Title	公害の産業連関分析と一般均衡論
Sub Title	An input-output analysis and general equilibrium to environmental pollution
Author	関, 哲雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1974
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.67, No.8 (1974. 8) ,p.712(48)- 725(61)
JaLC DOI	10.14991/001.19740801-0048
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19740801-0048

公害の産業連関分析と一般均衡論

関　　哲　　雄

1. 序
2. 公害の産業連関分析
   ——W. Leontief Model の理論的説明——
   2. 1. physical model の導出
   2. 2. price model の導出
3. 公害と一般均衡論
   3. 1. L. Walras=G. Cussel の一般均衡モデル
   3. 2. 外部不経済の内部化
4. 結　び

1. 序

昨年の石油・エネルギー危機以来，急激な物価の昂騰によって，物価問題に対する世論の関心が一層の盛り上がりをみせ，多くの新聞・雑誌等の誌面上を賑わし，さしもの，それまで関心の的であった公害問題もやや後退した感がある。そして，この石油・エネルギー危機を利用して公害に対する規制を緩和しようとする動きが，わが国においても一部みられるようになった。しかしながら，公害という問題は，われわれ，人間の健康や生命に直接かかわってくるものだけに，このような規制緩和の動きに対しては賛成できかねる。また，よく考えてみれば，公害規制に対する政策と，省，石油・エネルギー政策とは，本来，両立する面が多い点に気がつくはずである。

さて，物価問題に先立つこと，公害という問題が，特に社会的に注目されるようになったのは，1970年の3月，東京において開催された「環境破壊に関するシンポジウム」に端を発しているように思われるが，この問題のもつ深刻さ重要さを，改めてここで取り上げる必要もないであろう。

公害という問題は，政治的あるいは社会的な問題であるとともに，またすぐれて経済的に重要な側面をもっているが故に，今日，経済学からのアプローチの恰好の対象となっており，さまざまな角度から分析されていることは周知の通りである。[1]

本稿では，上述のシンポジウムにおいて，W. Leontief 教授が発表した先駆的な論文を基礎とした公害問題に対する産業連関分析[2]をまず，理論的に説明し，次いで，この産業連関分析のもつ限界をカバーする意味で，一般均衡論（需給均衡論）的な立場からの分析を展開しようとするものである。[3]

2. 公害の産業連関分析
——W. Leontief Model の理論的説明——

2. 1. physical model の導出

W. Leontief による産業連関分析は，周知のように

注(1) 公害問題に対して経済学的な観点から分析をした著書や論文は数多くあるが，この点に関して最近の発展を紹介した書物としては参考文献〔9〕がある。

(2) 公害問題に対して産業連関表を利用する方法はいろいろと考えられているが，この点について論じたものに参考文献〔3〕がある。また，公害問題に対する産業連関分析で，簡単な数値例を使っての分析は，〔1〕，〔2〕，〔7〕，〔8〕の（イ），〔9〕の参考文献でなされている。なお，最近，日本でも通産省などが，公害問題に対して産業連関表を使用し，環境汚染の量とその防除費用等を計算することを試みている。

(3) 産業連関分析と一般均衡論との関係については，（以下本稿でも明らかにするように）産業連関分析が，最終需要および付加価値の大きさを所与とすることによって，生産技術（これは供給関数を媒介にして作用している）に関する面から，生産量と価格の決定を論じるのに対し，一般均衡論は供給および需要関数を媒介として需要と供給が一致するところに需給量と価格が同時に決定されることを論ずるものである。したがって，産業連関分析は一般均衡論の一環を構成するものであり，それは一般均衡論の一部分であるといえる。産業連関分析と一般均衡論との関係についての詳細は，参考文献〔10〕，〔11〕で論じられている。

経済の生産技術体系をあらわすものと考えている投入係数（input coefficients）を一定（constant）として取扱っているが，以下，公害の産業連関分析においても，投入係数を constant とし，この投入係数のなかに，新たに，汚染物とそれを処理するための過程というダミー部門を導入する，W. Leontief によるモデルは，汚染物という公害，すなわち，経済学でいわれる外部不経済と内部化する試みとして，従来の Open model で理論を展開したものである。

それでは，W. Leontief によるモデルを理論的に説明してみよう。[4] まず，通常の投入係数マトリックス表に各産業によって排出される $(n-m)$ 個の汚染物とその汚染物を処理する $(n-m)$ 個の過程（汚染防除部門）を導入する。その係数マトリックス表が以下のようにあらわされるものとしよう。

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
a_{11}\cdots & a_{1i}\cdots & a_{1j}\cdots & a_{1m} & a_{1,m+1}\cdots & a_{1k}\cdots & a_{1l}\cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{i1}\cdots & a_{ii}\cdots & a_{ij}\cdots & a_{im} & a_{i,m+1} & a_{ik}\cdots & a_{il} & a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{j1}\cdots & a_{ji}\cdots & a_{jj}\cdots & a_{jm} & a_{j,m+1} & a_{jk}\cdots & a_{jl}\cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m1}\cdots & a_{mi}\cdots & a_{mj}\cdots & a_{mm} & a_{m,m+1}\cdots & a_{mk}\cdots & a_{ml}\cdots & a_{mn}\\
\hline
a_{m+1,1}\cdots & a_{m+1,i}\cdots & a_{m+1,j}\cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1}\cdots & a_{m+1,k}\cdots & a_{m+1,l}\cdots & a_{m+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{k1}\cdots & p_{ki}\cdots & a_{kj}\cdots & a_{km} & a_{k,m+1}\cdots & a_{kk}\cdots & a_{kl}\cdots & a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{l1}\cdots & a_{li}\cdots & a_{lj} & a_{lm} & a_{l,m+1}\cdots & a_{lk}\cdots & a_{ll}\cdots & a_{ln}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1}\cdots & a_{ni}\cdots & a_{nj}\cdots & a_{nm} & a_{n,m+1}\cdots & a_{nk}\cdots & a_{nl}\cdots & a_{mn}\\
\hline
v_1\cdots & v_2\cdots & v_j & v_m & v_{m+1}\cdots & v_k\cdots & v_l\cdots & v_n
\end{array}\right)
$$

この係数マトリックス表において $(m\times m)$ の行列は，これまでの投入係数マトリックスである。これを次のように表わそう。

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}\cdots & a_{1i}\cdots & a_{1j}\cdots & a_{1m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{i1}\cdots & a_{ii}\cdots & a_{ij}\cdots & a_{im}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{j1}\cdots & a_{ji}\cdots & a_{jj}\cdots & a_{jm}\\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
a_{m1}\cdots & a_{mi}\cdots & a_{mj}\cdots & a_{mm}
\end{pmatrix}
=\mathrm{A}_{11}=[a_{ij}]_{m,m}\cdots ①
$$

同様にして，①の小行列の下の $(n-m)\times m$ の行列および行ベクトルを

$$
\begin{pmatrix}
a_{m+1,1}\cdots & a_{m+1,i}\cdots & a_{m+1,j}\cdots & a_{m+1,m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{k1}\cdots & a_{ki}\cdots & a_{kj}\cdots & a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{l1}\cdots & a_{li}\cdots & a_{lj}\cdots & a_{lm}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1}\cdots & a_{ni}\cdots & a_{nj}\cdots & a_{nm}
\end{pmatrix}
=\mathrm{A}_{21}=[a_{kj}]_{n-m,m}\cdots\cdots ②
$$

$$(v_1\cdots\cdots v_i\cdots\cdots v_j\cdots\cdots v_m)=\mathrm{V}_1=(v_j)_{1,m}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

とおく。また①の小行列の右側；$m\times(n-m)$ の行列およびこの行列の下の $(n-m)\times(n-m)$ の行列と行ベクトルを

$$
\begin{pmatrix}
a_{1,m+1}\cdots & a_{1k}\cdots & a_{1l}\cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{i,m+1}\cdots & a_{ik}\cdots & a_{il}\cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{j,m+1}\cdots & a_{jk}\cdots & a_{jl}\cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{m,m+1}\cdots & a_{mk}\cdots & a_{ml}\cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
=\mathrm{A}_{12}=[a_{il}]_{m,n-m}\cdots\cdots ④
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{m+1,m+1}\cdots & a_{m+1,k}\cdots & a_{m+1,l}\cdots & a_{m+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{k,m+1}\cdots & a_{kk}\cdots & a_{kl}\cdots & a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{l,m+1}\cdots & a_{lk}\cdots & a_{ll}\cdots & a_{ln}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n,m+1}\cdots & a_{nk}\cdots & a_{nl}\cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
=\mathrm{A}_{22}=[a_{kl}]_{n-m,n-m}\cdots\cdots ⑤
$$

$$(v_{m+1}\cdots\cdots v_k\cdots\cdots v_l\cdots\cdots v_n)=\mathrm{V}_2=(v_l)_{1,n-m}\cdots\cdots\cdots ⑥$$

とおく。さて，①～⑥までの係数マトリックスの持つ意味について説明してみよう。まず①の $\mathrm{A}_{11}=[a_{ij}]_{m,m}$ は，通常の投入係数マトリックスで，a_{ij} は第 j 財を1単位生産するために必要な第 i 財の投入量を示しており，②は新たに導入された各産業による汚染物の係数マトリックスで，これを①の投入係数マトリックスに対して排出係数マトリックスと呼ぼう。そして，この②の小行列 $\mathrm{A}_{21}=[a_{kj}]_{n-m,m}$ における a_{kj} は，第 j 財が1単位生産されるのに伴って排出される第 k の汚染物量を表わしている。③の行ベクトル $\mathrm{V}_1=(v_j)_{1,m}$ は付加価値の投入係数ベクトルで，v_j は第 j 財を1単位生産するために必要な付加価値量である。次に④，⑤，⑥は②と同じく新たに導入された部門で，これは各産業によって排出された汚染物を処理する過程を表わす投入・排出係数マトリックスおよび投入係数ベクトルである。すなわち④の $\mathrm{A}_{12}=[a_{il}]_{m,n-m}$ における a_{il} は第 l の汚染物を1単位処理するために投入される第 i 財の量を示し，⑤の $\mathrm{A}_{22}=[a_{kl}]_{n-m,n-m}$ の a_{kl} は第 l 汚染物を1単位処理する過程で排出される第 k の汚染物量であり，先程述べた排出係数マトリックスである。⑥の行

