(4. 17)　$\bar{\alpha}\mathrm{A}\bar{p} \geqq \bar{\beta}\mathrm{A}\bar{p} \geqq \mathrm{B}\bar{p}$

となり，(4. 6) も満たされる。また (4. 16) と (4. 17) より

(4. 18)　$\bar{\alpha}\bar{x}'\mathrm{A}\bar{p} \leqq \bar{x}'\mathrm{B}\bar{p} \leqq \bar{\alpha}\bar{x}'\mathrm{A}\bar{p}$

となり，(4. 7) および (4. 8) も満たされることが知られる。

5　結　び

前2節でクーン＝フーリェの定理の経済学への応用例を示したが，同定理がゼロ和2人ゲームの均衡戦略の存在証明などにも使用可能なことは，その標準的証明をみれば明らかである。また凸多面体についての分離定理の証明にもこの定理が適用可能であることも知られる。このように，クーン＝フーリェの定理の経済学にとっての有用性はまことに大きいといわねばならない。

参 考 文 献

〔1〕 Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York, 1960.
〔2〕 Fourier, J.-B. J., "Solution d'une question particulière du calcul des inégalités", *Oeuvres II* 1826.
〔3〕 Neumann, J. von "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemernerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8*. 1937.
英訳: "A Model of General Economic Equilibrium", *The Review of Economic Studies* Vol. 8 (1945-46)
〔4〕 二階堂副包『経済のための線型数学』，培風館，1961.
〔5〕 Kuhn, H. W., "Solvability and consistency for linear equations and inequalities" *American Math. Monthly* Vol 63, pp 217—232 (1956).
〔6〕 Stoer, J., and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finiee Dimensions I*, Springer, New York, 1970.

（経済学部助教授）

Continuous Selection と不動点定理

丸　山　　徹

経済理論の数学的な分析を進める際に，定義域の各点に対して，値域のある集合を対応させる，いわゆる multi-valued mapping を扱わねばならないことが極めて多い。経済理論との関連で言えば，その連続性に関する諸性質や，種々の不動点定理などがとりわけ大切な役割を果してきた。

本稿では，しばしば経済理論にあらわれるタイプの multi-valued mapping から，一価の連続写像を抽出する問題 (continuous selection の問題)(1) に1つの解答を与え，新しい分析用具を供したいと思う。そしてその応用として，角谷の不動点定理に比較的簡単な別証を与える。continuous selection に関する諸定理は，不動点定理の種々のヴァリエーションを得るのにも役立つが(2)，その議論は他の機会にゆずる。

いま (X, d) を距離空間，$(Y, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし，Y の power set を $P(Y)$ で表わすこととする。X から Y への multi-valued mapping $\varphi : X \to P(Y)$ のグラフ G_φ は

$$G_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y / y \in \varphi(x)\}$$

で定義される。$(X \times Y) \times (X \times Y)$ 上で実数値函数 ρ を

$$\rho[(x, y), (x', y')] = \max[d(x, x'), \|y - y'\|]; \quad (x, y), (x', y') \in X \times Y$$

と定義すれば，ρ は明らかに距離函数となる。さらに，$(x, y) \in X \times Y$ と，$A \subset X \times Y$ との距離は

$$d^*[(x, y), A] = \inf_{(u, v) \in A} \rho[(x, y), (u, v)]$$

で定義する。このとき，G_φ の周囲の ε—開球 $B(G_\varphi, \varepsilon)$ は，

$$B(G_\varphi, \varepsilon) = \{(x, y) \in X \times Y / d^*[(x, y), G_\varphi] < \varepsilon\} \quad \text{where } \varepsilon > 0$$

である。

注(1)　先駆的な業績として Michael〔4〕がある。
(2)　Cellina〔1〕を参照。

定理 1 (i) (X, d) はコンパクト距離空間，$(Y, \|\cdot\|)$ は線形ノルム空間，$\varphi: X \to P(Y)$ は lower-hemi continuous (l. h. c.) で凸値の multi-valued mapping とする。このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$G_f \subset B(G_\varphi, \varepsilon)$$

