TSLS の偏りの方が OLS の偏りよりも小さい。N が大きくなるに従って TSLS の偏りは小さくなる。(3) $Var(b_{(\alpha)})$ の大きさは ρ の大

きさと逆の動きをする。N が大きくなれば $Var(b_{(\alpha)})$ は小さくなる。(4) OLS の方が TSLS よりも対称な分布をもつ。これらの観察には解析的に説明される場合もある。以下ではこのような問題を取り上げる。

OLS, TSLS の標本分布は §3 で示したように，パラメタ n_1 と n_2 の違いがあるだけである。すなわち $n_1=n_2(N=K)$ ならば (2.5)，(2.6) からも推定量は同一のものであることが解る。

§3の結果より，$\zeta'\beta=\zeta'\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$，すなわち $\beta=\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ ならば $b_{(\alpha)}$ の分布は共に $b_{(\alpha)}=\beta$ に関して対称である。そして $n_\alpha-(G-1)\geq 1$ ならば周辺分布の期待値が存在して，

$$(5.1)\qquad E(b_{(\alpha)}|\beta=\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})=\beta,\ \alpha=1,2.$$

また，$\Sigma=I$ ならば，$E(b_{2(\alpha)}^{h_2}\cdots b_{G(\alpha)}^{h_G})$ は $h_2+\cdots+h_G\leq n_\alpha-(G-1)$ の時存在して $h_2+\cdots+h_G\geq n_\alpha-(G-1)+1$ の時存在しない。$\Sigma\neq I$ の場合，$E(b_{g(\alpha)}^{h})$，$g=2,\cdots,G$，は $h\leq n_\alpha-(G-1)$ の時存在して，$h\geq n_\alpha-(G-1)+1$ の時存在しない。容易に解るように，OLS の方が TSLS よりも高次のモーメントが存在する。TSLS に関しては，K を一定としておけば，構造方程式における外生変数の係数についてのゼロ制約を利用する方が利用しない時より高次のモーメントを存在させることになる。同じように，OLS に関しては K_2 の値及びサンプルサイズを増すことによってより高次のモーメントが存在する。

内生変数の個数が大きい時には，細かい分析は難しいが，$G=2$ のケースについては Richardson & Wu による詳しい考察がある。ここで $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$，$\dfrac{\Pi_{22}Z_2'M_1Z_2\Pi_{22}'}{\sigma_{22}}=\mu^2$ としよう。次の結果がだされている。

$$(5.2)\qquad E(b_{(\alpha)}-\beta)=-\frac{\sigma_{22}\beta-\sigma_{21}}{\sigma_{22}}e^{-\frac{1}{2}\mu^2}{}_1F_1\left(\frac{n_\alpha}{2}-1;\frac{n_\alpha}{2};\frac{\mu^2}{2}\right),$$

$(n_\alpha>2,\ \alpha=1.2)$，[16, p. 976]，ただし ${}_1F_1(a;\ c;\ x)\equiv\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{\Gamma(a+l)\Gamma(c)x^l}{\Gamma(a)\Gamma(c+l)l!}$. 正の μ^2 に対して $e^{-\frac{1}{2}\mu^2}{}_1F_1\left(\frac{n_\alpha}{2}-1;\ \frac{n_\alpha}{2};\ \frac{\mu^2}{2}\right)$ は正であるから，$\beta=\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}$ の時 OLS, TSLS は不偏推定量であって，またその時に限る。$b_{(\alpha)}$ が不偏推定量でない時に OLS, TSLS は共に，$-\dfrac{\sigma_{22}\beta-\sigma_{21}}{\sigma_{22}}>0$ の時上方への偏り，$-\dfrac{\sigma_{22}\beta-\sigma_{21}}{\sigma_{22}}<0$ の時下方への偏りがある。また $|E(b_{(1)}-\beta)|\geq|E(b_{(2)}-\beta)|$，[16, p. 977] である。すなわち $E(b_{(2)})$ は常に β と $E(b_{(1)})$ の間にあり，偏りに関しては TSLS の方が OLS よりも優れている。偏りの大きさ，または $E(b_{(1)})-E(b_{(2)})$ は，パラメタ $n_1,n_2,\beta,\mu^2,\Sigma$ に依存しており，その中には未知のパラメタ β,Π_{22},Σ が含まれる。ここで μ^2 は既知パラメタ Z の関数である。(5.2) は μ^2 の単調減少函数であるから，[17, p. 728]，μ^2 が N の増加関数であれば，サンプルサイズを増すことによって TSLS の偏りは小さくなる。ただし，この議論の仕方は OLS には当てはまらない。というのは，(5.2) で $\alpha=2$ の時は N は μ^2 だけを通じて意味をもつが，$\alpha=1$ の時には n_1 をも通じて表われる。従って簡単に N の変化と $E(b_{(1)}-\beta)$ の変化の関係を見い出すことはできない。