注(4) 以下，公害問題に対する産業連関分析のモデルは，W. Leontief 教授が1970年3月東京で開催された「環境破壊に関する国際シンポジウム」で発表したものであり，その後，多くの経済学者やエコノミスト達によって研究・発表されてきた。本稿もその例にならって展開するものであり，特に参考文献〔7〕および〔8〕の（ロ）に依るところが多い。W. Leontief 教授の論文については，参考文献〔1〕および〔2〕に収められている。

ベクトル：$V_2=(v_l)_{1,n-m}$ の v_l は，第 l 汚染物を処理するために必要な付加価値の投入係数ベクトルである。①～⑥までの係数マトリックスおよびベクトルは，右のように簡単に表わすこともできよう。

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline V_1 & V_2 \end{array}\right)$$

以上のような投入係数および排出係数を用いて産業連関の基本方程式を求めると[5]，

$$\begin{array}{l}
(1-a_{11})x_1\cdots-a_{1i}x_i\cdots\cdots-a_{1j}x_j\cdots\cdots-a_{1m}x_m\quad-a_{1,m+1}x_{m+1}\cdots\cdots-a_{1k}x_k\cdots\cdots-a_{1l}x_l\cdots\cdots-a_{1n}x_n=f_1\\
\qquad\vdots\\
-a_{i1}x_1\cdots\cdots+(1-a_{ii})x_i-a_{ij}x_j\cdots\cdots-a_{im}x_m\quad-a_{i,m+1}x_{m+1}\cdots\quad-a_{ik}x_k\cdots\cdots-a_{il}x_l\cdots\cdots-a_{in}x_n=f_i\\
\qquad\vdots\\
-a_{j1}x_1\cdots\cdots-a_{ji}x_i\cdots\cdots+(1-a_{jj})x_j\cdots-a_{jm}x_m\quad-a_{j,m+1}x_{m+1}\cdots\quad-a_{jk}x_k\cdots\cdots-a_{jl}x_l\cdots\cdots-a_{jn}x_n=f_j\\
\qquad\vdots\\
-a_{m1}x_1\cdots\cdots-a_{mi}x_i\cdots\cdots-a_{mj}x_j\cdots\cdots+(1-a_{mm})x_m-a_{m,m+1}x_{m+1}\cdots-a_{mk}x_k\cdots\cdots-a_{ml}x_l\cdots\cdots-a_{mn}x_n=f_m\\
-a_{m+1,1}x_1\cdots-a_{m+1,i}x_i\quad-a_{m+1,j}x_j\cdots-a_{m+1,m}x_m+(1-a_{m+1})x_{m+1}\cdots-a_{m+1,k}x_k\cdots-a_{m+1,l}x_l\cdots-a_{m+1,n}x_n=f_{m+1}\\
\qquad\vdots\\
-a_{k1}x_1\cdots\cdots-a_{ki}x_i\cdots\cdots-a_{kj}x_j\cdots\cdots-a_{km}x_m\quad-a_{km+1}x_{m+1}\cdots\cdots+(1-a_{kk})x_k\cdots-a_{kl}x_l\cdots\cdots-a_{kn}x_n=f_k\\
\qquad\vdots\\
-a_{l1}\cdots\cdots-a_{li}x_i\cdots\cdots-a_{lj}x_j\cdots\cdots-a_{lm}x_m\quad-a_{l,m+1}x_{m+1}\cdots\cdots-a_{lk}x_k\cdots\cdots+(1-a_{ll})x_l\cdots-a_{ln}x_n=f_l\\
\qquad\vdots\\
-a_{n1}x_1\cdots\cdots-a_{ni}x_i\cdots\cdots-a_{nj}x_j\cdots\cdots-a_{nm}x_m\quad-a_{n,m+1}x_{m+1}\cdots\cdots-a_{nk}x_k\cdots\cdots-a_{nl}x_l\cdots+(1-a_{nn})x_n=f_n
\end{array}$$

となるであろう。これを行列表示にすれば，

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots & -a_{1i}\cdots & -a_{1j}\cdots & -a_{1m} & -a_{1,m+1}\cdots & -a_{1k}\cdots & -a_{1l}\cdots & -a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{i1}\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ij}\cdots & -a_{im} & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{ik}\cdots & -a_{il}\cdots & -a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{j1}\cdots & -a_{ji}\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{jm} & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{jk}\cdots & -a_{jl}\cdots & -a_{jn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{m1}\cdots & -a_{mi}\cdots & -a_{mj}\cdots & +(1-a_{mm}) & -a_{m,m+1}\cdots & -a_{mk}\cdots & -a_{ml}\cdots & -a_{mn}\\
\hline
-a_{m+1,1}\cdots & -a_{m+1,i}\cdots & -a_{m+1,j}\cdots & -a_{m+1,m} & +(1-a_{m+1,m+1})\cdots & -a_{m+1,k}\cdots & -a_{m+1,l}\cdots & -a_{m+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{k1}\cdots & -a_{ki}\cdots & -a_{kj}\cdots & -a_{km} & -a_{k,m+1}\cdots & +(1-a_{kk})\cdots & -a_{kl}\cdots & -a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{l1}\cdots & -a_{li}\cdots & -a_{lj}\cdots & -a_{lm} & -a_{l,m+1}\cdots & -a_{lk}\cdots & +(1-a_{ll})\cdots & -a_{ln}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{n1}\cdots & -a_{ni}\cdots & -a_{nj}\cdots & -a_{nm} & -a_{n,m+1}\cdots & -a_{nk}\cdots & -a_{nl}\cdots & +(1-a_{nn})
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_m\\ \hline x_{m+1}\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_l\\ \vdots\\ x_n\end{array}\right)
=\left(\begin{array}{c} f_1\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_m\\ \hline f_{m+1}\\ \vdots\\ f_k\\ \vdots\\ f_l\\ \vdots\\ f_n\end{array}\right)$$

または

$$\left(\begin{array}{c|c} E-A_{11} & -A_{12} \\ \hline -A_{21} & E-A_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \end{array}\right)\quad (\text{Eは単位行列})$$

となるが，ここで

$$X_1=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix} x_{m+1}\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_l\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad F_1=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix},\quad F_2=\begin{pmatrix} f_{m+1}\\ \vdots\\ f_k\\ \vdots\\ f_l\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},$$

とおけば，X_1 は各財の生産活動水準を表わす列ベクトル，X_2 は各汚染物を処理する過程での活動水準を表わす列ベクトル，F_1 は各財に対する最終需要の列ベクトル，F_2 は汚染物の許容量を表わす列ベクトルである。

この基本方程式のもつ意味について説明しよう。

まず，第 i 番目の式についてみると，最終需要: f_i は第 i 財自身の純産出量；$(1-a_{ii})$ から他の財を生産するために投入される第 i 財の量；$(a_{i1}x_1+\cdots+a_{i,i-1}x_{i-1}+a_{i,i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{ij}x_j+\cdots+a_{im}x_m)$ と汚染物を処理する過程において投入される第 i 財の量；$(a_{i,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{ik}x_k+\cdots+a_{il}x_l+\cdots+a_{in}x_n)$ とを引いたものであり，また第 l 番目の式において，第 l 汚染物の許容量；f_l は第 l の汚染物の総量；x_l から m 個の産業から排出される第 l の汚染物量；$(a_{l1}x_1+\cdots+a_{li}x_i+\cdots+a_{lj}x_j+\cdots+a_{lm}x_m)$ と汚染物を処理する過程で排出される第 l の汚染物の量；$(a_{l,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{lk}x_k+\cdots+a_{ll}x_l+\cdots+a_{ln}x_n)$ を引いたものであることを表わしている。

以上の基本方程式の解は（行列表示で）

注(5) 基本方程式の導出については，参考文献〔10〕および〔12〕を参照。

$$\left(\begin{array}{c} x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_m\\ \hline x_{m+1}\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_l\\ \vdots\\ x_n\end{array}\right)=
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots & -a_{1i}\cdots & -a_{1j}\cdots & -a_{1m} & -a_{1,m+1}\cdots & -a_{1k}\cdots & -a_{1l}\cdots & -a_{1n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{i1}\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ij}\cdots & -a_{im} & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{ik}\cdots & -a_{il}\cdots & -a_{in}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{j1}\cdots & -a_{ji}\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{jm} & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{jk}\cdots & -a_{jl}\cdots & -a_{jn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{m1}\cdots & -a_{mi}\cdots & -a_{mj}\cdots & +(1-a_{mm}) & -a_{m,m+1}\cdots & -a_{mk}\cdots & -a_{ml}\cdots & -a_{mm}\\
\hline
-a_{m+1,1}\cdots & -a_{n+1,i}\cdots & -a_{m+1,j}\cdots & -a_{m+1,m} & +(1-a_{m+1,m+1})\cdots & -a_{m+1,k}\cdots & -a_{m+1,l}\cdots & -a_{m+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{k1}\cdots & -a_{ki}\cdots & -a_{kj}\cdots & -a_{km} & -a_{k,m+1}\cdots & +(1-a_{kk})\cdots & -a_{kl}\cdots & -a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{l1}\cdots & -a_{li}\cdots & -a_{lj}\cdots & -a_{lm} & -a_{l,m+1}\cdots & -a_{lk}\cdots & +(1-a_{ll})\cdots & -a_{ln}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{n1}\cdots & -a_{ni}\cdots & -a_{nj}\cdots & -a_{nm} & -a_{n,m+1}\cdots & -a_{nk}\cdots & -a_{nl}\cdots & +(1-a_{nn})
\end{array}\right)^{-1}
\left(\begin{array}{c} f_1\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_m\\ \hline f_{m+1}\\ \vdots\\ f_k\\ \vdots\\ f_l\\ \vdots\\ f_n\end{array}\right)$$

または

$$\left(\begin{array}{c} X_1 \\ \hline X_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} E-A_{11} & -A_{12} \\ \hline -A_{21} & E-A_{22} \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} F_1 \\ \hline F_2 \end{array}\right)$$ となる。ただし