を満たす一価連続写像 $f: X \to Y$ が存在する。

(ii) さらに，(i)の条件に加えて $(Y, \|\cdot\|)$ が完備で，φ が閉値であるとすれば，

$$G_f \subset G_\varphi$$

を満たす一価連続写像 $f: X \to Y$ が存在する。

証明) (i) 各 $y \in Y$ について，集合

$$U_y = \{x \in X / \inf_{z \in \varphi(x)} \|y-z\| < \varepsilon\}$$

を考える。これは

$$U_y = \{x \in X / \varphi(x) \cap \{z \in Y / \|y-z\| < \varepsilon\} \neq \phi\}$$

と書け，しかも φ は l. h. c. であるから U_y は開集合である。[3] 開集合族 $\{U_y\}_{y \in Y}$ はコンパクト集合 X の被覆であるから，それは有限部分被覆

$$U_1 = U_{y_1},\ U_2 = U_{y_2},\ \cdots\cdots,\ U_q = U_{y_q}$$

をもつ。

次に函数 α_i, β_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, q)$ を次のように定義する。

$$\alpha_i(x) = d(x, X-U_i) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, q)$$

$$\beta_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{k=1}^{q} \alpha_k(x)} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, q)。$$

このとき，

$$\beta_i(x) = 0 \iff x \in X - U_i$$

$$0 \leqq \beta_i(x) \leqq 1\ ;\ \sum_{i=1}^{q} \beta_i(x) = 1。$$

写像 $f: X \to Y$ を

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i(x) y_i$$

で定義すれば，β_i が連続であることから f も連続。さらに $f(x)$ は x を含む U_i に対応する y_i $(i=1, 2, \cdots\cdots, q)$ の凸結合である。よって U_i の定義から $y_i \in B(\varphi(x), \varepsilon)$ となり，従って

注(3) φ が l.h.c. であることと，Y の任意の開集合 G に対して，集合 $\{x \in X / \varphi(x) \cap G \neq \phi\}$ が X の開集合になることとは同値である。(Hildenbrand 〔2〕 Appendix を参照)。

$$G_f \subset B(G_\varphi, \varepsilon)。$$

(ii) 以上の結果から，

$$(\forall x \in X) \quad f_1(x) \in B\left(\varphi(x), \frac{1}{2}\right)$$

を満たす一価連続写像 $f_1: X \to Y$ が存在する。写像 $\varphi_2: X \to P(Y)$ を

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) \cap \left\{y \in Y / \|y - f_1(x)\| < \frac{1}{2}\right\}$$

と定めれば，これは明らかに凸値で l. h. c. である。よって再び(i)より，

$$(\forall x \in X) \quad f_2(x) \in B\left(\varphi_2(x), \frac{1}{2^2}\right)$$

なる一価連続写像 $f_2: X \to Y$ が存在する。

このようにして順次，一価連続写像の列 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_{n-1}$ を定めたとき，

$$(\forall x \in X) \quad f_n(x) \in B\left(\varphi_n(x), \frac{1}{2^n}\right)$$

where

$$\varphi_n(x) = \varphi(x) \cap \left\{y \in Y / \|y - f_{n-1}(x)\| < \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

となる一価連続写像 f_n を定めることができる。

このようにして得られた $\{f_n(x)\}$, $x \in X$ は Cauchy 列である。なぜなら，

$$(\forall x \in X) \quad f_n(x) \in B\left(\varphi(x), \frac{1}{2^n}\right)$$

であることから

$$(\forall x \in X) \quad \|f_n(x) - f_{n+1}(x)\| < \frac{3}{2^{n+1}}$$

となるからである。Y が完備であることと，$\{f_n\}$ の定義から，$\{f_n\}$ はある一価の写像 f に一様収束し，従って f も連続である。しかも φ が閉値であることから，

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \in \varphi(x)。$$

ゆえに

$$G_f \subset G_\varphi。 \qquad \text{(証了)}$$

定理 2 (i) (Cellina)[4] (X, d) はコンパクト距離空間，$(Y, \|\cdot\|)$ は線形ノルム空間，$\varphi: X \to P(Y)$ は upper-hemi continuous (u. h. c.) で凸値の multi-valued mapping とする。このとき，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

