Title	外部性と競争均衡の存在
Sub Title	Existence of competitive equilibria in the presence of externalities
Author	長名, 寛明
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1974
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.67, No.5 (1974. 5) ,p.281(41)- 291(51)
JaLC DOI	10.14991/001.19740501-0041
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19740501-0041

of Economic History, Vol. 26 (September), 277-298.

Uzawa, H. (1961). "On a Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol. 29 (October), 40-47.

Uzawa, H. (1963). "On a Two-Sector Model of Economic Growth II," *Review of Economic Studies*, Vol. 30 (June), 105-118.

（経済学部助教授）

外部性と競争均衡の存在*

長　名　寛　明

この論文の目的は，Arrow-Debreu 型の一般均衡モデルを外部経済・不経済を考慮し得るように拡張したものについて均衡点の存在証明を与えることである[(1)]。選好関係における外部性のみを考慮したモデルに対しての均衡点の存在証明は McKenzie〔7〕によって与えられ，更に生産における外部性を考慮したモデルについては Arrow-Hahn〔2〕による証明がある。本論文では選好関係，消費可能性，更に生産技術のそれぞれの内部また交叉的な外部効果をすべて考慮したモデルについて考察する。均衡点の存在証明の方法としては，Debreu〔4〕に基づくものと Arrow-Hahn〔2〕に基づくものの2種類が考えられるが，われわれの目的のためには前者の方が適当であるように思われる。後者は厚生経済学の基本定理を利用する点で興味深いが，後に指摘するように若干の難点を持っている。Debreu〔4〕の方法は外部性を伴う場合への自然な拡張を許容する点で非常に優れているといえる。

1.　定理の叙述

l 種類の財，m 人の消費者，n 人の生産者から構成される経済を考える。財の集合，消費者の集合，生産者の集合を，それぞれ $H\equiv\{1, \cdots, l\}$，$I\equiv\{1, \cdots, m\}$，$J\equiv\{1, \cdots, n\}$ と書くことにする。l 次元 Euclid 空間 R^l を財空間とみなす。消費者 i の消費は R^l の1点 x_i によって表わされる。ここで正の成分は通常の消費量を表わし，負の成分はその財を当該消費者が供給していることを表わす。生産者 j の生産は R^l の1点 y_j によって表わされる。ここでは正の成分は産出量を，負の成分は投入量を表わす。$x=(x_1, \cdots, x_m)$ を消費配分，$y=(y_1, \cdots, y_n)$ を生産配分，(x, y) を状態と呼ぶことにする。各 $i\in I$ に対して $x_{)i(}\equiv(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m)$ と書くことにし，$(x_{)i(}, y)$を消費者 i の情況と呼ぶ。同様に各 $j\in J$ に対して，$y_{)j(}\equiv(y_1, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_n)$ と書き，$(x, y_{)j(})$ を生産者 j の情況と呼ぶ。

＊　本稿の作成にあたり，松永記念科学振興財団より研究費補助を与えられた。ここに記して謝意を表したい。

注(1)　Arrow and Debreu〔1〕を参照。

消費者 i の情況 $(x_{\setminus i}, y)\in R^{l(m-1+n)}$ が任意に与えられた時，彼にとって物理的にあるいは生理的に可能な消費の集合 $X_i(x_{\setminus i}, y)$ が定まるものと考えられる。つまり，各消費者 i に対して $R^{l(m-1+n)}$ から R^l への点対集合写像 X_i が与件として定まる。これを **消費可能性対応** と呼ぶ。同様に，生産者 j の情況 $(x, y_{\setminus j})\in R^{l(m+n-1)}$ が任意に与えられた時，彼にとって技術的に可能な生産の集合 $Y_j(x, y_{\setminus j})$ が定まる。$R^{l(m+n-1)}$ から R^l へのこの点対集合写像 Y_j を生産者 j の **生産可能性対応** と呼ぶ。社会全体として技術的に可能な状態の集合が

$$D\equiv\{(x, y)\in R^{l(m+n)}:\ (x, y)\in \Pi_{i\in I}X_i(x_{\setminus i}, y)\times \Pi_{j\in J}Y_j(x, y_{\setminus j})\}$$