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots & -a_{1i}\cdots & -a_{1j}\cdots & -a_{1m} & -a_{1,m+1}\cdots & -a_{1k}\cdots & -a_{1l}\cdots & -a_{1m}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{i1}\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ij}\cdots & -a_{im} & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{ik}\cdots & -a_{il}\cdots & -a_{im}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{j1}\cdots & -a_{ji}\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{jm} & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{jk}\cdots & -a_{jl}\cdots & -a_{jm}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{m1}\cdots & -a_{mi}\cdots & -a_{mj}\cdots & +(1-a_{mm}) & -a_{m,m+1}\cdots & -a_{mk}\cdots & -a_{ml}\cdots & -a_{mm}\\
\hline
-a_{m+1,1}\cdots & -a_{m+1,i}\cdots & -a_{m+1,j}\cdots & -a_{m+1,m} & +(1-a_{m+1,m+1})\cdots & -a_{m+k}\cdots & -a_{m+l}\cdots & -a_{m+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{k1}\cdots & -a_{ki}\cdots & -a_{kj}\cdots & -a_{km} & -a_{k,m+1}\cdots & +(1-a_{kl})\cdots & -a_{kl}\cdots & -a_{kn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{l1}\cdots & -a_{li}\cdots & -a_{lj}\cdots & -a_{lm} & -a_{l,m+1}\cdots & -a_{lk}\cdots & -(1-a_{ll}) & -a_{ln}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{n1}\cdots & -a_{ni}\cdots & -a_{nj}\cdots & -a_{nm} & -a_{n,m+1}\cdots & -a_{nk}\cdots & -a_{nl}\cdots & -(1-a_{nn})
\end{array}\right|\neq 0$$ であるとする

このことから Leontief Model について次のようなことが言えるであろう。すなわち，この方程式体系で示されているように投入または排出係数についての技術的体系が定まっているときに

ベクトル；$F_1=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_i\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ で示される最終需要と，

ベクトル；$F_2=\begin{pmatrix} f_{m+1}\\ \vdots\\ f_k\\ \vdots\\ f_l\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}$ で示される汚染物の許容量

限度を外生的に与えるならば，各産業の生産活動水準を表わす；ベクトル；$X_1=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$ と汚染物を処理する過程の活動水準を表わすベクトル；$X_2=\begin{pmatrix} x_{m+1}\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_l\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ が決定できるということになる。このモデルは各産業が生産活動を行う過程で生産物と，およびそれに伴って生じてくる汚染物を，ある一定の許容量限度内に抑え最終需要と見合った最適な生産量はどのくらいであるべきかを示す体系で，physical model と呼ばれているものである。次にこの physical model に対する dual としての price model を求めてみよう。

2.2. price model の導出

price model を求めるにあたって，次のような仮定を設ける。それは各産業が排出する汚染物の処理費用はすべて，その汚染物を排出する当該企業が負担するという，いわゆる ppp (polluters pay principle) 原則を採用するということである。このようにすれば price model の方程式は，次のようにあらわすことができるであろう[6]。

注(6) physical model から price model を求めるについては，参考文献〔10〕および〔12〕を参照。

$$
\begin{array}{lllllllll}
(1-a_{11})p_1\cdots & -a_{i1}p_i\cdots\cdots & -a_{j1}p_j\cdots\cdots & -a_{m1}p_m & -a_{m+1,1}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{k1}p_k\cdots\cdots & -a_{l1}p_l\cdots\cdots & -a_{n1}p_n & =v_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1i}p_1\cdots & +(1-a_{ii})p_i\cdots & -a_{ji}p_j\cdots\cdots & -a_{mi}p_m & -a_{m+1,i}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{ki}p_k\cdots\cdots & -a_{li}p_l\cdots\cdots & -a_{ni}p_n & =v_i\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1j}p_1\cdots\cdots & -a_{ij}p_i\cdots & +(1-a_{jj})p_j\cdots & -a_{mj}p_m & -a_{m+1,j}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{kj}p_k\cdots\cdots & -a_{lj}p_l\cdots\cdots & -a_{nj}p_n & =v_j\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1m}p_1\cdots\cdots & -a_{im}p_i\cdots\cdots & -a_{jm}p_j\cdots & +(1-a_{mm})p_m & -a_{m+1,m}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{km}p_k\cdots\cdots & -a_{lm}p_l\cdots\cdots & -a_{nm}p_n & =v_m\\
-a_{1,m+1}p_1\cdots & -a_{i,m+1}p_i\cdots & -a_{j,m+1}p_j\cdots & -a_{m,m+1}p_m & +(1-a_{m+1,m+1})p_{m+1} & -a_{k,m+1}p_k\cdots\cdots & -a_{l,m+1}p_l\cdots\cdots & -a_{n,m+1}p_n & =v_{m+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1k}p_1\cdots\cdots & -a_{ik}p_i\cdots\cdots & -a_{jk}p_j\cdots\cdots & -a_{mk}p_m & -a_{m+1,k}p_{m+1}\cdots\cdots & +(1-a_{kk})p_k\cdots & -a_{lk}p_l\cdots\cdots & -a_{nk}p_n & =v_k\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1l}p_1\cdots\cdots & -a_{il}p_i\cdots\cdots & -a_{jl}p_j\cdots\cdots & -a_{ml}p_m & -a_{m+1,l}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{kl}p_k\cdots\cdots & +(1-a_{ll})p_l\cdots & -a_{nl}p_n & =v_l\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_{1n}p_1\cdots\cdots & -a_{in}p_i\cdots\cdots & -a_{jn}p_j\cdots\cdots & -a_{mn}p_m & -a_{m+1,n}p_{m+1}\cdots\cdots & -a_{kn}p_k\cdots\cdots & -a_{ln}p_l\cdots\cdots & +(1-a_{nn})p_n & =v_n
\end{array}
$$

この price model の方程式を前と同様にして行列表示すれば，

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots\cdots & -a_{i1}\cdots\cdots & -a_{j1}\cdots\cdots & -a_{m1} & -a_{m+1,1}\cdots\cdots & -a_{k1}\cdots\cdots & -a_{l1}\cdots\cdots & -a_{n1}\\
-a_{1i}\cdots\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ji}\cdots\cdots & -a_{mi} & -a_{m+1,i}\cdots\cdots & -a_{ki}\cdots\cdots & -a_{li}\cdots\cdots & -a_{ni}\\
-a_{1j}\cdots\cdots & -a_{ij}\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{mj} & -a_{m+1,j}\cdots\cdots & -a_{kj}\cdots\cdots & -a_{lj}\cdots\cdots & -a_{nj}\\
-a_{1m}\cdots\cdots & -a_{im}\cdots\cdots & -a_{jm}\cdots & +(1-a_{mm}) & -a_{m+1,m}\cdots\cdots & -a_{km}\cdots\cdots & -a_{lm}\cdots\cdots & -a_{nm}\\
\hline
-a_{1,m+1}\cdots & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{m,m+1} & +(1-a_{m+1,m+1})\cdots & -a_{k,m+1}\cdots & -a_{l,m+1}\cdots & -a_{n,m+1}\\
-a_{1k}\cdots\cdots & -a_{ik}\cdots\cdots & -a_{jk}\cdots\cdots & -a_{mk} & -a_{m+1,k}\cdots\cdots & +(1-a_{kk})\cdots & -a_{lk}\cdots\cdots & -a_{nk}\\
-a_{1l}\cdots\cdots & -a_{il}\cdots\cdots & -a_{jl}\cdots\cdots & -a_{ml} & -a_{m+1,l}\cdots\cdots & -a_{kl}\cdots\cdots & +(1-a_{ll})\cdots & -a_{nl}\\
-a_{1n}\cdots\cdots & -a_{in}\cdots\cdots & -a_{jn}\cdots\cdots & -a_{mn} & -a_{m+1,n}\cdots\cdots & -a_{kn}\cdots\cdots & -a_{ln}\cdots\cdots & +(1-a_{nn})
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m\\ \hline p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{c} v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_m\\ \hline v_{m+1}\\ \vdots\\ v_k\\ \vdots\\ v_l\\ \vdots\\ v_n \end{array}\right)
$$

または

$$
\left(\begin{array}{c|c} E-A_{11}' & -A_{21}'\\ \hline -A_{12}' & E-A_{22}' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} P_1\\ \hline P_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} V_1\\ \hline V_2 \end{array}\right)
$$

（Eは単位行列で A′ は Aの転置行列を表わす）

となるであろう。ここで，

$$
P_1=\begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m \end{pmatrix},\quad
P_2=\begin{pmatrix} p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{pmatrix},\quad
V_1=\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_m \end{pmatrix},\quad
V_2=\begin{pmatrix} v_{m+1}\\ \vdots\\ v_k\\ \vdots\\ v_l\\ \vdots\\ v_n \end{pmatrix}
$$

とおけば，P_1 は各財の価格を表わす列ベクトル，P_2 は汚染物を処理する過程での価格を表わす列ベクトルである。この price model の方程式がもつ意味について説明してみよう。例えば，第 i 番目の式についてみると，第 i 財の価格; p_i は第 i 財を１単位生産するために要する費用; $(a_{1i}p_1+\cdots+a_{ii}p_i+\cdots+a_{ji}p_j+\cdots+a_{mi}p_m)$ と汚染物の処理に要する費用; $(a_{m+1,i}p_{m+1}+\cdots+a_{ki}p_k+\cdots+a_{li}p_l+\cdots+a_{ni}p_n)$ および付加価値; v_i との和に等しいことを表わしており，第 l 番目の式において，第 l の汚染物を１単位処理する価格; p_l は，第 l の汚染物を１単位処理するに要する費用; $(a_{1l}p_1+\cdots+a_{il}p_i+\cdots+a_{jl}p_j+\cdots+a_{ml}p_m)$ と，その処理過程で排出される汚染物を処理するために要する費用; $(a_{m+1,l}p_{m+1}+\cdots+a_{kl}p_k+\cdots+a_{ll}p_l+\cdots+a_{nl}p_n)$ および付加価値; v_l の和に等しいことを表わしている。