注(4) Cellina 〔1〕 Theorem 1。

$$G_f \subset B(G_\varphi, \varepsilon)$$

を満たす一価連続写像 $f: X \to Y$ が存在する。

(ii) さらに(i)の条件に加えて，$(Y, \|\cdot\|)$ が完備で，φ が閉値であるとすれば

$$G_f \subset G_\varphi$$

を満たす一価連続写像 $f: X \to Y$ が存在する。

証明） (i)まず任意に $\varepsilon > 0$ を固定し，各 $x \in X$ に対して実数 $\theta(x, \varepsilon)$ を，

$$\theta(x, \varepsilon) = \sup\left\{\delta < \frac{\varepsilon}{2} \middle/ \exists x' \in B(x, \delta) \text{ such that } \varphi(B(x, \delta)) \subset B\left(\varphi(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right.$$

と定義する。(5) このとき

$$\inf_{x \in X} \theta(x, \varepsilon) > 0$$

となることが以下のようにして知られる。

$x \in X$ を任意に固定すると，u. h. c. の定義から，所与の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$(\exists \eta = \eta(x) > 0)\ \varphi(B(x, \eta)) \subset B\left(\varphi(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)。$$

上の $\theta(x, \varepsilon)$ の定義式において $x' = x$ とすれば，

$$\eta_1 = \min\left\{\eta(x), \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0;\ 0 \leqq \eta_1(x) \leqq \theta(x, \varepsilon)。$$

いま $\inf_{x \in X} \theta(x, \varepsilon) = 0$ と仮定すれば，

$$(\forall \zeta > 0)\ (\exists x \in X)\ \theta(x, \varepsilon) < \zeta。$$

そこで $\{\zeta_n\}$ を $\zeta_n \to 0$ なる実数列，$\{x_n\}$ を $\theta(x_n, \varepsilon) < \zeta_n$ を満たす X の点列とする。X はコンパクトであるから，一般性を失うことなく，$x_n \to x_0 \in X$ と仮定してよい。すると，

$$\left(\exists \eta(x_0) \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right) \varphi(B(x_0, \eta(x_0))) \subset B\left(\varphi(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)。$$

従って，$d(x_n, x_0) < \frac{\eta(x_0)}{3}$ のとき，

$$\varphi\left(B\left(x_n, \frac{\eta(x_0)}{3}\right)\right) \subset \varphi(B(x_0, \eta_0)) \subset B\left(\varphi(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

かつ，

$$x_0 \in B\left(x_n, \frac{\eta(x_0)}{3}\right)。$$

ゆえに十分大なる n について

$$\theta(x_n, \varepsilon) \geqq \frac{\eta(x_0)}{3}。$$

注(5) φ が u. h. c. であることから，この定義は可能である。

矛盾。

そこで

$$\zeta_0 = \inf_{x \in X} \theta(x, \varepsilon)$$

とおき，ζ_1 を $0 < \zeta_1 < \zeta_0$ 満たす実数とする。あらたに写像 $\Phi: X \to P(Y)$ を

$$\Phi(x) = \varphi(B(x, \zeta_1))$$

で定義すれば，$\varphi(x)$ における任意の開集合の逆像は X の開集合ゆえ，Φ は l. h. c. である。(6)

従って，集合系 $\{\Phi^{-1}(y)\}_{y \in \varphi(X)}$ は X の開被覆となる。X はコンパクトゆえ，それは有限部分被覆 $\{\Phi^{-1}(y_i)\}^q{}_{i=1}$ をもつ。

定理1の場合と同様に，

$$\alpha_i(x) = d(x, X - \Phi^{-1}(y_i)) \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$$

$$\beta_i(x) = \frac{\alpha_i(x)}{\sum_{k=1}^{q} \alpha_k(x)} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, q)$$

と定めれば

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i(x) y_i$$

で定義される写像 $f: X \to Y$ は連続。また $\Phi(x)$ の定義から，次の関係を満たす点 $x' \in X$ と $\delta > 0$ とが存在する。

$$d(x, x') < \delta;\ \zeta_1 < \delta \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Phi(x) = \varphi(B(x, \zeta_1)) \subset \varphi(B(x, \delta)) \subset B\left(\varphi(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \varphi(X) \subset B\left(\varphi(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathrm{co}\,\varphi(X)。$$ (7)

