Title	クーン=フーリエの定理と線型経済学
Sub Title	The Kuhn=Fourier theorem and linear economics
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1974
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.67, No.7 (1974. 7) ,p.612(22)- 620(30)
JaLC DOI	10.14991/001.19740701-0022
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19740701-0022

クーン＝フーリェの定理と線型経済学

川　又　邦　雄

1　序

本稿の目的は，線型不等式体系における解の存在の条件を一般的な形で扱ったクーン＝フーリェの定理の紹介と，その経済学への応用を示すことにある。その定理の特別な場合として，ミンコフスキー＝ファルカスの補題とスティムケの定理を含む，線型不等式体系の解の存在についての興味ある諸命題が導かれることが示され，それらの線型計画，フォン＝ノイマンの均衡成長モデルへの応用が示される。(1)

2　クーン＝フーリェの定理

A，B，Cをそれぞれm_1行n列，m_2行n列，m_3行n列の所与の行列，xをn次の未知の列ベクトル，a, b, c をそれぞれ m_1, m_2, m_3 次の所与の列ベクトルとする。ここで m_1, m_2, m_3 はすべてがゼロでない限り，そのいくつかがゼロである場合もゆるすことにする。そのとき不等式体系

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}x>a \\ &\mathrm{B}x\geqq b \\ &\mathrm{C}x=c \end{aligned}$$

の解の存在について考察しよう。

(2.1) の最初のタイプの不等式の両辺に左から $p\geqq 0$ を，第二のタイプの不等式には $q\geqq 0$ を，最後の等式には任意のベクトルrをそれぞれ乗じて加えあわせれば，(2.1) の解があればそれは必ず

注(1)　線型不等式についての諸定理と，その経済学への応用についての優れた解説書としては，二階堂〔4〕がある。

$$(2.2)\qquad p'\mathrm{A}x+q'\mathrm{B}x+r'\mathrm{C}x\geqq p'a+q'b+r'c$$

を満たすはずである。ただし $(p', q', r')\neq 0$ であり p, q, r の次数は演算が可能なように定められているものとする。とくに $p\geq 0$ ($p\geqq 0$ でpの少なくとも1つの成分はゼロでない) ならば (2.2) は厳密な不等号で成立し，また $p=q=0$, $r\neq 0$ の場合には等号が成立するものと考えてよい。

そこでわれわれはつぎのように定義しよう。

定義1　$p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $(p', q', r')\neq 0$ について

$$(d', d_0)=p'(\mathrm{A}, a)+q'(\mathrm{B}, b)+r'(\mathrm{C}, c),$$

$$\mathrm{R}=\begin{cases} > & p\geq 0 \quad \text{のとき} \\ \geqq & p=0,\ q\geq 0 \quad \text{のとき} \\ = & p=0,\ q=0\ \ r\neq 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

と定めるとき，$d'x\,\mathrm{R}\,d_0$ を (2.1) の許容一次結合 (legal linier combination) であるという。

さて，不等式体系 (2.1) の解の存在についての条件を与えるものがフーリェ〔2〕およびクーン〔5〕らによって確立されたつぎの定理である。

定理 1　(クーン＝フーリェ) 不等式体系 (2.1) に解があるための必要十分条件は，(2.1) の許容一次結合として導かれる任意の $0\mathrm{R}d_0$ という関係がつねに正しいことである。とくに $p\geqq 0$, $q\geqq 0$ で $p'\mathrm{A}+q'\mathrm{B}+r'\mathrm{C}=0$ となるゼロでないベクトル (p', q', r') が存在しない場合には体系には解がある。

この定理は不等式体系の解の存在を一般的な形で扱ったもので，線型不等式についての多くの命題がこれから導かれるものである。また等式だけを含む場合の命題についても同様である。