この方程式の解は（行列表示で）

$$
\left(\begin{array}{c} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m\\ \hline p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{array}\right)
=
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots & -a_{i1}\cdots\cdots & -a_{j1}\cdots\cdots & -a_{m1} & -a_{m+1,1}\cdots\cdots & -a_{k1}\cdots\cdots & -a_{l1}\cdots\cdots & -a_{n1}\\
-a_{1i}\cdots\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ji}\cdots\cdots & -a_{mi} & -a_{m+1,i}\cdots\cdots & -a_{ki}\cdots\cdots & -a_{li}\cdots\cdots & -a_{ni}\\
-a_{1j}\cdots\cdots & -a_{ij}\cdots\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{mj} & -a_{m+1,j}\cdots\cdots & -a_{kj}\cdots\cdots & -a_{lj}\cdots\cdots & -a_{nj}\\
-a_{1m}\cdots & -a_{im}\cdots\cdots & -a_{jm}\cdots\cdots & +(1-a_{mm}) & -a_{m+1,m}\cdots\cdots & -a_{km}\cdots\cdots & -a_{lm}\cdots\cdots & -a_{nm}\\
\hline
-a_{1,m+1}\cdots & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{m,m+1} & +(1-a_{m+1,m+1})\cdots & -a_{k,m+1}\cdots & -a_{l,m+1}\cdots & -a_{n,m+1}\\
-a_{1k}\cdots\cdots & -a_{ik}\cdots\cdots & -a_{jk}\cdots\cdots & -a_{mk} & -a_{m+1,k}\cdots\cdots & +(1-a_{kk})\cdots & -a_{lk}\cdots\cdots & -a_{nk}\\
-a_{1l}\cdots\cdots & -a_{il}\cdots\cdots & -a_{jl}\cdots\cdots & -a_{ml} & -a_{m+1,l}\cdots\cdots & -a_{kl}\cdots & +(1-a_{ll})\cdots & -a_{nl}\\
-a_{1n}\cdots\cdots & -a_{in}\cdots\cdots & -a_{jn}\cdots\cdots & -a_{mn} & -a_{m+1,n}\cdots\cdots & -a_{kn}\cdots\cdots & -a_{ln}\cdots & +(1-a_{nn})
\end{array}\right)^{-1}
\left(\begin{array}{c} v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_m\\ \hline v_{m+1}\\ \vdots\\ v_k\\ \vdots\\ v_l\\ \vdots\\ v_n \end{array}\right)
$$

または

$$
\left(\begin{array}{c} P_1\\ \hline P_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} E-A_{11}' & -A_{21}'\\ \hline -A_{12}' & E-A_{22}' \end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} V_1\\ \hline V_2 \end{array}\right)
$$

となる。したがって

$$
\text{付加価値ベクトル};\ V_1=\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_m \end{pmatrix}\ \text{および}\ V_2=\begin{pmatrix} v_{m+1}\\ \vdots\\ v_k\\ \vdots\\ v_l\\ \vdots\\ v_n \end{pmatrix},
$$

を外生的に与えるならば各財の価格ベクトル;

$$
P_1=\begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m \end{pmatrix}
$$

と汚染物を処理する過程の価格ベクトル;

$$
P_2=\begin{pmatrix} p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{pmatrix}
$$

を求めることができるということになる。

以上のことから，この price model は physical model の dual として導き出すことができるが，このモデルは，各財を生産するために必要な付加価値と汚染物を処理するために必要な付加価値を前もって決定しておけば，各産業が生産活動を維持していくための最適な各財の価格と汚染物を処理する費用を求めることができるということを表わしている。(7)

以上で公害問題に産業連関分析を利用した Leontief Model を理論的に説明してきたが，このモデルが，実際に適用されるためには投入係数; A_{11}, A_{12}, 排出係数; A_{21}, A_{22} があらかじめ正確に計測されていなければならないことはいうまでもない。しかしながら，このモデルも従来の Leontief Model がもつ一つの限界，(8) すなわち需要面からの分析を断念している。これは F_1 で示される最終需要と F_2 で示される汚染物の許容量限度および付加価値; V_1, V_2 を所与としていることによってもっぱら分析を生産技術に関する面からなしており，需要面についての分析はなされていない。したがって，需要面も考慮に入れた一般均衡論（需給均衡論）的な立場からの分析が必要とされるであろう。以下では，この一般均衡論的な立場から，汚染物という外部不経済を内部化したモデルを展開することにしてみたい。

注〔7〕 以上のモデルでは，各産業が排出する汚染物の処理に要する費用は，すべてその汚染物を排出する企業が負担するものとしているが，なお，その処理費用をすべてその当該企業が負担せず，ある一定の割合だけを負担する場合，この price model は次のようになる。すなわち，いま第番目の企業が排出する第 l の汚染物; a_{li} のうち r_{li} だけの割合 $(0\leqq r_{li}\leqq 1)$ を負担するものとすれば，このときには $b_{li}=r_{li}\times a_{li}$ として以下のようにモデルを修正すればよい。

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
(1-a_{11})\cdots & -a_{i1}\cdots\cdots & -a_{j1}\cdots\cdots & -a_{m1} & -b_{m+1,1}\cdots\cdots & -b_{k1}\cdots\cdots & -b_{l1}\cdots\cdots & -b_{n1}\\
-a_{1i}\cdots & +(1-a_{ii})\cdots & -a_{ji}\cdots\cdots & -a_{mi} & -b_{m+1,i}\cdots\cdots & -b_{ki}\cdots\cdots & -b_{li}\cdots\cdots & -b_{ni}\\
-a_{1j}\cdots\cdots & -a_{ij}\cdots & +(1-a_{jj})\cdots & -a_{mj} & -b_{m+1,j}\cdots\cdots & -b_{kj}\cdots\cdots & -b_{lj}\cdots\cdots & -b_{nj}\\
-a_{1m}\cdots\cdots & -a_{im}\cdots\cdots & -a_{jm}\cdots & +(1-a_{mm}) & -b_{m+1,m}\cdots\cdots & -b_{km}\cdots\cdots & -b_{lm}\cdots\cdots & -b_{nm}\\
\hline
-a_{1,m+1}\cdots & -a_{i,m+1}\cdots & -a_{j,m+1}\cdots & -a_{m,m+1} & +(1-b_{m+1,m+1})\cdots & -b_{k,m+1}\cdots & -b_{l,m+1}\cdots & -b_{n,m+1}\\
-a_{1k}\cdots\cdots & -a_{ik}\cdots\cdots & -a_{jk}\cdots\cdots & -a_{mk} & -b_{m+1,k}\cdots\cdots & +(1-b_{kk})\cdots & -b_{lk}\cdots\cdots & -b_{nk}\\
-a_{1l}\cdots\cdots & -a_{il}\cdots\cdots & -a_{jl}\cdots\cdots & -a_{ml} & -b_{m+1,l}\cdots\cdots & -b_{kl}\cdots & +(1-b_{ll})\cdots & -b_{nl}\\
-a_{1n}\cdots\cdots & -a_{in}\cdots\cdots & -a_{jn}\cdots\cdots & -a_{mn} & -b_{m+1,n}\cdots\cdots & -b_{kn}\cdots\cdots & -b_{ln}\cdots & +(1-b_{nn})
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m\\ \hline p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{array}\right)
\left(\begin{array}{c} v_1\\ \vdots\\ v_i\\ \vdots\\ v_j\\ \vdots\\ v_m\\ \hline v_{m+1}\\ \vdots\\ v_k\\ \vdots\\ v_l\\ \vdots\\ v_n \end{array}\right)
$$

または

$$
\left(\begin{array}{c|c} E-A_{11}' & -B_{21}'\\ \hline -A_{12}' & E-B_{22}' \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} P_1\\ \hline P_2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} V_1\\ \hline V_2 \end{array}\right)
$$

となり，これを

$$
P_1=\begin{pmatrix} p_1\\ \vdots\\ p_i\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_m \end{pmatrix},\ \text{および}\ P_2=\begin{pmatrix} p_{m+1}\\ \vdots\\ p_k\\ \vdots\\ p_l\\ \vdots\\ p_n \end{pmatrix}
$$

について解けばよいということになる。

（8） 従来の Leontief Model についての限界は，需要面からの分析を考慮に入れていないという点の他に，規模に関して収穫不変の生産関数を前提にしているとか，１産業１生産過程を前提とし，各産業内における生産過程の代替と考えていないとかという点が指摘されているが，これらの点についての Leontief Model に対する批判は，参考文献〔8〕の(ロ)で詳しく論じられている。

3. 公害と一般均衡論

3.1. L. Walras＝G. Cussel の一般均衡モデル

汚染物という外部不経済を内部化する場合，需要面からの分析も考慮に入れたより一般的なモデルは，エイヤーズとクネーゼのモデルにみることができる。彼等はいわゆる，ワルラス＝カッセル流の一般均衡体系を拡張してモデルを展開している。それでは，汚染物という外部不経済を内部化した一般均衡モデルについて述べようと思うが，[9] その前にこのモデルの基礎となるワルラス＝カッセルの一般均衡モデルを定式化してみよう。[10]

まず，n 個の生産物（財）と m 個の資源（生産要素）をもつ経済体系を考える。ここで，$r_i(i=1\cdots n)$ を第 i 資源の供給量，$x_j(j=1\cdots n)$ を第 j 生産物の数量とする。a'_{ij} をワルラス＝レオンティエフ型の投入係数とし，a'_{ij} は第 j 生産物を1単位生産するために必要な第 i 資源の投入量とすれば，資源と生産物についての関係は，以下の m 個の方程式によって表わすことができよう。

$$
\begin{aligned}
r_1&=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1j}x_j+\cdots+a'_{1n}x_n\\
r_2&=a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2j}x_j+\cdots+a'_{2n}x_n\\
r_i&=a'_{i1}x_1+a'_{i2}x_2+\cdots+a'_{ij}x_j+\cdots+a'_{in}x_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_m&=a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mj}x_j+\cdots+a'_{mn}x_n
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots①
$$

また，この方程式体系を行列表示にすれば

$$
\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_i\\ \vdots\\ r_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n}\\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}
\cdots\cdots①'
$$

ここで〔a'_{ij}〕は $(m\times n)$ の行列である。なお①および①′の方程式においては資源という生産要素または生産過程に代替の可能性がないことと結合生産の可能性がないことが仮定されている。