によって表わされることは明らかである。これを **可能状態の集合** と呼ぶ。

この経済の賦存資源は消費者間に分配されているものと考える。消費者 i の初期資源保有量を R^l の1点 ω_i で表わす。$\omega\equiv(\omega_1, \cdots, \omega_m)$ を **初期資源配分** と呼ぶ。この時，生産と交換の活動を通じて実現できる状態の集合は

$$A\equiv\{(x, y)\in D:\ x_I\leqq y_J+\omega_I\}$$

によって与えられる[(2)]。ただし $x_I\equiv\sum_{i\in I}x_i$, $y_J\equiv\sum_{j\in J}y_j$, $\omega_I\equiv\sum_{i\in I}\omega_{i}$ である。

生産活動を通じて各生産者に生じる利潤は消費者に分配し尽されるものと仮定する。生産者 j の利潤が消費者 i に分配される率 θ_{ij} は与件として定まっているものと考える。この率は株式保有割合と解釈できる。これが不変であるということは，株式の売買の可能性を考えないことを意味する。各 $i\in I$, 各 $j\in J$ に対して $\theta_{ij}\geqq 0$ と仮定する。各生産者 j の利潤は消費者に分配し尽されるものと仮定しているから，当然 $\sum_{i\in I}\theta_{ij}=1$ となる。各 $i\in I$ に対して $\theta_i\equiv(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{in})$ と書く。

われわれが考察する経済の叙述は消費者の選好を導入すれば完結する。各消費者 $i\in I$ の選好関係 $\succsim_i$ は $R^{l(m+n)}$ の上で定義された完全擬順序である。すなわち，次の2条件を満足する $R^{l(m+n)}$ 上の二項関係である。

(i) すべての (x, y), $(x', y')\in R^{l(m+n)}$ に対して，$(x, y)\succsim_i(x', y')$ あるいは $(x', y')\succsim_i(x, y)$ の中少なくとも1つが成り立つ。

(ii) $(x, y)\succsim_i(x', y')$ かつ $(x', y')\succsim_i(x'', y'')$ であれば，必ず $(x, y)\succsim_i(x'', y'')$ となる。

$(x, y)\succsim_i(x', y')$ は，消費者 i にとって (x, y) が (x', y') と少なくとも同程度に望まれていることを意味するものと解釈される。$(x, y)\succsim_i(x', y')$ であり $(x', y')\succsim_i(x, y)$ ではない時，$(x, y)\succ_i(x', y')$ と書くことにする。これは，消費者 i が (x, y) を (x', y') より選好することを意味する。更に $(x, y)\succsim_i(x', y')$ かつ $(x', y')\succsim_i(x, y)$ である時，$(x, y)\sim_i(x', y')$ と書く。これは消費者 i が (x, y) と (x', y') の間で無差別であることを意味する。

注（2） R^l の2点 a と b が与えられた時，次の記法を用いる：
$a\geqq b$ if $a_h\geqq b_h$ for every $h\in H$;
$a\geq b$ if $a\geqq b$ and $a\neq b$;
$a>b$ if $a_h>b_h$ for every $h\in H$.

ここで本論文の中心的な定義，競争均衡あるいは単に均衡の定義を述べることができる。

定義 状態 (x^*, y^*) と R^l の一点 p^* の組 (x^*, y^*, p^*) は次の3条件を満足する時，均衡と呼ばれる。

(i) $(x^*, y^*)\in A$, $p^*\geq 0$, $p^*\cdot(x_I^*-y_J^*-\omega_I)=0$,

(ii) 各 $i\in I$ に対して，$p^*\cdot x_i^*\leqq p^*\cdot\omega_i+\theta_i\cdot(p^*\cdot y^*)$ であり，$p^*\cdot x_i\leqq p^*\cdot\omega_i+\theta_i\cdot(p^*\cdot y^*)$ を満足するすべての $x_i\in X_i(x_{\setminus i}^*, y^*)$ に対して $((x_i^*, x_{\setminus i}^*), y^*)\succsim_i((x_i, x_{\setminus i}^*), y^*)$ となる，

(iii) 各 $j\in J$ に対して，すべての $y_j\in Y_j(x^*, y_{\setminus j}^*)$ に対して $p^*\cdot y_j^*\geqq p^*\cdot y_j$ となる[(3)]。

条件(i)は市場均衡の条件を表わし，条件(ii)と(iii)はそれぞれ消費者と生産者の主体的均衡の条件を表わす。

次節で次の存在定理が証明される。

定理1 各 $i\in I$ に対して，

(C. 1) X_i は $R^{l(m-1+n)}$ から R^l への閉かつ下半連続な点対集合写像である[(4)]，

(C. 2) すべての $(x_{\setminus i}, y)\in R^{l(m-1+n)}$ に対して $X_i(x_{\setminus i}, y)$ は凸である，