偏りに関して TSLS が OLS よりどの程度よいかは各パラメタに依存している。$d.f$ の図または

$E(b_{(2)}-\beta)/E(b_{(1)}-\beta)$ の表，[17, p. 977]，から見ると，N が大きい程 TSLS のよさが現われる。逆に N がより小さい程，偏りに関する OLS と TSLS の差は小さい。構造パラメタ γ の推定についても TSLS の偏りは OLS の偏りよりも常に小さい。(2.11) から，$b_{(\alpha)}$ が不偏性を持つ時には $c_{(\alpha)}$ も不偏性を持つ。

次に平均平方誤差 (MSE)，$E(b_{(\alpha)}-\beta)^2=E^2(b_{(\alpha)}-\beta)+Var(b_{(\alpha)})$，に関する OLS, TSLS の比較について再び Richardson & Wu の結果を取り上げる。まず，$E(b_{(\alpha)}-\beta)^2$，$\alpha=1,2$，は $(\sigma_{22}\beta-\sigma_{21})^2/\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2$ の増加関数，μ^2 の減少関数である。先の偏りについての議論と同様に μ^2 が N の増加関数であるならば，サンプルサイズを増すことによって，TSLS の MSE は小さくなる。MSE の基準による OLS と TSLS の優劣はパラメタに大きく依存しており，パラメタの値と独立な判定はつけ難い。すなわち，MSE に関して，OLS が優れているパラメタの領域もあれば TSLS が優れているパラメタの領域もある。

TSLS の偏り，MSE を計算した後に，$\lim_{\mu^2\to\infty}E(b_{(2)}-\beta)=0$ 及び $\lim_{\mu^2\to\infty}E(b_{(2)}-\beta)^2=0$ が示される，[14, p. 1221, p. 1255]. 一方大標本理論で採用される仮定；$\lim_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}Z'Z$ が存在し非特異行列である，を利用するならば，$N\to\infty$ の時 $\mu^2\to\infty$ である。従ってサンプルサイズが大きくなる時，TSLS の偏りは消えること及び TSLS が β に平均収束することが解る。また後者の性質は TSLS の一致性を意味する。

OLS 及び TSLS の小標本特性に関する以上の結果は次のようにまとめられる。大標本における TSLS の一致性，及び OLS の分散の小さいことが，小標本においても再び現われる。ただし TSLS は特殊なケースを除けば偏りを持っており，その大きさは OLS に匹敵する程の時もありうる。また推定に用いられる情報の量，K_2，が小さい時には，TSLS のモーメントが存在しないこともある。OLS は偏りの点で常に TSLS よりも劣るが，TSLS よりも集中した分布を持つ傾向がある。そして MSE の観点からは両者の優劣は一概に決定できない。

6. その他

以上の分析方法の枠組からはずれるが，同時推定法の小標本分布論の他の研究による結果を以下でとり上げる。

ILS は先の TSLS の $K_2=G-1$ の場合である。$G=2$ であれば，$n_2=K_2=1$ であり，いかなる次数のモーメントも存在しない。また ILS の分布が二山分布となる場合があることも示されている (Marsaglia [13])。

構造パラメタの仮説検定について Richardson & Rohr [15] は，TSLS による t 検定量を構成しその標本分布を導いた。その分布は攪乱パラメタ Π_{22} を含んでおり，直接に仮説検定に用いること