次に，資源；r_i の価格を $q_i(i=1\cdots m)$，生産物；x_j の価格を $p_j(j=1\cdots n)$ とすれば，生産物に対する需要関数，資源に対する供給関数は以下のように表わすことができる。[11]

$$
\begin{aligned}
x_1&=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
x_2&=F_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_j&=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
x_n&=F_n(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots②
$$

および

$$
\begin{aligned}
r_1&=G_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
r_2&=G_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_i&=G_i(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
r_m&=G_m(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots③
$$

②は生産物に対する需要関数をあらわしているが，資源（生産要素）の価格；$q_i(i=1\cdots m)$ が需要関係のなかにあらわれているのは，所得水準およびその分配の変動によって需要の変化が引き起こされることを考慮に入れたからであり，すべての需要関数；$F_j(j=1\cdots n)$ はゼロ次の同次関数である。また，資源に対する供給関数は③で表わされているが，資源の供給は生産物の価格にも依存するものとし，すべての供給関数；$G_i(i=1,\cdots m)$ は需要関数と同様，ゼロ次の同次関数であると想定される。

さて，以上の生産物と資源の関係式の他に，生産物；$x_i(i=1\cdots n)$[12] と最終需要；$f_j(j=1\cdots n)$ についての関係を明らかにしなければならないが，これはすでに述べた Leontief Model から容易に導き出すことができる。[13] Leontief Model は

$$
\begin{aligned}
x_1&=a_{11}f_1+a_{12}f_2+\cdots+a_{1j}f_j+\cdots+a_{1n}f_n\\
x_2&=a_{21}f_1+a_{22}f_2+\cdots+a_{2j}f_j+\cdots+a_{2n}f_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_i&=x_{i1}f_1+x_{i2}f_2+\cdots+a_{ij}f_j+\cdots+a_{in}f_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n&=x_{n1}f_1+x_{n2}f_2+\cdots+a_{nj}f_j+\cdots+a_{nn}f_n
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots④
$$

注(9) 以下，一般均衡論（需給均衡論）的な立場からの分析は，特にエイヤーズとクネーゼのモデルに依っているが，本稿では彼等のモデルを若干修正したものを展開する。彼等のモデルに対して修正すべきと思われる点は，この（注）で随時述べてある。彼等のモデルについては参考文献〔4〕および〔5〕を参照。なお，このモデルの批判並びに修正個所については参考文献〔8〕の(ロ)から多くの示唆を得た。

(10) 以下，ワルラスカッセルの一般均衡モデルの定式化については，エイヤーズとクネーゼもおこなっているが，本稿では参考文献〔6〕を参照。

(11) エイヤーズとクネーゼのモデルでは需要関数を $f_j=F_j(p_1,\cdots\cdots p_n)$ $(j=1\cdots\cdots n)$，供給関数を $r_i=G_i(q_1,\cdots\cdots,q_m)$ $(i=1\cdots\cdots m)$ としているが，所得水準および，その分配の変動を考慮に入れ，またワルラス＝カッセルのモデルに忠実にするには，本論の②式または③式のように表わすのが適当であると思われる。なお，需要関数については，後の展開で最終需要の関数としてとらえる。

(12) 説明上の都合により x_j の代わりに x_i を用いる。

(13) 2.1 を参照せよ。なお，2.1 では $A_{11}=〔a_{ij}〕$ でこれは $(m\times m)$ の行列であるが，ここでは $(n\times n)$ の行列とした。

または

$$
\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_n \end{pmatrix}
\cdots\cdots④'
$$

と表わすことができ，ここで a_{ij} は第 j 生産物を1単位生産するために必要な第 i 生産物の投入量を示し，行列；〔a_{ij}〕はレオンティエフ型逆行列を表わしている。この Leontief Model；④または④′を①または①′に直接結びつけることによって資源と最終需要との関係式が得られる。[14]

すなわち，

$$
\begin{aligned}
r_1&=(a'_{11}a_{11}+a'_{12}a_{21}+\cdots+a'_{1n}a_{n1})f_1+(a'_{11}a_{12}\\
&\quad+a'_{12}a_{22}+\cdots+a'_{1n}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{11}a_{1n}+a'_{12}a_{2n}+\cdots\\
&\quad+a'_{1n}a_{nn})f_n=A_{11}f_1+A_{12}f_2+\cdots+A_{1n}f_n\\
r_2&=(a_{21}a_{11}+a'_{22}a_{21}+\cdots+a'_{2n}a_{n2})f_1+(a'_{21}a_{12}\\
&\quad+a'_{22}a_{22}+\cdots+a'_{2n}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{21}a_{1n}+a'_{22}a_{2n}+\cdots\\
&\quad+a'_{2n}a_{nn})f_n=A_{21}f_1+A_{22}f_2+\cdots A_{2n}f_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_i&=(a'_{i1}a_{11}+a'_{i2}a_{21}+\cdots+a'_{in}a_{n1})f_1+(a'_{i1}a_{12}+a'_{i2}a_{22}\\
&\quad+\cdots\cdots+a'_{in}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{i1}a_{1n}+a'_{i2}a_{2n}+\cdots\\
&\quad+a'_{in}a_{nn})f_n=A_{i1}f_1+A_{i2}f_2+\cdots+A_{in}f_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_m&=(a'_{m1}a_{11}+a'_{m2}a_{21}+\cdots+a'_{mn}a_{n1})f_1+(a'_{m1}a_{12}\\
&\quad+a'_{m2}a_{22}+\cdots+a'_{mn}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{m1}a_{1n}+a'_{m2}a_{2n}\\
&\quad+\cdots+a'_{mn}a_{nn})f_n=A_{m1}f_1+A_{m2}f_2+\cdots+A_{mn}f_n
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots⑤
$$

または

$$
\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_i\\ \vdots\\ r_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a'_{1n}\\
a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a'_{in}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a'_{m1} & a'_{m2} & \cdots & a'_{mj} & \cdots & a'_{mn}
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_n \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n}\\
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2n}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mj} & \cdots & A_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_n \end{pmatrix}
\cdots\cdots⑤'
$$

ここで，A_{ij} は第 j の最終需要を1単位みたすために必要な第 i の資源量であり，⑤′の〔a'_{ij}〕は $(m\times n)$ の行列，〔a_{ij}〕は $(n\times n)$ の行列であるから〔A_{ij}〕は $(m\times n)$ の行列である。

このように，資源と最終需要についての関係式が得られると，いまや生産物に対する需要関数は最終需要についての需要関数となり，②式は

$$
\begin{aligned}
f_1&=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
f_2&=F_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_j&=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\
f_n&=F_n(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots②'
$$

のようにおきかえることもできるであろう。

さて，均衡モデルを完成させるためには，もう1組の条件が必要である。それは，⑤または⑤′のモデルの dual として導き出される price model の方程式である。いま，競争的市場において利潤ゼロの仮定を設けると，生産物の価格は $p_j(j=1,\cdots n)$，資源の価格は $q_i(i=1\cdots m)$ であったから，price model は，以下のような式で表わすことができる。

$$
\begin{aligned}
p_1&=A_{11}q_1+A_{21}q_2+\cdots+A_{i1}q_i+\cdots+A_{m1}q_m\\
p_2&=A_{12}q_1+A_{22}q_2+\cdots+A_{i2}q_i+\cdots+A_{m2}q_m\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_j&=A_{1j}q_1+A_{2j}q_2+\cdots+A_{ij}q_i+\cdots+A_{mj}q_m\\
p_n&=A_{1n}q_1+A_{2n}q_2+\cdots+A_{in}q_i+\cdots+A_{mn}q_m
\end{aligned}
\quad\cdots\cdots⑥
$$

または

$$
\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{i1} & \cdots & A_{m1}\\
A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{i2} & \cdots & A_{m2}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
A_{1j} & A_{2j} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{mj}\\
\cdots & & & & & \cdots\\
A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{in} & \cdots & A_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_i\\ \vdots\\ q_m \end{pmatrix}
\cdots\cdots⑥'
$$
[15]

この式は，生産物の価格；p_j がその生産のために必要とされた中間財の資源費用も含めて生産物1単位あたりの資源費用；$(A_{1j}q_1+A_{2j}q_2+\cdots+A_{ij}q_i+\cdots+A_{mj}q_m)$ に等しいことを示している。

以上，これまでの関係式において，ワルラス＝カッセルの均衡モデルを要約すれば以下のようになるであろう。

注(14) Leontief Model の生産関数は，生産物につき生産過程に代替の可能性のないことと，結合生産の可能性を認めていないので，中間財の存在は以下の関係式について何ら変更を必要としない。

まず，方程式体系については，

最終需要についての需要関数

$$\begin{aligned} f_1&=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ f_2&=F_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_j&=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_n&=F_n(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{②}'$$

資源に対する供給関数

$$\begin{aligned} r_1&=G_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ r_2&=G_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_i&=G_i(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_m&=G_m(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

資源と最終需要についての関係式

$$\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_i\\ \vdots\\ r_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1j}\cdots A_{1n}\\ A_{21} & A_{22}\cdots A_{2j}\cdots A_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{i1} & A_{i2}\cdots A_{ij}\cdots A_{in}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{m1} & A_{m2}\cdots A_{mj}\cdots A_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\text{⑤}'$$

生産物の価格と資源の価格との関係式

$$\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{22} & A_{21}\cdots A_{i1}\cdots A_{m1}\\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{i2}\cdots A_{m2}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{1j} & A_{2j}\cdots A_{ij}\cdots A_{mj}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{in}\cdots A_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_i\\ \vdots\\ q_m\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\text{⑥}'$$

となる。また未知数については

$$[F]_{n\cdot 1}=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_j\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},\quad [R]_{m\cdot 1}=\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_i\\ \vdots\\ r_m\end{pmatrix},\quad [P]_{n\cdot 1}=\begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ \vdots\\ p_j\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix},\quad [Q]_{m\cdot 1}=\begin{pmatrix} q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_i\\ \vdots\\ q_m\end{pmatrix}$$

である。したがって，ワルラスの法則によって未知数の数と方程式の数は，ともに $(2n+2m-1)$ 個となって一致する。よって，最終需要ベクトル；$[F]_{n\cdot 1}$，資源ベクトル；$[R]_{m\cdot 1}$ およびこれらの shadow prices のベクトル；$[P]_{n\cdot 1}$，$[Q]_{m\cdot 1}$ を解くことができる。(16)