(C. 3) すべての $(x_{\setminus i}, y)\in R^{l(m-1+n)}$ に対して $x_i<\omega_i$ となる $x_i\in X_i(x_{\setminus i}, y)$ が存在する，

(C. 4) R^l の1点 a_i が存在し，すべての $x_i\in\bigcup\{X_i(x_{\setminus i}, y):\ (x_{\setminus i}, y)\in R^{l(m-1+n)}\}$ に対して $a_i<x_i$ となる，

(T. 1) すべての $(x', y')\in R^{l(m+n)}$ に対して $\{(x, y)\in R^{l(m+n)}:\ (x, y)\succsim_i(x', y')\}$ と $\{(x, y)\in R^{l(m+n)}:\ (x', y')\succsim_i(x, y)\}$ は $R^{l(m+n)}$ の閉集合である，

(T. 2) $((x_i^2, x_{\setminus i}), y)\succ_i((x_i^1, x_{\setminus i}), y)$ かつ $t\in\,]0, 1[$ であれば $((tx_i^2+(1-t)x_i^1, x_{\setminus i}), y)\succ_i((x_i^1, x_{\setminus i}), y)$ となる，

(T. 3) すべての $(x_{\setminus i}, y)\in R^{l(m-1+n)}$ とすべての $x_i'\in X_i(x_{\setminus i}, y)$ に対して $((x_i'', x_{\setminus i}), y)\succ_i((x_i', x_{\setminus i}), y)$ となる $x_i''\in X_i(x_{\setminus i}, y)$ が存在する；

各 $j\in J$ に対して，

注（3） R^l の2点 a と b が与えられた時，それらの内積を $a\cdot b$ で表わす：すなわち $a\cdot b\equiv\sum_{h\in H}a_hb_h$ と書く。なお特に $p^*\cdot y^*\equiv(p^*\cdot y_1^*, \cdots, p^*\cdot y_n^*)$ と書くことにする。更に $(x_i, x_{\setminus i})$ という記法により，x_i と $x_{\setminus i}$ によって構成される消費配分を表わす：すなわち $(x_i, x_{\setminus i})\equiv(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_m)$ と書く。

（4） 一般に位相空間 X から位相空間 Y への点対集合写像 F が与えられた時，$y^0\notin F(x^0)$ となる任意の $y^0\in Y$ に対して，$x\in U(x^0)$ ならば常に $F(x)\cap V(y^0)=\phi$ となるような x^0 と y^0 の近傍 $U(x^0)$ と $V(y^0)$ が存在する時，F は $x_0\in X$ において閉であるという。F が X の各点で閉である時，単に F は閉であるという。また $G\cap F(x^0)\neq\phi$ となるような Y の任意の開集合 G に対して，$x\in U(x^0)$ ならば常に $G\cap F(x)\neq\phi$ となるような x^0 の近傍 $U(x^0)$ が存在する時，F は $x_0\in X$ において下半連続であるという。F が X の各点で下半連続である時，単に F は下半連続であるという。

(P. 1)　$0 \in \bigcap\{Y_j(x, y_{)j(}): (x, y_{)j(}) \in R^{l(m+n-1)}\}$,

(P. 2)　Y_j は $R^{l(m+n-1)}$ から R^l への閉かつ下半連続な点対集合写像である，

(P. 3)　すべての $(x, y_{)j(}) \in R^{l(m+n-1)}$ に対して $Y_j(x, y_{)j(})$ は凸である，

(P. 4)　集合 $\{y \in R^{ln}: (x, y) \in D$ for some $x \in R^{lm}\}$ の漸近錐に属し $y_J \geqq 0$ であるすべての y に対して $y=0$ となる，(5)

と仮定すれば，少なくとも1つの均衡が存在する。

(C. 1) と (C. 2) は外部性が存在しない場合の消費集合が閉凸集合であるという仮定に対応する。(C. 3) は各消費者はいかなる情況の下でも彼の初期保有資源から各財の正の量を差し引いても生存し得ることを意味する。換言すれば，各消費者の初期保有資源は最低生存水準を常に超えていることを意味している。この仮定はかなり制限的であるので，これを緩和することを後に考える。