$\varphi(x')$ は凸であるから，$B\left(\varphi(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathrm{co}\,\varphi(X)$ も凸。従って f の定義から，

$$(\forall x \in X) \quad f(x) \in B\left(\varphi(x'), \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathrm{co}\,\varphi(x)。$$

また，

$$\begin{aligned} & d^*((x, f(x)), G_\varphi) \\ & \leqq d^*((x, f(x)), (x', f(x)) + d^*((x', f(x)), G_\varphi) \\ & \leqq d^*((x, f(x)), (x', f(x)) + d^*((x', f(x)), (x', \varphi(x')) \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon。\end{aligned}$$

ゆえに，

$$G_f \subset B(G_\varphi, \varepsilon)。$$

注(6) (注3) を見よ。
(7) $\mathrm{co}\,\varphi(X)$ は $\varphi(X)$ の凸包。

(ii) 以上の結果から

$$(\forall x \in X) \quad f_1(x) \in B\left(\varphi(x), \frac{1}{2}\right)$$

を満たす一価連続写像 $f_1 : X \to Y$ が存在する。写像 $\varphi_2 : X \to P(Y)$ を

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) \cap \left\{ y \in Y / \|y - f_1(x)\| \leqq \frac{1}{2} \right\}$$

と定めれば，これは明らかに凸値で u. h. c. である。よって再び(i)より，

$$(\forall x \in X) \quad f_2(x) \in B\left(\varphi_2(x), \frac{1}{2^2}\right)$$

なる一価連続写像 $f_2 : X \to Y$ が存在する。以下，定理1(ii)の証明と同様。（証了）

応用例 （角谷の不動点定理[8]） S を Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ のコンパクト・凸部分集合，$\varphi : S \to P(S)$ を閉・凸値で u. h. c. な multi-valued mapping とすれば，φ は不動点を有する。

証明） 定理2(ii)と Schauder の不動点定理[9]とを用いれば，角谷の不動点定理の成立は自明であるが，ここでは(i)のみを用いて証明する。

$\{\varepsilon_n\}$ を $\varepsilon_n \to 0$ なる正の実数列とする。定理2(i)より，各 $\varepsilon_n > 0$ に対して，

$$G_{f_n} \subset B(G_\varphi, \varepsilon_n)$$

を満たす一価連続写像 $f_n : S \to S$ が存在する。Schauder の不動点定理によって，各 f_n は不動点 x_n を有する。つまり，

$$(\exists x_n \in S) \quad f_n(x_n) = x_n \quad \text{for each } n。$$

S はコンパクトであるから，$\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{nk}\}$ をもつ。$x_{nk} \to x^*$ とすれば，

$$\begin{aligned} & d^*[(x^*, x^*), G_\varphi] \\ & \leqq d^*[(x^*, x^*), (x_{nk}, x_{nk})] + d^*[(x_{nk}, x_{nk}), G_\varphi] \\ & = d^*[(x^*, x^*), (x_{nk}, x_{nk})] + d^*[(x_{nk}, f(x_{nk})), G_\varphi] \\ & \to 0。 \end{aligned}$$

G_φ は閉集合ゆえ[10]，$(x^*, x^*) \in G_\varphi$。（証了）

注(8) Kakutani〔3〕.
(9) Schauder〔5〕.
(10) X, Y を距離空間，しかも Y をコンパクトとすると，閉値写像 $\varphi : X \to P(Y)$ が u.h.c. であることと，G_φ が閉集合であることとは同値である。(Hildenbrand〔2〕Appendix を参照。)

参考文献

〔1〕 Collina, A. "Approximation of Set Valued Functions and Fixed Point Theorems." *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (1969) 17-24.
〔2〕 Hildenbrand, W. *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton Univ. Press, N. J. forthcoming.
〔3〕 Kakutani, S. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem" *Duke Math, J.* 8 (1961) 457-459.
〔4〕 Michael, E. "Continuous Selections I" *Ann. Math.* 63 (1956) 361-382.
〔5〕 Schauder, J. „Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen" *Studia Math.* 2 (1930) 171-180.

（慶應義塾大学大学院修士課程—現在カリフォルニア大学留学中）