以上がワルラス＝カッセルの一般的均衡モデルであるが，次にこのモデルを拡張して，汚染物という外部不経済を内部化した一般均衡モデルを展開してみよう。

3.2. 外部不経済の内部化

まず，3・1の①式では n 個の生産物 (財) と m 個の資源 (生産要素) をもった経済体系を考え，そこでは資源と生産物についての関係を

$$\begin{aligned} r_1&=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1j}x_j+\cdots+a'_{1n}x_n\\ r_2&=a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2j}x_j+\cdots+a'_{2n}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_i&=a'_{i1}x_1+a'_{i2}x_2+\cdots+a'_{ij}x_j+\cdots+a'_{in}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_m&=a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mj}x_j+\cdots+a'_{mn}x_n\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\text{①}$$

という m 個の方程式で表わした。そこでいま，生産物が資源の投入によって生産されるときに排出される s 個の汚染物；$r_k(k=1\cdots s)$ を考える。ここで a'_{kj} を a'_{ij} の投入係数に対して排出係数と呼び，第 j 生産物が1単位生産されるとき排出される第 k の汚染物としよう。そして，この汚染物と生産物との間に資源と生産物の関係同様，$r_k=\sum_{j=1}^{n}a'_{kj}\cdot x_j$ の関係式が(17)成立するものとすれば，①式は次のような式に拡張できるであろう。

$$\begin{aligned} r_1&=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1j}x_j+\cdots+a'_{1n}x_n\\ r_2&=a'_{21}a_1+a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2j}x_j+\cdots+a'_{2n}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_i&=a'_{i1}x_1+a'_{i2}x_2+\cdots+a'_{ij}x_j+\cdots+a'_{in}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_m&=a'_{m1}x_1+a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mj}x_j+\cdots+a'_{mn}x_n\\ r_{m+1\cdot 1}&=a'_{m+1\cdot 1}+a'_{m+1\cdot 2}x_2+\cdots+a'_{m+1\cdot j}x_j+\\ &\quad\cdots+a'_{m+1\cdot n}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_k&=a'_{k1}x_1+a'_{k2}x_2+\cdots+a'_{kj}x_j+\cdots+a'_{kn}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_l&=a'_{l1}x_1+a'_{l2}x_2+\cdots+a'_{lj}x_j+\cdots+a'_{ln}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_s&=a'_{s1}x_1+a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sj}x_j+\cdots+a'_{sn}x_n\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{⑦}$$

注(15) これは行ベクトルとして

$$[p_1,p_2,\cdots\cdots,p_j,\cdots\cdots,p_n]=[q_1,q_2,\cdots\cdots,q_i,\cdots\cdots,q_m]\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots\cdots A_{1j}\cdots\cdots A_{1n}\\ A_{21} & A_{22}\cdots\cdots A_{2j}\cdots\cdots A_{2n}\\ A_{i1} & A_{i2}\cdots\cdots A_{ij}\cdots\cdots A_{in}\\ A_{m1} & A_{m2}\cdots\cdots A_{mj}\cdots\cdots A_{mn}\end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

(16) ワルラス＝カッセルの一般均衡モデルについての問題点および解の存在についての詳しい展開については，参考文献〔6〕を参照せよ。本稿では，これらの点については触れていない。

(17) この式は生産者の汚染物に対する需要関数を表わしている。したがって，a'_{kj} は第 j の生産物を産出する生産者が，その生産物1単位あたりに対して甘受せざるを得ない第 i 汚染物量であると読むこともできる。なお，後の展開において，エイヤーズとクネーゼは汚染物に対する需要関数としてこの式を用いるが，しかしながら，この需要関数は生産者側のみについて考慮されたものであり，消費者の汚染物に対する需要 (負の選好) を考慮に入れていない。したがって，それを考慮に入れた需要関数が必要である。これについては後に明らかにする。

前半の $r_i(i=1\cdots m)$ についての式は①式そのものであり，後半の $r_k(k=1\cdots s)$ についての式が，いま述べた汚染物と生産物との関係式である。この⑦式はまた，行列表示にすれば

$$\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_i\\ \vdots\\ r_m\\ \hline r_{m+1\cdot 1}\\ \vdots\\ r_k\\ \vdots\\ r_l\\ \vdots\\ r_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12}\cdots\cdots a'_{1j}\cdots\cdots a'_{1n}\\ a'_{21} & a'_{22}\cdots\cdots a'_{2j}\cdots\cdots a'_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a'_{i1} & a'_{i2}\cdots\cdots a'_{ij}\cdots\cdots a'_{in}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a'_{m1} & a'_{m2}\cdots\cdots a'_{mj}\cdots\cdots a'_{mn}\\ \hline a'_{m+1\cdot 1} & a'_{m+1\cdot 2}\cdots a'_{m+1\cdot j}\cdots a'_{m+1\cdot n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a'_{k1} & a'_{k2}\cdots\cdots a'_{kj}\cdots\cdots a'_{kn}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a'_{l1} & a'_{l2}\cdots\cdots a'_{lj}\cdots\cdots a'_{ln}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a'_{s1} & a'_{s2}\cdots\cdots a'_{sj}\cdots\cdots a'_{sn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\text{⑦}'$$

と表わすことができる。

さて，生産物の価格は $p_j(j=1\cdots n)$，資源の価格は $q_i(i=1\cdots m)$ であったから，生産物に対する需要関数，および資源に対する供給関数はすでに述べたように

$$\begin{aligned} x_1&=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,p_m)\\ x_2&=F_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_j&=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=F_n(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

および

$$\begin{aligned} r_1&=G_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ r_2&=G_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_i&=G_i(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_m&=G_m(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{③}$$

と表わすことができた。そこでいま，汚染物；$r_k(k=1\cdots s)$ の価格を $q_k'(k=1\cdots s)$ として汚染物に対する需要関数および供給関数を求めると，以下のように表わすことができよう。(18)

$$\begin{aligned} r_{m+1\cdot 1}&=F_{m+1\cdot 1}(q'_{m+1\cdot 1},\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ r_k&=F_k(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_l&=F_l(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_s&=F_s(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{⑧}$$

および

$$\begin{aligned} r_{m+1\cdot 1}&=G_{m+1\cdot 1}(q'_{m+1\cdot 1},\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_k&=G_k(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_l&=G_l(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_s&=G_s(q'_{m+1\cdot 1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}\qquad\cdots\cdots\cdots\text{⑨}$$

⑧式で示されるのが，汚染物に対する消費者の需要 (負の選好) を示す需要関数であり，このなかに汚染物の価格があらわれているのは，生産物およびそれに伴って排出された汚染物の消費者に対する費用額が計算できるものと想定しているからである。また，⑨式で示される汚染物に対する供給関数は，生産者の汚染物と生産物との技術的トレードオフ関係を示すものである。すなわち，通常，汚染物は生産量の増加によって増えるので，生産者にとっては，この汚染物を処理する価格 (費用) が高くなる。したがって，供給関数のなかに汚染物の価格があらわれているのは，この価格

注(18) 生産者の汚染物に対する需要関数は，注 (17) でも述べたように，$r_k=\sum_{j=1}^{n}a'_{kj}x_j$ で表わすことができ，この式は第 j 生産物を産出する生産者が n 個の生産過程で甘受せざるを得ない第 k の汚染物量を示しており，消費者の汚染物に対する需要 (負の選好) は，まったく考慮されていない。したがって，本論の汚染物に対する需要関数は，この点を考慮した消費者の汚染物に対する需要関数である。なお，消費者とはこのモデルでは汚染物の被害者であることを意味している。

また供給関数についてはエイヤーズとクネーゼのモデルでは，$r_k=G_k(f_1,\cdots\cdots,f_n)\,(k=1\cdots\cdots s)$ として最終需要：f_j $(j=1\cdots\cdots n)$ のみの関数として把握し，供給関数のなかには汚染物の価格が導入されていない。このような供給関数が一般的でないのは，以下，本論で明らかにされるであろう。

（費用）が高くつくと生産者が考える場合，生産量を減少させることによって，汚染物の排出も減少させようとする生産者の意図を想定しているからである。

さて，以上の需要および供給関数を求めた上で，⑤または⑤′式に対応する汚染物を導入した資源，および汚染物と最終需要との関係を，Leontief Model を利用して求めれば，以下のような式で表わすことができよう。

$$r_1=(a'_{11}a_{11}+a'_{12}a_{21}+\cdots+a'_{1n}a_{n1})f_1+(a'_{11}a_{12}+a'_{21}a_{22}+\cdots+a'_{1n}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{11}a_{1n}+a'_{12}a_{2n}+\cdots+a'_{1n}a_{nn})f_n=A_{11}f_1+A_{12}f_2+\cdots A_{1n}f_n$$

$$r_2=(a'_{21}a_{11}+a'_{22}a_{21}+\cdots+a'_{2n}a_{n1})f_1+(a'_{21}a_{12}+a'_{22}a_{22}+\cdots+a'_{2n}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{21}a_{1n}+a'_{22}a_{2n}+\cdots+a'_{2n}a_{nn})f_n=A_{21}f_1+A_{22}f_2+\cdots+A_{2n}f_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_i=(a'_{i1}a_{11}+a'_{i2}a_{21}+\cdots+a'_{in}a_{n1})f_1+(a'_{i1}a_{12}+a'_{i2}a_{22}+\cdots+a'_{in}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{i1}a_{1n}+a'_{i2}a_{2n}+\cdots+a'_{in}a_{nn})f_n=A_{i1}f_1A_{i2}f_2+\cdots+A_{in}f_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_m=(a'_{m1}a_{11}+a'_{m2}a_{21}+\cdots+a'_{mn}a_{n1})f_1+(a'_{m1}a_{12}+a'_{m2}a_{22}+\cdots+a'_{mn}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{m1}a_{1n}+a'_{m2}a_{2n}+\cdots+a_{mn}a_{nn})f_n=A_{m1}f_1+A_{m2}f_2+\cdots+A_{mn}f_n$$