はできない。そこでt分布によってこの分布を近似できることを示して，攪乱パラメタの問題を処理している。個別の構造方程式が集まった同時方程式体系の推定問題はよく取り上げられるが，このモデルの検定方法に関する議論はあまり多くない。特に構造パラメタの検定方法についての議論は，従来の単一方程式回帰モデルでの考え方の域を出ていないようである。同様に，構造方程式自体についての相関係数あるいは当て嵌りの基準についても，単一方程式モデルの枠組からぬけていない。個々の誘導型方程式一本一本については従来の相関係数の概念が利用されうる。また誘導型全体としては多変量解析での一般化された相関係数の概念の利用が思い浮かべられる（[7] Chapt. 5, section 4, 5）。しかし，同時方程式体系内の個々の構造方程式についての当て嵌りのよさの基準についてはあまり検討されていない。

内生変数の予測の為に，構造推定から誘導型パラメタの推定値を逆算することがある。この方法に於いてTSLSを利用した時，逆算された誘導型パラメタの推定量が有限のモーメントを持たないことがありうる，ということも指摘されている。[(6)] 先の検定方法，相関係数についての分野と同様に，構造方程式の統計的予測についても系統的な把握が必要であろう。

7. 結　　語

以上では，OLS 及び TSLS の小標本分布に関係する問題を取り上げてきた。

採用された仮定の下では，同時方程式モデルから生じた観察値の積率行列またはある種の二次形式からなる行列は noncentral Wishart 分布に従う。これらの行列の関数として表わされる OLS 及び TSLS の標本分布は，noncentral Wishart 分布を出発点として導くことができる。そして，noncentral linear Wishart 分布が内生変数二個を含むモデルに対する OLS 及び TSLS の標本分布導出に利用されてきた。

しかし，同時方程式体系が任意個の内生変数を含んでいても，体系のパラメタが特殊な値を取る時には，先の行列は noncentral *linear* Wishart 分布に従うことがありうる。この論文では，このようなモデルに適用された OLS 及び TSLS の標本分布が導かれた。そして，同時方程式体系に関する標本分布論で導かれてきたいくつかの分布は，この分布の特殊なケースとなっていることも示された。

標本分布の導出が noncentral linear Wishart 分布に基づく限り，内生変数の個数が小さい時に得られた OLS, TSLS の特性のいくつかは，適当な修正の後に，内生変数の個数が大きい場合にも成立することも明らかにされた。

注(6)　McCarthy, M.D., "A Note on the Forecasting Properties of Two Stage Least Square Restricted Reduced Forms—The Finite Sample Case" International Economic Review, Vol. 13, 1972, pp. 757～761.

構造推定の小標本分布論に至る過程では，大標本理論等による推定問題の一般的な把握がなされてきた。これに対して，同時方程式体系に関する検定方法及び予測方法については，小標本分布論以前の問題の把握自体が不充分であろう。あるいは小標本分布論によってこれらの領域での問題の一般的把握の必要性が明らかにされるとも言える。

付 録 A.

確率ベクトル $y_{\cdot t}$ が独立に

(A. 1)　$$y_{\cdot t}=\begin{bmatrix} y_{1t} \\ \vdots \\ y_{pt} \end{bmatrix} \sim N(\eta_{\cdot t}\,\Sigma)=N\left(\begin{bmatrix} \eta_{1t} \\ \vdots \\ \eta_{pt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}\cdots\sigma_{1p} \\ \cdots\cdots \\ \sigma_{p1}\cdots\sigma_{pp} \end{bmatrix}\right),\quad t=1, \cdots, N,$$

に従う時，

(A. 2)　$$Y'MY \sim W[Y'MY,\ \Sigma,\ H'MH,\ p,\ n,\ \rho(H'MH)],$$

ただし $Y'=[y_{\cdot 1}\cdots y_{\cdot N}]=\begin{bmatrix} y_{1\cdot}' \\ \vdots \\ y_{p\cdot}' \end{bmatrix}$, $H=[\eta_{\cdot 1}\cdots\eta_{\cdot N}]=\begin{bmatrix} \eta_{1\cdot}' \\ \vdots \\ \eta_{p\cdot}' \end{bmatrix}$, M は $N\times N$ の巾等行列で位数nをもつ。

このことを以下で証明する。

$Y'MY$ の要素は次のようになっている。

(A. 3)　$$Y'MY=\begin{bmatrix} y_{1\cdot}'My_{1\cdot}\cdots y_{p\cdot}'My_{p\cdot} \\ \cdots \\ y_{p\cdot}'My_{1\cdot}\cdots y_{p\cdot}'My_{p\cdot} \end{bmatrix}.$$