(C. 4) は可能な消費の集合は常に下方に有界であり，その下界は情況に依存せずに確定することを意味する。

(T. 1) は選好関係の連続性，(T. 2) は選好関係の消費者自身の消費に関する凸性，(T. 3) は選好の非飽和性を意味する。

(P. 1) は各生産者は常に生産活動を停止することができることを意味する。

(P. 2) と (P. 3) は外部性が存在しない場合の生産集合が閉凸集合であるという仮定に対応する。特に (P. 3) は (P. 1) と共に各生産者は彼の私的観点からは収穫逓減に服して操業していることを意味する。しかし社会全体の観点から見れば，外部性に基づく収穫逓増が発生しているかもしれないのであり，この可能性はわれわれの仮定によって排除されてはいない。この現象は Marshall〔6〕が収穫逓増の分析において考察したものに類似している。従って，これをマーシャル的外部性と呼ぶことができるであろう。

(P. 4) は無制限に大規模な生産過程は不可逆であり，無制限に大規模な自由生産（何も投入しないで産出物が生ずること）は不可能であることを意味している。

定理1はこれらの仮定を満足する経済は均衡点を持つことを主張している。この定理は Debreu〔4〕が外部性のない経済に対して証明したものの自然な拡張であり，次節の議論で明らかになるように彼の証明の手法を殆どそのまま利用して証明され得る。

先に注意したように，仮定 (C. 3) は不自然であるが，これを緩和することはあまり容易ではない。1つの方法は次に示すように非飽和の仮定 (T. 3) を強化することである。

注(5)　R^{ln} の点 y が与えられた時，その Euclid ノルムを $\|y\|$ によって表わす。R^{ln} の任意の部分集合 S と任意の非負の実数 k に対して $S^k \equiv \{y \in S: \|y\| \geqq k\}$, $P(S^k) \equiv \{y \in R^{ln}: y=\lambda z$ for some $\lambda \geqq 0$ and some $z \in S^k\}$ とおき，$\Gamma(S^k)$ を $P(S^k)$ の閉包とする。この時，$A(S) \equiv \bigcap\{\Gamma(S^k): k \geqq 0\}$ を S の漸近錐と呼ぶ。

定理2　定理1の仮定 (C. 3) と (T. 3) を

(C. 3′)　すべての $(x, y) \in R^{l(m+n)}$ に対して $x^0 \in \Pi_{i \in I} X_i(x_{)i(}, y)$ が存在して，$x_I{}^0 < \omega_I$ かつすべての $i \in I$ に対して $x_i{}^0 \leqq \omega_i$ となる，

(T. 3′)　すべての $(x_{)i(}, y) \in R^{l(m-1+n)}$，すべての $x_i' \in X_i(x_{)i(}, y)$，すべての $h \in H$ に対して，$((x_i(\lambda, h), x_{)i(}), y) \succ_i ((x_i', x_{)i(}), y)$ かつ $x_i(\lambda, h) \in X_i(x_{)i(}, y)$ となるような正の実数 λ が存在する，ただし $x_i(\lambda, h) \equiv (x_i{}^1, \cdots, x_i{}^{h-1}, x_i{}^h+\lambda, x_i{}^{h+1}, \cdots, x_i{}^l)$,

で置き換えても均衡は存在する。

(C. 3′) は各消費者の初期保有資源が少なくとも1つの財について厳密に最低生存水準を超過していることを要求し，各財についてそのことを要求してはいないという点で (C. 3) より弱い。しかし，この場合でも社会全体として見れば各財の初期賦存量は全消費者を生存させ得る最小量を厳密に超過することが要求されるのである。

(T. 3′) は (T. 2) と共に各消費者の選好関係は単調である，すなわち，いかなる財も少ないより多い方が望ましいということを意味する。この定理は第3節で Nikaido〔8〕によって用いられた手法を用いて証明される。

仮定 (C. 3) を緩和する他の1つの方法は，Arrow-Hahn〔2〕によって開発された。彼等の方法は外部性がない場合については成功しているが，外部性が存在する場合，(P. 4) の恣意的な強化を要求しており，満足できるものではない。ただし，彼等の手法を改良して (C. 3) を弱め，均衡点の存在定理を更に満足なものにすることは可能であるかもしれず，この問題は未解決のものとして残されている。

最後に，われわれのモデルを更に拡張して消費者選好が価格に直接依存するような場合，すなわち Veblen 効果の可能性を考慮することは容易であることに注意しておく。