$$r_{m+1\cdot1}=(a'_{m+1\cdot1}a_{11}+a'_{m+1\cdot2}a_{21}+\cdots+a'_{m+1\cdot n}a_{n1})f_1+(a'_{m+1\cdot1}a_{12}+a'_{m+1\cdot2}a_{22}+\cdots+a'_{m+1\cdot n}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{m+1\cdot1}a_{1n}+a'_{m+1\cdot2}a_{2n}+\cdots+a'_{m+1\cdot n}a_{nn})f_n=A_{m+1\cdot1}f_1+A_{m+1\cdot2}f_2+\cdots+A_{m+1\cdot n}f_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_k=(a'_{k1}a_{11}+a'_{k2}a_{21}+\cdots+a'_{kn}a_{n1})f_1+(a'_{k1}a_{12}+a'_{k2}a_{22}+\cdots+a'_{kn}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{k1}a_{1n}+a'_{k2}a_{2n}+\cdots+a'_{kn}a_{nn})f_n=A_{k1}f_1+A_{k2}f_2+\cdots+A_{kn}f_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_l=(a'_{l1}a_{11}+a'_{l2}a_{21}+\cdots+a'_{ln}a_{n1})f_1+(a'_{l1}a_{12}+a'_{l2}a_{22}+\cdots+a'_{ln}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{l1}a_{1n}+a'_{l2}a_{2n}+\cdots+a'_{ln}a_{nn})f_n=A_{l1}f_1+A_{l2}f_2+\cdots+A_{ln}f_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_s=(a'_{s1}a_{11}+a'_{s2}a_{21}+\cdots+a'_{sn}a_{n1})f_1+(a'_{s1}a_{12}+a'_{s2}a_{22}+\cdots+a'_{sn}a_{n2})f_2+\cdots+(a'_{s1}a_{1n}+a'_{s2}a_{2n}+\cdots+a'_{sn}a_{nnn})f_n=A_{s1}f_1+A_{s2}f_2+\cdots A_{sn}f_n \qquad \cdots\cdots ⑩$$

または

$$\left(\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \\ \hline r_{m+1\cdot1} \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \\ r_l \\ \vdots \\ r_s \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12}\cdots\cdots & a'_{1j}\cdots\cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22}\cdots\cdots & a'_{2j}\cdots\cdots & a'_{2n} \\ a'_{i1} & a'_{i2}\cdots\cdots & a'_{ij}\cdots\cdots & a'_{in} \\ a'_{m1} & a'_{m2}\cdots\cdots & a'_{mj}\cdots\cdots & a'_{mn} \\ \hline a'_{m+1\cdot1} & a'_{m+1\cdot2}\cdots & a'_{m+1\cdot j}\cdots & a'_{m+1\cdot n} \\ a'_{k1} & a'_{k2}\cdots\cdots & a'_{kj}\cdots\cdots & a'_{kn} \\ a'_{l1} & a'_{l2}\cdots\cdots & a'_{lj}\cdots\cdots & a'_{ln} \\ a'_{s1} & a'_{s2}\cdots\cdots & a'_{sj}\cdots\cdots & a'_{sn} \end{array}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1j}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2j}\cdots & a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots\cdots & a_{ij}\cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots & a_{nj}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12}\cdots\cdots & A_{1j}\cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots\cdots & A_{2j}\cdots\cdots & A_{2n} \\ A_{i1} & A_{i2}\cdots\cdots & A_{ij}\cdots\cdots & A_{in} \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots\cdots & A_{mj}\cdots\cdots & A_{mn} \\ \hline A_{m+1\cdot1} & A_{m+1\cdot2}\cdots & A_{m+1\cdot j}\cdots & A_{m+1\cdot n} \\ A_{k1} & A_{k2}\cdots\cdots & A_{kj}\cdots\cdots & A_{kn} \\ A_{l1} & A_{l2}\cdots\cdots & A_{lj}\cdots\cdots & A_{ln} \\ A_{s1} & A_{s2}\cdots\cdots & A_{sj}\cdots\cdots & A_{sn} \end{array}\right)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdots ⑩'$$

ここで，A_{ij} はすでに述べたように，第 j の最終需要を1単位みたすために必要な第 i の資源量であり，$[a'_{ij}]$ は $(m\times n)$ の行列，$[a_{ij}]$ は $(n\times n)$ の行列であるから $[A_{ij}]$ は $(m\times n)$ の行列である。また，A_{kj} は第 j の最終需要を1単位みたすときに排出された第 k の汚染物量を示し，$[a'_{kj}]$ は $(s\times n)$ の行列，$[a_{ij}]$ は $n\times n$ の行列であるから，$[A_{kj}]$ は $s\times n$ の行列となる。

このように，資源および汚染物と最終需要との関係式が得られると，生産物に対する需要関数は，最終需要についての需要関数となり，これはすでに

$$\begin{aligned} f_1&=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ f_s&=F_s(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \qquad \cdots\cdots\cdots ②' \\ f_j&=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ f_n&=F_n(p,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \end{aligned}$$

のように表わすことができたから，[19] 汚染物に対する需要ならびに供給関数についても最終需要の関数として，⑧および⑨式を以下のようにおきかえることもできよう。すなわち

注(19)　資源に対する供給関数：$r_i=G_i(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots q_m)\ (i=1\cdots\cdots m)$ は何ら変更される必要はない。

$$r_{m+1\cdot1}=F_{m+1\cdot1}(q'_{m+1\cdot1},\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_k=F_k(q'_{m+1\cdot1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_l=F_l(q'_{m+1\cdot2},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_s=F_s(q'_{m+1\cdot1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧'$$

および

$$r_{m+1\cdot1}=G_{m+1\cdot1}(q'_{m+1\cdot1},\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_k=G_k(q'_{m+1\cdot1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_l=G_l(q'_{m+1\cdot1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_s=G_s(q'_{m+1\cdot1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨'$$

次に均衡モデルを完成させるためには，⑩および⑩′式より price model を求めなければならない。これは⑩および⑩′式の dual として容易に導き出すことができるが，ここでも競争的市場における利潤ゼロの仮定を設けると，生産物の価格は $p_j\ (j=1,\cdots,n)$，資源の価格は $q_i\ (i=1,\cdots m)$，汚染物の価格は $q'_k(k=1,\cdots,s)$ であったから，生産物の価格と資源および汚染物についての価格との関係は，次のように表わすことができる。

$$p_1=A_{11}q_1+A_{21}q_2+\cdots+A_{i1}q_i+\cdots+A_{m1}q_m+A_{m+1\cdot1}q'_{m+1\cdot1}+\cdots+A_{k1}q'_k+\cdots+A_{l1}q'_l+\cdots+A_{s1}q'_s$$

$$p_2=A_{12}q^1+A_{22}q_2+\cdots+A_{i2}q_i+\cdots+A_{m2}q_m+A_{m+1\cdot2}q'_{m+1\cdot1}+\cdots+A_{k2}q'_k+\cdots+A_{l2}q'_l+\cdots+A_{s2}q'_s$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_j=A_{1j}q_1+A_{2j}q_2+\cdots+A_{ij}q_i+\cdots+A_{mj}q_m+A_{m+1\cdot j}q'_{m+1\cdot1}+\cdots+A_{kj}q'_k+\cdots+A_{lj}q'_l+\cdots+A_{sj}q'_s$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_n=A_{1n}q_1+A_{2n}q_2+\cdots+A_{in}q_i+\cdots+A_{mn}q_m+A_{m+1\cdot n}q'_{m+1\cdot1}+\cdots+A_{kn}q'_k+\cdots+A_{ln}q'_l+\cdots+A_{sn}q'_s \qquad \cdots\cdots ⑪$$

または

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots\cdots A_{i1}\cdots\cdots A_{m1} & A_{m+1\cdot1}\cdots\cdots A_{k1}\cdots\cdots A_{l1}\cdots\cdots A_{s1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots\cdots A_{i2}\cdots\cdots A_{m2} & A_{m+1\cdot2}\cdots\cdots A_{k2}\cdots\cdots A_{l2}\cdots\cdots A_{s2} \\ A_{1j} & A_{2j}\cdots\cdots A_{ij}\cdots\cdots A_{mj} & A_{m+1\cdot j}\cdots\cdots A_{kj}\cdots\cdots A_{lj}\cdots\cdots A_{sj} \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots\cdots A_{in}\cdots\cdots A_{mn} & A_{m+1\cdot n}\cdots\cdots A_{kn}\cdots\cdots A_{ln}\cdots\cdots A_{sn} \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \\ \hline q'_{m+1\cdot1} \\ \vdots \\ q'_k \\ \vdots \\ q'_l \\ \vdots \\ q'_s \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots\cdots A_{i1}\cdots\cdots A_{m1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots\cdots A_{i2}\cdots\cdots A_{m2} \\ A_{1j} & A_{2j}\cdots\cdots A_{ij}\cdots\cdots A_{mj} \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots\cdots A_{in}\cdots\cdots A_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{m+1\cdot1}\cdots\cdots A_{k1}\cdots\cdots A_{l1}\cdots\cdots A_{s1} \\ A_{m+1\cdot2}\cdots\cdots A_{k2}\cdots\cdots A_{l2}\cdots\cdots A_{s2} \\ A_{m+1\cdot j}\cdots\cdots A_{kj}\cdots\cdots A_{lj}\cdots\cdots A_{sj} \\ A_{m+1\cdot n}\cdots\cdots A_{kn}\cdots\cdots A_{ln}\cdots\cdots A_{sn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q'_{m+1\cdot1} \\ \vdots \\ q'_k \\ \vdots \\ q'_l \\ \vdots \\ q'_s \end{pmatrix} [20] \qquad \cdots\cdots\cdots ⑪'$$