巾等行列Mに対して $PMP'=\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & O \end{bmatrix}$ となる直交行列Pが存在するから，

(A. 4)　$$P'\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}[I_nO]P=M.$$

$y_{i\cdot}$ から $x_{i\cdot}$ へと変換 $x_{i\cdot}=\begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{iN} \end{bmatrix}=Py_{i\cdot}$, $i=1, \cdots, p$ を施す。すると，

(A. 5)　$$y_{i\cdot}'My_{j\cdot}=x_{i\cdot}'\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & O \end{bmatrix}x_{j\cdot}=\sum_{t=1}^{n} x_{it}x_{jt},\quad i, j=1, \cdots, p.$$

従って，

(A. 6)　$$Y'MY=\sum_{t=1}^{n}\begin{bmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{pt} \end{bmatrix}[x_{1t}\cdots x_{pt}]\equiv\sum_{t=1}^{n} x_{\cdot t}x_{\cdot t}',$$

と変換される。このように $Y'MY$ は独立に正規分布するn個のp次確率ベクトル $x_{\cdot t}$ の積和になる。これが noncentral Wishart 分布の定義であるから，

(A. 7)　$$Y'MY \sim W[Y'MY,\ Var(x_{\cdot t}),\ \sum_{t=1}^{n} E(x_{\cdot t})E(x_{\cdot t})',\ p,\ n,\ \rho(\sum_{1}^{n} E(x_{\cdot t})E(x_{\cdot t})')].$$

後は $Var(x_{\cdot t})=\Sigma$ 及び $\sum_{t=1}^{n} E(x_{\cdot t})E(x_{\cdot t})'=H'MH$ を示せばよい。まず，

$$\text{(A. 8)} \qquad \mathrm{cov}(x_{i\cdot}x_{j\cdot})=P\,\mathrm{cov}(y_{i\cdot}y_{j\cdot})P'=\sigma_{ij}I,\ i,j=1,\cdots,\ p$$

であるから，

$$\text{(A. 9)} \qquad Var(x_{\cdot t})=\begin{bmatrix} Var(x_{1t}) & \cdots \mathrm{cov}(x_{1t}x_{pt}) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathrm{cov}(x_{pt}x_{1t}) & \cdots Var(x_{pt}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{11}\cdots\sigma_{1p} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ \sigma_{p1}\cdots\sigma_{pp} \end{bmatrix}.$$

次に，

$$\text{(A. 10)} \qquad E\begin{bmatrix} x_{11}\cdots x_{1n} & x_{1n+1}\cdots x_{1N} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ x_{p1}\cdots x_{pn} & x_{pn+1}\cdots x_{pN} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_{1\cdot}'P \\ \vdots \\ \eta_{p\cdot}'P \end{bmatrix}=H'P.$$

従って，

$$\text{(A. 11)} \qquad E(x_{\cdot 1}\cdots x_{\cdot n})=H'P\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}.$$

(A. 11) の右辺を U と置けば，(A. 4) を用いて

$$\text{(A. 12)} \qquad \sum_{t=1}^{n} E(x_{\cdot t})E(x_{\cdot t})'=UU'=H'P'\begin{bmatrix} I_n \\ O \end{bmatrix}[I_n O]PH=H'MH.$$

付録 B.

次の積分の評価を示す，

$$\text{(B. 1)} \qquad \underset{B_{22}\ \text{positive definite}}{\int\cdots\int} e^{-\frac{1}{2}tr\,RB_{22}R'}|B_{22}|^{\frac{n-p-1}{2}+r}(\gamma'RB_{22}R'\gamma)^{j_2}\,db_{r+1\,r+1}db_{r+1\,r+2}\cdots db_{pp}$$
$$=2^{\left(\frac{n+r}{2}\right)s}\pi^{\frac{1}{4}s(s-1)}\prod_{i=1}^{s-1}\Gamma\left(\frac{n+r-i}{2}\right)|R'R|^{-\frac{n+r}{2}}\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+j_2\right)2^{j_2}[\gamma'R(R'R)^{-1}R'\gamma]^{j_2}.$$

ここで $B_{22}=\begin{bmatrix} b_{r+1\,r+1}\cdots b_{r+1\,p} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ b_{p\,r+1}\ \cdots b_{pp} \end{bmatrix}$ は対称行列.