2.　定理1の証明

各 $i \in I$ に対して

$$L_i \equiv \{x_i \in R^l: a_i \leqq x_i \leqq \omega_i\},$$

$$L \equiv \Pi_{i \in I} L_i$$

とおく。(C. 3) と (C. 4) により各 L_i 従ってまた L は非空である。

補助定理1　A は非空かつ有界である。

証明　各 $i \in I$，各 $x_{)i(} \in R^{l(m-1)}$ に対して

$$G_i(x_{)i(}) \equiv L_i \cap X_i(x_{)i(}, 0),$$

各 $x \in L$ に対して

$$G(x) \equiv \Pi_{i \in I} G_i(x_{)i(})$$

とおく。各 $i \in I$, 各 $x_{)i(} \in R^{l(m-1)}$ に対して $G_i(x_{)i(})$ は (C.3) と (C.4) により非空，更に (C.2) により凸だから，各 $x \in L$ に対して $G(x)$ は非空かつ凸である。各 ν に対して $z^\nu \in G(x^\nu)$ となり $x^\nu \to x^0 \in L$, $z^\nu \to z^0 \in L$ となるような L 内の2つの点列 $\{x^\nu\}$ と $\{z^\nu\}$ を考えれば，各 $i \in I$ に対して $z_i^\nu \in G_i(x_{)i(}^\nu) = L_i \cap X_i(x_{)i(}^\nu, 0)$ がすべての ν に対して成り立ち，従って (C.1) により $z_i^0 \in G_i(x_{)i(}^0)$ となるから，$z^0 \in G(x^0)$ である。故に G は非空な凸コンパクト集合 L から L への点対集合閉写像である。従って，角谷の不動点定理により $x^* \in G(x^*)$ となる $x^* \in L$ が存在する。(6) $(x^*, 0) \in D$ かつ $x_I^* \leqq \omega_I$ だから $(x^*, 0) \in A$ となる。故に A は非空である。

$$X \equiv \{x \in R^{lm}: (x, y) \in D \text{ for some } y \in R^{ln}\},$$

$$a \equiv (a_1, \cdots, a_m)$$

とおく。$x \in X$ とすれば X の定義により $(x, y) \in D$ となる $y \in R^{ln}$ が存在する。各 $i \in I$ に対して $x_i \in X_i(x_{)i(}, y)$ だから (C.4) により $a_i \leqq x_i$, 従って $a_i \leqq x$ である。故に X は下方に有界である。故に (P.4) により A は有界である (Osana〔9, Theorem 1〕を参照)。　(証了)

補助定理1により，

$$A \subset \text{int}\, K^{m+n},$$

$$L \subset \text{int}\, K^m$$

となるような0を中心とする R^l の閉立方体 K が存在する。(7)

補助定理2　(i)　各 $i \in I$ に対して，$X_i'(x_{)i(}, y) \equiv X_i(x_{)i(}, y) \cap K$ によって定義される $R^{l(m-1+n)}$ から R^l への点対集合写像 X_i' は連続である。(8)

(ii)　各 $j \in J$ に対して，$Y_j'(x, y_{)j(}) \equiv Y_j(x, y_{)j(}) \cap K$ によって定義される $R^{l(m+n-1)}$ から R^l への点対集合写像 Y_j' は連続である。

証明　(i)　明らかに K はコンパクトだから

$$F(x_{)i(}, y) \equiv K$$

によって定義される $R^{l(m+n-1)}$ から R^l への点対集合写像は上半連続である。閉写像と上半連続写像の共通部分は上半連続である (Berge〔3, Theorem 7 of VI. 1〕を参照) から，X_i' は上半連続である。

$(x_{)i(}^0, y^0)$ を $R^{l(m-1+n)}$ の任意の点，G を $X_i'(x_{)i(}^0, y^0) \cap G \neq \phi$ となる R^l の任意の開集合とする。

注(6)　Kakutani〔5〕を参照。

(7)　int K^{m+n} は集合 K^{m+n} の $R^{l(m+n)}$ における開核を，int K^m は K^m の R^{lm} における開核を表わす。

(8)　位相空間 X から位相空間 Y への点対集合写像 F が与えられた時，$F(x^0) \subset G$ となる Y の任意の開集合 G に対して，$x \in U(x^0)$ ならば常に $F(x) \subset G$ となるような x^0 の近傍 $U(x^0)$ が存在する時，F は $x^0 \in X$ において上半連続であるという。F が X の各点で上半連続であり，各 $x \in X$ に対して $F(x)$ がコンパクトである時，単に F は上半連続であるという。F が $x^0 \in X$ で上半連続であると同時に下半連続である時，$x^0 \in X$ において連続であるといい，F が上半連続かつ下半連続である時，連続であるという。