注(20)　これは行ベクトルとして

$$[p_1,p_2,\cdots,p_k,\cdots p_m]=[q_1,q_2,\cdots q_i,\cdots q_m,q'_{m+1},q'_k,\cdots q'_l\cdots q'_s]\times\left(\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12}\cdots\cdots & A_{1j}\cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots\cdots & A_{2j}\cdots\cdots & A_{2n} \\ A_{i1} & A_{i2}\cdots\cdots & A_{ij}\cdots\cdots & A_{in} \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots\cdots & A_{mj}\cdots\cdots & A_{mn} \\ \hline A_{m+1\cdot1} & A_{m+1\cdot2}\cdots & A_{m+1\cdot j}\cdots & A_{m+1\cdot n} \\ A_{k1} & A_{k2}\cdots\cdots & A_{kj}\cdots\cdots & A_{kn} \\ A_{l1} & A_{l2}\cdots\cdots & A_{lj}\cdots\cdots & A_{ln} \\ A_{s1} & A_{s2}\cdots\cdots & A_{sj}\cdots\cdots & A_{sn} \end{array}\right)$$

$$=[q_1,q_2,\cdots q_i,\cdots,q_m]\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots\cdots & A_{1j}\cdots\cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22}\cdots\cdots & A_{2j}\cdots\cdots & A_{2n} \\ A_{i1} & A_{i2}\cdots\cdots & A_{ij}\cdots\cdots & A_{in} \\ A_{m1} & A_{m2}\cdots\cdots & A_{mj}\cdots\cdots & A_{mn} \end{pmatrix}+[q'_{m+1\cdot1}\cdots,q_k',\cdots q_l'\cdots q_s']\begin{pmatrix} A_{m+1\cdot1} & A_{m+1\cdot2}\cdots & A_{m+1\cdot j}\cdots & A_{m+1\cdot n} \\ A_{k1} & A_{k2}\cdots\cdots & A_{kj}\cdots\cdots & A_{kn} \\ A_{l1} & A_{l2}\cdots\cdots & A_{lj}\cdots\cdots & A_{ln} \\ A_{s1} & A_{s2}\cdots\cdots & A_{sj}\cdots\cdots & A_{sn} \end{pmatrix}$$

と表わしてもよい。

この式は，生産物の価格；p_j が，その生産のために必要とされた中間財の資源費用も含めて，生産物1単位あたりの資源費用（$A_{1j}q_1+A_{2j}q_2+\cdots+A_{ij}q_i+\cdots+A_{mj}q_m$）と，この生産物を1単位生産する際に，排出された汚染物の費用（$A_{m+1.j}q'_{m+1.1}+\cdots+A_{kj}q'_k+\cdots+A_{lj}q'_l+\cdots+A_{sj}q'_1$）との和に等しいことを示している。

以上，ワルラス＝カッセルの一般均衡モデルを拡張して，汚染物という外部不経済を内部化した均衡モデルを要約すれば，以下のようになるであろう。

まず方程式体系については，

最終需要についての需要関数

$$\left.\begin{array}{l} f_1=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ f_2=F_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_j=F_j(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n=F_n(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \end{array}\right\} \cdots\cdots ②'$$

資源に対する供給関数

$$\left.\begin{array}{l} r_1=G_1(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ r_2=G_2(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_i=G_i(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_m=G_m(p_1,\cdots\cdots,p_n,q_1,\cdots\cdots,q_m) \end{array}\right\} \cdots\cdots ③$$

汚染物に対する需要関数

$$\left.\begin{array}{l} r_{m+1.1}=F_{m+1.1}(q'_{m+1.1}\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_k=F_k(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_l=F_l(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_k,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_s=F_s(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \end{array}\right\} \cdots\cdots ⑧'$$

汚染物に対する供給関数

$$\left.\begin{array}{l} r_{m+1.1}=G_{m+1.1}(q'_{m+1.1},\cdots,q'_k,\cdots,q_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_k=G_k(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_l=G_l(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_s=G_s(q'_{m+1.1},\cdots\cdots,q'_k,\cdots,q'_l,\cdots,q'_s,f_1,\cdots,f_n) \end{array}\right\} \cdots\cdots ⑨'$$

資源と最終需要についての関係式[21]

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} & \cdots\cdots A_{1j} & \cdots\cdots A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots A_{2j} & \cdots\cdots A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots\cdots A_{ij} & \cdots\cdots A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots\cdots A_{mj} & \cdots\cdots A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \cdots\cdots ⑤'$$

生産物の価格と資源および汚染物の価格についての関係式

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots\cdots A_{il} & \cdots\cdots A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots\cdots A_{i2} & \cdots\cdots A_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1j} & A_{2j} & \cdots\cdots A_{ij} & \cdots\cdots A_{mj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots\cdots A_{in} & \cdots\cdots A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} A_{m+1.1} & \cdots\cdots A_{21} & \cdots\cdots A_{l1} & \cdots\cdots A_{s1} \\ A_{m+1.2} & \cdots\cdots A_{k2} & \cdots\cdots A_{l2} & \cdots\cdots A_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1.j} & \cdots\cdots A_{kj} & \cdots\cdots A_{lj} & \cdots\cdots A_{sj} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m+1.n} & \cdots\cdots A_{kn} & \cdots\cdots A_{ln} & \cdots\cdots A_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q'_{m+1.1} \\ \vdots \\ q'_k \\ \vdots \\ q'_l \\ \vdots \\ q'_s \end{pmatrix} \cdots\cdots ⑪'$$

となり，また未知数については，

$$〔F〕_{n.1}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},\ 〔R〕_{m.1}=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix},\ 〔R'〕_{s.1}=\begin{pmatrix} r_{m+1.1} \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \\ r_l \\ \vdots \\ r_s \end{pmatrix},$$

$$〔P〕_{n.1}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_j \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},\ 〔Q〕_{m.1}=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix},\ 〔Q'〕_{s.1}=\begin{pmatrix} q'_{m+1.1} \\ \vdots \\ q'_k \\ \vdots \\ q'_l \\ \vdots \\ q'_s \end{pmatrix},$$

である。したがって，ワルラスの法則によって未知数の数と方程式の数は，ともに（$2n+2m+2s-1$）個となって一致する。よって，最終需要ベクトル；$〔F〕_{n.1}$，資源ベクトル；$〔R〕_{m.1}$ 汚染物ベクトル；$〔R'〕_{s.1}$ と，これらの shadow prices ベクトル；$〔P〕_{n.1}$，$〔Q〕_{m.1}$，

(21) エイヤーズとクネーゼのモデルでは，⑩および⑩′式すなわち資源と汚染物および最終需要についての関係式を用いて均衡モデルを定式化する。したがって，⑩および⑩′式を用いれば，汚染物に対する需要関数式⑧′は必要でなくなる。というのは，⑩および⑩′式の r_k についての s 個の式はすでに注(17)，(18) でも述べたように，汚染物に対する生産者の需要関数を表わしているからである。しかしながら，本稿では汚染物に対する需要関数⑧′式を用いるので，⑩および⑩′式の r_k についての s 個の式は必要でなくなり，その代わり⑤′式を用いる。

$〔Q'〕_{s.1}$ を解くことができる。

4. 結　び

本稿の2においては，公害問題に対する産業連関分析モデルのもつ有効性や特徴を理論的に明らかにしたが，このモデルはすでに述べたように，最終需要と汚染物に対する許容量の限度および付加価値の大きさを所与していることによって，生産技術に関する面から生産量と汚染物の量および，これらの shadow price の決定を論じ，需要面からの分析を考慮に入れていない。したがって，この点を考慮に入れて，一般均衡論（需給均衡論）的な立場からモデルを展開したのが本稿の3.である。このモデルは，生産物（最終需要）と汚染物に対する需要関数を考慮していることによって理論的にはより一般的なモデル[22]であるといえるが，このモデルはワルラス＝カッセルのモデルとして単純化[23]されたものを拡張したものであり，今後，更に理論的検討を要するものである。また，産業連関分析モデルも含めてこのようなモデルが，より実践的な意義を持ち，そして適用されるようになるためには，最終需要と汚染物およびこの許容水準，さらには汚染物の費用等の正確な計測値の分析や，需要ならびに供給関数の推定方法等々といった実証分析や計量分析が要求されるであろう。このような点については，今後の計量経済学の発達や他の自然科学および科会科学等の協力によってこそ克服できるものであり，このような学際的接近によって，理論的にも実践的にも公害問題に対する経済学の実際的応用を，より実り多きものにすることができるであろう。

引　用　文　献

〔1〕 W. Leontief, "Environmental Repercussions and the Economic Strucuture: An Input-Output Approach." *Review of Economics and Statisticts*, Vol. LII, Aug. 1970.

〔2〕 S. Tsuru(ed.), Environmental Disruption, Zushi Conference, Asahi Shinbun, 1969.

〔3〕 W. Z. Hirsch, S. Soneblum, and J. St. Dennis, "Apprication of Input-Output Techniques to Quality of Urban Life Indicators," *Kyklos*, 1970.

〔4〕 R. U. Ayres and A. V. Kneese, "Production, Consumption, and Externalities," *American Economic Review*, June, 1969.

〔5〕 R. U. Ayres, A. V. Kneese and R. C. d'Arge, ECONOMICS AND THE ENVIROMENT—A Materials Balance Approach—, Johns Hopkins Press, 1970.
宮永昌男訳『環境容量の経済理論』所書店1974.

〔6〕 R. Dorfman, P. A. Samuelson and R. M. Solow, LINEAR PROGRAMING AND ECONOMIC ANALYSIS. McGraw-Hill, New York. 1958.
安井琢磨，福岡正夫，渡辺経彦，小山昭雄，共訳『線型計画と経済分析』岩波書店。

〔7〕 西川俊作稿『公害問題への計量的接近』東洋経済臨時増刊，「公害特集」1970.

〔8〕 柴山幸治，磯村隆文編『公害対策の経済学』日本評論社 1971.
(イ)服部容教稿『経済成長と経済問題』
(ロ)柴山幸治稿『公害問題へのシステム理論的アプローチ』

〔9〕 加藤寛，丸尾直美『人間と環境の経済学』ダイヤモンド社 1972.

〔10〕 永友育雄『産業連関分析の基礎』法律文化社 1969.

〔11〕 森嶋通夫『産業連関論入門』創文社 1970.

〔12〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店 1972.

〔13〕 田島一郎『線型代数』共立出版 1972.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程）

注(22) しかしながら，このモデルも注（8）で述べられたような限界をもっている。

(23) この単純性というものは，産業連関分析モデルと同様，constant とされた生産の技術係数を想定するという点にある程度まで依存しており，このような場合，Input と Output の結合に関連した最適化という問題は生じないであろう。この点についての仔細は参考文献〔5〕で論じられている。