$R'R$ は正値定符号行列，$R'\gamma\gamma'R$ は対称行列で位数1である。従って次を満たす $s\times s$ の非特異行列 Ψ が存在する，

$$\text{(B. 2)} \qquad R'R=\Psi'^{-1}\Psi^{-1},$$

$$\text{(B. 2)} \qquad R'\gamma\gamma'R=\Psi'^{-1}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Psi^{-1},$$

ただし λ は行列方程式 $|R'\gamma\gamma'R-\lambda R'R|=0$ の根で $\lambda=\gamma'R(R'R)^{-1}R'\gamma$ である。この Ψ を用いて次の変換をする，

$$\text{(B. 3)} \qquad \begin{aligned} &B_{22}=\Psi W\Psi'\equiv\Psi\begin{bmatrix} w_{11}\cdots w_{1s} \\ \cdot\ \cdots\ \cdot \\ w_{s1}\cdots w_{ss} \end{bmatrix}\Psi' \\ &J(B_{22}\to W)=|\Psi|^{s+1}=|R'R|^{-\frac{s+1}{2}} \end{aligned}$$

この変換によって (B. 1) の積分は次の形になる，

$$\text{(B. 4)} \qquad (\lambda)^{j_2}|R'R|^{-\frac{n+r}{2}}\underset{W\ \text{positive definite}}{\int\cdots\cdots\int} e^{-\frac{1}{2}tr\,W}|W|^{\frac{n-p-1}{2}+r}w_{11}^{j_2}dw_{11}dw_{12}\cdots dw_{ss}.$$

更に次の変換をする，

$$\text{(B. 5)} \qquad \begin{aligned} &w_{ij}=\phi_{ij}\sqrt{w_{ii}w_{jj}} \quad i,j=1,\cdots,s,\ i\neq j \\ &J(w_{ij}\to\phi_{ij})=(w_{11}w_{22}\cdots w_{ss})^{\frac{s-1}{2}}. \end{aligned}$$

(B. 4) の中の積分の部分は次のように書ける，

$$\text{(B. 6)} \qquad \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}w_{11}}w_{11}^{\frac{n+r-2}{2}+j_2}dw_{11}\times\prod_{i=2}^{s}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}w_{ii}}w_{ii}^{\frac{n+r-2}{2}}dw_{ii} \\ &\times\underset{\Phi\ \text{positive definite}}{\int\cdots\cdots\int}|\Phi|^{\frac{(n+r)-s-1}{2}}d\phi_{12}d\phi_{13}\cdots d\phi_{s-1\,s}, \end{aligned}$$

ただし $\Phi=\begin{bmatrix} 1 & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1s} \\ \phi_{12} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \phi_{s-1\,s} \\ \phi_{1s} & \cdots & \phi_{s-1\,s} & 1 \end{bmatrix}$. ここで第一の積分から第 s 番目までの積分はガンマ関数の定数倍である。また最後の積分も既に評価されている (Cramer〔6〕pp. 392～393)。それらの評価を代入すれば (B. 6) の値は，

$$\text{(B. 7)} \qquad 2^{\frac{n+r}{2}+j_2}\Gamma\left(\frac{n+r}{2}+j_2\right)\prod_{i=2}^{s}\left(2^{\frac{n+r}{2}}\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)\right)\pi^{\frac{1}{4}(s-1)s}\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+r-i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)}\right).$$

以上より (B. 1) の積分の評価を得る。

付録 C.