この定理の証明は変数の数を1つずつ消去する初等的な方法を用いて行うことができる。それについては，たとえばストーエル＝ウィッツガル〔6〕を参照されたい。本節の目的は経済学に応用範囲の広い線型不等式の定理のいくつかが，この定理の系としてごく自然に導かれることを示すことにある。またそれらの不等式が線型経済学の諸分野でいかに有効に利用されるかが次節以下で例示される。なお以下においては，行列およびベクトルの次数はすべて演算が可能になるように定義されているものとし，行列，ベクトルの記号は必ずしも (2.1) 式で用いたものを踏襲していないことに注意しておこう。

系1　$\mathrm{A}x \geqq b$ が非負解 $x \geqq 0$ をもつための必要十分条件は，$p'\mathrm{A} \leqq 0'$ の任意の非負解 $p \geqq 0$ に対して $p'b \leqq 0$ となることである。

証明　$\mathrm{A}x \geqq b$ が非負解 $x \geqq 0$ をもつ，つまりIを単位行列とするとき

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{I} \end{bmatrix} x \geqq \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

が解をもつとする。クーン＝フーリェ定理によればそのための条件は，

$$p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p'\mathrm{A} + q' = 0' \quad ならば \quad p'b \leqq 0$$

となることである。この条件はまた

$$p \geqq 0,\ p'\mathrm{A} \leqq 0' \quad ならば \quad p'b \leqq 0$$

となることと同値である。

系2　$\mathrm{A}x > 0$ が非負解 $x \geqq 0$ をもつための条件は $p'\mathrm{A} \leqq 0'$ となる $p \geqq 0$ が存在しないことである。

証明

$$\mathrm{A}x > 0$$
$$x \geqq 0$$

が解をもつとする。定理1によればそのための条件は

$$p'\mathrm{A} + q' = 0'$$

となる $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ が存在しないことである。これより求める条件がただちに導かれる。

系3　（スティムケ(Stiemke)の定理）　$\mathrm{A}x = 0$ が正数解 $x > 0$ をもつための必要十分条件は，$p'\mathrm{A} \geqq 0'$ となるような解 p が存在しないことである。

証明　体系

$$\mathrm{A}x = 0$$
$$x > 0$$

が解をもつとする。定理1によればそのための条件は $q' \geqq 0$, $q' + p'\mathrm{A} = 0'$ を満たす p, q が存在しないこと，つまり $p'\mathrm{A} > 0'$ が解をもたないことである。この条件は $p'\mathrm{A} \geqq 0'$ が解をもたないといいかえてもよい。

系4　（ミンコフスキー＝ファルカス(Minkowski-Farkas)の補題）　$\mathrm{A}x = b$ が非負解 $x \geqq 0$ をもつための必要十分条件は，$p'\mathrm{A} \geqq 0'$ の任意の解 p' に対して $p'b \geqq 0'$ が成立することである。

証明　体系

$$\mathrm{A}x = b$$
$$x \geqq 0$$

が解をもつとする。定理1によればそのための条件は

$$q' \geqq 0,\ (p',\ q') \neq 0' \quad しかも \quad p'\mathrm{A} + q' = 0' \quad ならば \quad p'b \leqq 0'$$

となることである。この条件は

$$p'\mathrm{A} \leqq 0' \quad ならば \quad p'b \leqq 0'$$

であるといいかえてよい。これは系4の条件と同値である。

3　線型計画の双対定理

本節ではクーン＝フーリェ定理の1つの応用として（ヨリ的確にはその定理の系1を用いて）線型計画の双対定理の証明を行なうことにしよう。

さて

$$\mathrm{A}x \leqq b \qquad (3.1)$$
$$x \geqq 0$$

の制約の下に目的関数

$$c'x$$

を最大にするという線型計画の問題（標準最大値問題）を考えよう。この問題の双対問題は

$$u'\mathrm{A} \geqq c' \qquad (3.2)$$
$$u \geqq 0$$

の制約の下に目的関数

$$b'u$$

を最小にするという問題（標準最小値問題）である。このとき（3.1）を満たす任意の x（以下許容解(実現可能解)という）と（3.2）を満たす任意の u（以下許容解(実現可能解)という）の間には明らかに