Tintner [20] はエラーモデルから生ずる観察値のモーメント行列の分布として noncentral Wishart 分布が使えることを指摘した。同時推定法の標本分布導出と同じように，エラーモデルにおける最小二乗法(LS)の標本分布を導くことができる。モデルが2個の変数を含む時のケースを Richardson & Wu [17] が扱っている。モデルが多数個の変数を含む時は，同時推定法の標本分布論において述べられた理由と同様な理由によって，一般的にはより複雑な noncentral Wishart 分布を利用しなければならない。しかし観察される変数の真の値の間に線型関係（多重共線性）があると，多数個を含むモデルについても noncentral linear Wishart 分布で間に合う場合がある。以下ではモデルが3個の変数を含む場合について説明する。

真の変数 $\eta_{1t}\eta_{2t}\eta_{3t}$ の間の関係

$$\text{(C. 1)} \qquad \eta_{1t}=\beta_0+\beta_2\eta_{2t}+\beta_3\eta_{3t}+u_{1t},\ t=1,\cdots,N$$

を LS で推定する場合を考える。ここで u_{1t} は攪乱項であるが，u_{1t} を含まない $\eta_{1t}\eta_{2t}\eta_{3t}$ 間の非

確率的関係を考えてもよい。観察値 $y_{1t}y_{2t}y_{3t}$ は観察誤差 $\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\varepsilon_{3t}$ を含み，真の変数とは次の関係がある。

$$(\text{C}.2)\qquad y_{\cdot t}\equiv\begin{bmatrix}y_{1t}\\y_{2t}\\y_{3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_{1t}\\\eta_{2t}\\\eta_{3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\\varepsilon_{2t}\\\varepsilon_{3t}\end{bmatrix}\equiv\eta_{\cdot t}+\varepsilon_{\cdot t},\quad t=1,\cdots,N.$$

$\beta'=[\beta_2\beta_3]$ の LS を $b_{(3)}'=[b_{2(3)}b_{3(3)}]$ とすると，

$$(\text{C}.3)\qquad b_{(3)}=(Y_2'M_3Y_2)^{-1}(Y_2'M_3y_1)$$

として得られる。ここで $Y'=\begin{bmatrix}y_{11}\cdots y_{1N}\\y_{21}\cdots y_{2N}\\y_{31}\cdots y_{3N}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1'\\Y_2'\end{bmatrix}$, $M_3=I-e(e'e)^{-1}e'$, $e'=[1\cdots1]=[1\times N]$.

ここで説明変数 $\eta_{2t}\eta_{3t}$ の間に次の関係（多重共線性）があると仮定する。

$$(\text{C}.4)\qquad \eta_{2t}=\gamma_0+\gamma_3\eta_{3t}+u_{2t},\quad t=1,\cdots,N$$

ここで攪乱項 u_{2t} を含まない関係や η_{1t} をも含んだ関係を考えてもよい。(C.1), (C.2), (C.4) より

$$(\text{C}.5)\qquad y_{\cdot t}=\Pi_0+\Pi_1\eta_{3t}+v_{\cdot t},\quad t=1,\cdots,N,$$

ただし $\Pi_0'=[\beta_0+\beta_2\gamma_0,\ \gamma_0,\ 0]$, $\Pi_1'=[\beta_2\gamma_3+\beta_3,\ \gamma_3,\ 1]$, $v_{\cdot t}'=[u_{1t}+\beta_2u_{2t},\ u_{2t},\ 0]+[\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t},\varepsilon_{3t}]$。

エラーモデルの誘導型というべき (C.5) 式の変数について確率的仮定を次のように定める。

(C.6) $\eta_3'=[\eta_{31}\cdots\eta_N]$ は繰り返される標本で固定されている。

(C.7) $v_{\cdot t}\sim N(0,\ \Sigma)\quad t=1,\cdots,N$

(C.8) $v_{\cdot t}$ と $v_{\cdot s}$ は独立，$t\neq s$.

Σ は $u_{1t}u_{2t}\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\varepsilon_{3t}$ の共分散行列の関数としても表わせる。この仮定の下で，

$$(\text{C}.9)\qquad A^{(3)}=\begin{bmatrix}A_{11}^{(3)}A_{12}^{(3)}\\A_{21}^{(3)}A_{22}^{(3)}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}1\times1&1\times2\\2\times1&2\times2\end{array}\right]=Y'M_3Y$$
$$\sim W[A^{(3)},\ \Sigma,\ \Pi_1\eta_3'M_3\eta_3\Pi_1',\ 3,\ N-1,\ 1]$$