$$b'u \geqq u'\mathrm{A}x \geqq c'x \qquad (3.3)$$

という関係が成立する。ここで等号の成立する場合があることを述べたのがつぎの双対定理である。

定理 2 （線型計画の双対定理） 標準最大値問題と標準最小値問題がともに許容解をもてば（つまり (3.1) および (3.2) が満たされれば）それらはともに最適解（許容解の中で目的関数をそれぞれ最大および最小にするもの） $\hat{x}$, $\hat{u}$ をもち

(3.4) $\qquad b'\hat{u}=c'\hat{x}$

が満たされる。

証明 (3.3) を考慮すれば (3.4) が満たされることは，$\hat{x}$, $\hat{u}$ が

$$c'x\geqq b'u$$

を満たすことと同値であり，これが示されれば定理の前半も明らかである。

いまかりに上の不等式を満たす許容解がないとすれば，

(3.5) $$\begin{bmatrix} -A & O \\ O & A' \\ c' & -b' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}\geqq\begin{bmatrix} -b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}$$

は非負解 $(x', u')\geqq 0$ をもたない。よって定理1系1により

(3.6) $$(p', q', r')\begin{bmatrix} -A & O \\ O & A' \\ c' & -b' \end{bmatrix}\leqq 0'$$

$$-p'b+q'c>0$$

を満たす $(p', q', r')\geqq 0'$ が存在する。

さて，原問題と双対問題に実現可能解が存在するという仮定から，(3.5) の最後の不等式を除いたものは非負解をもつ。よって $r\neq 0$，すなわち $r>0$ である。また (3.6) の形から $r=1$ として一般性を失わない。したがって (3.6) より

$$c'\leqq p'A$$
(3.7) $$b\geqq Aq$$
$$q'c>p'b$$

が非負解 (p', q) をもつことになる。ところがこの最初の2つの不等式より

$$c'q\leqq p'Aq\leqq p'b$$

が導かれるから，最後の不等式に矛盾する。よって定理が示された。

4 フォン＝ノイマンの均衡成長モデル

本節では，クーン＝フーリェ定理の系2を用いて，フォン＝ノイマンの多部門経済成長モデル〔3〕における均衡成長径路の存在を証明することにしよう。

いま第 i プロセスにおける第 j 財の投入量を a_{ij}，第 j 財の産出量を b_{ij} $(i=1, \cdots m,\ j=1, \cdots n)$ とし，それらを i 行 j 列の元素としてもつ行列をそれぞれAおよびBと定義する。

われわれはAおよびBが

仮定1

(4.1) $\qquad A\geqq 0,\ \ B\geqq 0,$

(4.2) $\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}>0 \quad i=1, \cdots\cdots m,$

(4.3) $\qquad \sum_{i=1}^{m} b_{ij}>0 \quad j=1, \cdots\cdots n$

を満たすものとする。

仮定1はゲイル〔1〕のものと同じである。(4.2)式は，各プロセスとも必ず何らかの財の投入を必要とすること，(4.3) 式は，各財は必ずどれかの工程によって技術的に生産可能であることを示している。

ノイマン〔3〕のモデルでは (4.3) の代りに

(4.4) $\qquad A+B>0$

が仮定されていたが，その現実妥当性は (4.3) より疑わしいと思われる。ただし以下の証明は，(4.4) を仮定してもとどこおりなく行うことができる。さて

定理 3 仮定1の下で

(4.5) $\qquad \alpha x'A\leqq x'B$

(4.6) $\qquad \beta Ap\geqq Bp$

(4.7) $\qquad (\alpha x'A-x'B)p=0$

(4.8) $\qquad x'(\beta Ap-Bp)=0$

を満たす x, p, α, β が存在することを示すのが以下の目的である。ここで x は各工程の稼動水準

を示す m 次元ベクトル，p は各財の価格を示す n 次元ベクトル，α は 1＋成長率，β は 1＋利子率を示すものと解釈する。

周知のように，各式の意味はつぎのとおりである。すなわち，まず (4.5) 式は（経済が毎期 $\alpha-1$ の率で均衡成長している場合の）今期の産出量が次期の投入量をまかないうることを，(3.6) 式は各工程の均衡における利潤が（利子支払いを考慮した場合）プラスであってはならないことを意味している。さらに (4.7) 式は (4.5) の下で今期の産出量が次期の投入量を上まわる財の価格がゼロであることを，(4.8) 式は (4.6) の下で利潤が負の工程は稼動されないことを示している。

証明　まず S_m を m 次元基本単体，つまり

$$S_m=\{x\in R^m \mid x\geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{m} x_i=1\}$$

とし，ある $x\in S_m$ について

(4.9)　　$\alpha x'A\leqq x'B$

となるような α の集合を考えよう。(4.3) によって $x>0$ となる $x\in S_m$ については $x'B>0$ となるから，十分小さい $\alpha>0$ については (4.9) は満たされる。((4.9) は $(1+\alpha)x'A\leqq x'(A+B)$ とも書けるから，(4.4) の仮定の下でも同様な結論が導かれる。) また，すべての成分が1となるような n 次元ベクトルを1とすると (4.2) によって $A1>0$ であるから，α を十分大きく選べば任意の $x\in S_m$ について

$$\alpha x'A1>x'B1$$

となり，(4.9) は満たされない。以上によって

(4.10)　　$\bar{\alpha}=\sup\{\alpha : \alpha x'A\leqq x'B,\ x\in S_m\}$

が存在し $\bar{\alpha}>0$ であることが知られた。$\bar{\alpha}$ が実際に達成されることは S_m のコンパクト性から明らかである。$\bar{\alpha}$ に対応する稼動水準のベクトルを $\bar{x}$ としよう。

まったく同様にしてある $p\in S_n$ に対して

(4.10)　　$\beta Ap\geqq \beta p$

となる β の中で最小のもの $\bar{\beta}>0$ とそれに対応する価格ベクトル $\bar{p}$ の存在も示される。

つぎに上で定義した $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ の間には $\bar{\alpha}\geqq\bar{\beta}$ という関係が成立することを示そう。そのために

(4.11)　　$C=B-\bar{\alpha}A$

と定義すれば，

(4.11)　　$x'C>0$

となる非負解 $x\geqq 0$ は存在しないことが示される。じっさいもし $x^0\geqq 0$ が (4.11) を満たすとすれば

$$\bar{\alpha}x^0A<x^0B$$

となり，x^0 はゼロでないから一般性を失うことなく $x^0\in S_m$ としてよい。よって十分小さい $\varepsilon>0$ に対しては

$$(\bar{\alpha}+\varepsilon)x^0A<x^0B$$

となり，$\bar{\alpha}$ の定義に矛盾する。

さて (4.11) が非負解をもたないということから，クーン＝フーリェ定理の系によって

(4.12)　　$Cp\leqq 0$

となる $p\geqq 0$ が存在することになる。

ここでCの定義を用いると

(4.13)　　$Bp\leqq\bar{\alpha}Ap$

となる $p\geqq 0$ が存在することになり，$\bar{\beta}$ の定義から

(4.14)　　$\bar{\beta}\leqq\bar{\alpha}$

であることが知られる。

以上を準備として，ノイマンモデルの均衡条件 (4.5)—(4.8) を満たす解 (x, p, α, β) が存在することを示そう。そのためには

(4.15)　　$(x, p, \alpha, \beta)=(\bar{x}, \bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha})$