となり，$A^{(3)}$ の分布は次数 3×3 の noncentral linear Wishart 分布である。多重共線性 (C.4) を仮定しなければ $A^{(3)}$ は noncentral planar Wishart 分布に従うところである。LS $b_{(3)}$ は $A_{22}^{(3)-1}A_{21}$ として表わされる。従って，§3の結果が利用でき，

$$(\text{C}.10)\qquad f_6(b_{(3)})=f_2(b_{(3)},\ 1,\ 2,\ \Sigma,\ \Pi_1\eta_3'M_3\eta_3\Pi_1',\ N-1)$$

が $b_{(3)}$ の標本分布である。(C.1) に説明変数，例えば $\eta_{4t}\cdots\eta_{Kt}$ が付け加わるモデルでも，これらの変数がすべて (C.4) のように η_{3t} の線型関数となっているのなら再び §3の結果が適用できる。

参 考 文 献

〔1〕 Anderson, T.W., An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley (1958).

〔2〕 Anderson, T.W. and M.A. Girshick, "Some Extensions of the Wishart Distribution," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 15 (1944) 345-357.

〔3〕 Basmann, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in Two Leading Over-identified Cases." Journal of the American Statistical Association, Vol. 56 (1961) 619-636.

〔4〕 Basmann, R. L., "A Note on the Exact Finite Sample Frequency Functions of Generalized Classical Linear Estimators in a Leading Three Equations Case," Journal of the American Statistical Association, Vol. 58 (1963) 161-171.

〔5〕 Bergstrom, A.R., "The Exact Sampling Distributions of Least Squares and Maximum Likelihood Estimators of the Marginal Propensity to Consume" Econometrica Vol. 30 (1962), 480-489.

〔6〕 Cramer, H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press (1946).

〔7〕 Dhrymes, P.J., Econometrics: Statistical Foundations and Applications, Harper & Row (1970).

〔8〕 Kabe, D.G., "A Note on the Exact Distribution of the GCL Estimators in Two Leading Overidentified Cases," Journal of the American Statistical Association, Vol. 58 (1963), 535-537.

〔9〕 Kabe, D.G., "On the Exact Distributions of the GCL Estimators in a Leading Three-Equation Case," Journal of the American Statistical Association, Vol. 59 (1964), 881-894.

〔10〕 Kaufman, G.M., "Conditional Prediction and Unbiasedness in Structural Equations," Econometrica, Vol. 37 (1969), 44-49.

〔11〕 Klein, L. R., "The Efficiency of Estimation in Econometric Models," Essays in Economics and Econometrics, (1960), 216-232.

〔12〕 Kshirsagar, A. M., "Some Extensions of the Multivariate t-Distribution and the Multivariate Generalization of the Distribution of the Regression Coefficient," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 57 (1961), 80-85.

〔13〕 Marsaglia, G., "Ratios of Normal Variables and Ratios of Sums of Uniform Variables," Journal of the American Statistical Association, Vol. 60, 1965, 193-204.

〔14〕 Richardson, D. H., "The Exact Distribution of a Structural Coefficient Estimator," Journal of the American Statistical Association, Vol. 63 (1968), 1214-1226.

〔15〕 Richardson, D.H. and R.J. Rohr, "Distribution of a Structural t-Statistic for the Case of Two Included Endogenous Variables," Journal of the American Statistical Association, Vol. 66 (1971), 375-382.

〔16〕 Richardson, D.H., and D. Wu, "A Note on the Comparison of Ordinary and Two-Stage Least Squares Estimators," Econometrica Vol. 39 (1971), 973-981.

〔17〕 Richardson, D. H., and D. Wu, "Least Squares and Grouping Method Estimators in the Errors in Variables Model," Journal of the American Statistical Association, Vol. 65 (1970), 724-748.

〔18〕 Sawa, T., "The Exact Sampling Distribution of Ordinary Least Squares and Two-Stage Least Squares Estimators," Journal of the American Statistical Association, Vol. 64 (1969), 923-937.

〔19〕 Sewell, W. P., "Least Squares, Conditional Predictions and Estimator Properties," Econometrica, Vol. 37 (1969), 39-43.

〔20〕 Tintner, G., "A Note on Rank, Multicollinearity and Multiple Regression," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 16 (1945), 304-308.

〔21〕 Wegge, L.L., "The Finite Sampling Distribution of Least Squares Estimators with Stochastic Regressors," Econometrica, Vol. 39 (1971), 241-251.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程）