と定義すれば十分である。じっさい

(4.16)　　$\alpha\bar{x}'A\leqq\bar{x}'B$

が成立することは $\bar{\alpha}$, $\bar{x}$ の定義から明らかであり，(4.14) と $\bar{\beta}$, $\bar{p}$ の定義より

$$\bar{\alpha}\mathrm{A}\bar{p} \geqq \bar{\beta}\mathrm{A}\bar{p} \geqq \mathrm{B}\bar{p} \tag{4.17}$$

となり，(4.6) も満たされる。また (4.16) と (4.17) より

$$\bar{\alpha}\bar{x}'\mathrm{A}\bar{p} \leqq \bar{x}'\mathrm{B}\bar{p} \leqq \bar{\alpha}\bar{x}'\mathrm{A}\bar{p} \tag{4.18}$$

となり，(4.7) および (4.8) も満たされることが知られる。

5　結　び

前2節でクーン＝フーリェの定理の経済学への応用例を示したが，同定理がゼロ和2人ゲームの均衡戦略の存在証明などにも使用可能なことは，その標準的証明をみれば明らかである。また凸多面体についての分離定理の証明にもこの定理が適用可能であることも知られる。このように，クーン＝フーリェの定理の経済学にとっての有用性はまことに大きいといわねばならない。

参考文献

〔1〕 Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York, 1960.

〔2〕 Fourier, J.-B. J., "Solution d'une question particulière du calcul des inégalités", *Oeuvres II* 1826.

〔3〕 Neumann, J. von "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemernerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8*. 1937.
英訳: "A Model of General Economic Equilibrium", *The Review of Economic Studies* Vol. 8 (1945-46)

〔4〕 二階堂副包『経済のための線型数学』，培風館，1961.

〔5〕 Kuhn, H. W., "Solvability and consistency for linear equations and inequalities" *American Math. Monthly* Vol 63, pp 217—232 (1956).

〔6〕 Stoer, J., and C. Witzgall, *Convexity and Optimization in Finiee Dimensions I*, Springer, New York, 1970.

（経済学部助教授）

Continuous Selection と不動点定理

丸　山　　徹

経済理論の数学的な分析を進める際に，定義域の各点に対して，値域のある集合を対応させる，いわゆる multi-valued mapping を扱わねばならないことが極めて多い。経済理論との関連で言えば，その連続性に関する諸性質や，種々の不動点定理などがとりわけ大切な役割を果してきた。

本稿では，しばしば経済理論にあらわれるタイプの multi-valued mapping から，一価の連続写像を抽出する問題 (continuous selection の問題)(1) に1つの解答を与え，新しい分析用具を供したいと思う。そしてその応用として，角谷の不動点定理に比較的簡単な別証を与える。continuous selection に関する諸定理は，不動点定理の種々のヴァリエーションを得るのにも役立つが(2)，その議論は他の機会にゆずる。

いま (X, d) を距離空間，$(Y, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし，Y の power set を $P(Y)$ で表わすこととする。X から Y への multi-valued mapping $\varphi: X \to P(Y)$ のグラフ G_φ は

$$G_\varphi = \{(x, y) \in X \times Y / y \in \varphi(x)\}$$

で定義される。$(X \times Y) \times (X \times Y)$ 上で実数値函数 ρ を

$$\rho[(x, y), (x', y')] = \max[d(x, x'), \|y - y'\|]; \quad (x, y), (x', y') \in X \times Y$$

と定義すれば，ρ は明らかに距離函数となる。さらに，$(x, y) \in X \times Y$ と，$A \subset X \times Y$ との距離は

$$d^*[(x, y), A] = \inf_{(u, v) \in A} \rho[(x, y), (u, v)]$$

で定義する。このとき，G_φ の周囲の ε—開球 $B(G_\varphi, \varepsilon)$ は，

$$B(G_\varphi, \varepsilon) = \{(x, y) \in X \times Y / d^*[(x, y), G_\varphi] < \varepsilon\} \quad \text{where } \varepsilon > 0$$

である。

注(1)　先駆的な業績として Michael〔4〕がある。
(2)　Cellina〔1〕を参照。