故に $x_i^1 \in X_i(x_{)i(}^0, y^0) \cap K \cap G$ が存在する。(C.3) と (C.4) により $X_i(x_{)i(}^0, y^0) \cap \text{int}\, L_i \neq \phi$ だから $x_i^2 \in X_i(x_{)i(}^0, y^0) \cap \text{int}\, L_i$ が存在する。$x_i(t) \equiv (1-t)x_i^1 + tx_i^2$ とおく。(C.2) により各 $t \in [0, 1]$ に対して $x_i(t) \in X_i(x_{)i(}^0, y^0)$ となり，0に十分近い $t \in [0, 1]$ に対して $x_i(t) \in G$ となる。更に $x_i^2 \in \text{int}\, L_i \subset \text{int}\, K$ だから，各 $t \in]0, 1]$ に対して $x_i(t) \in \text{int}\, K$ となる (Nikaido [8, Theorem 2.6 (ii)] を参照)。故に0に十分近い $t \in]0, 1]$ に対して $x_i(t) \in X_i(x_{)i(}, y^0) \cap (G \cap \text{int}\, K)$ となる。$C \equiv G \cap \text{int}\, K$ とおけば C は R^l の開集合であり $X_i(x_{)i(}^0, y^0) \cap C \neq \phi$ である。(C.1) により X_i は下半連続だから，すべての $(x_{)i(}, y) \in U$ に対して $\phi \neq X_i(x_{)i(}, y) \cap C \subset X_i'(x_{)i(}, y) \cap G$ となる $(x_{)i(}^0, y^0)$ の近傍 U が存在する。従って，X_i' は $(x_{)i(}^0, y^0)$ において下半連続である。$(x_{)i(}^0, y^0)$ は任意だから X_i' は下半連続であり，結局，連続である。

(ii)　X_i' の連続性の証明と同様である。(i)の証明で用いた x_i^2 の代りに0を用いればよい。(証了)

各生産者 j に対して供給函数と利潤函数を次のように定義する。

$$\eta_j(x, y_{)j(}, p) \equiv \{y_j^* \in Y_j'(x, y_{)j(}): p \cdot y_j^* \geqq p \cdot y_j \text{ for every } y_j \in Y_j'(x, y_{)j(})\}.$$

$$\pi_j(x, y_{)j(}, p) \equiv \max p \cdot Y_j'(x, y_{)j(}).$$

補助定理3　各 $j \in J$ に対して，$R^{l(m+n)}$ から R への写像 π_j は連続であり，$R^{l(m+1)}$ から R^l への点対集合写像 η_j は連続であり，すべての $(x, y_{)j(}, p) \in R^{l(m+n)}$ に対して $\eta_j(x, y_{)j(}, p)$ は非空かつ凸である。

証明

$$f(x, y_{)j(}, p, y_j) \equiv p \cdot y_j,$$

$$F(x, y_{)j(}, p) \equiv Y_j'(x, y_{)j(})$$

とおく。f は明らかに連続であり，F は補助定理2により連続である。故に Berge の最大値の定理 (Berge〔3, VI, 3〕を参照) により π_j は連続，η_j は上半連続である。(P.1) により，各 $(x, y_{)j(}) \in R^{l(m+n-1)}$ に対して $Y_j'(x, y_{)j(})$ は非空であり，補助定理2により Y_j' は連続だから，各 $(x, y_{)j(}) \in R^{l(m+n-1)}$ に対して $Y_j'(x, y_{)j(})$ は非空かつコンパクトである。故に f の連続性により，各 $(x, y_{)j(}, p) \in R^{l(m+n)}$ に対して $\eta_j(x, y_{)j(}, p)$ は非空である。他方，f は線形であり，K は凸だから，(C.2) により，各 $(x, y_{)j(}, p) \in R^{l(m+n)}$ に対して $\eta_j(x, y_{)j(}, p)$ は凸集合になることが容易にわかる。

(証了)

以下では価格としては基本単体

$$P \equiv \{p \in R^l: p \geqq 0 \text{ and } \textstyle\sum_{h \in H} p_h = 1\}$$

に属するものだけを考える。各消費者 i に対して次の予算制約を考える。

$$\gamma_i(x, y, p) \equiv \{x_i' \in X_i'(x_{)i(}, y): p \cdot x_i' \leqq p \cdot \omega_i + \theta_i \cdot \pi(x, y, p)\},$$

ただし

$$\pi(x, y, p) \equiv (\pi_1(x, y_{)1(}, p), \cdots, \pi_n(x, y_{)n(}, p))$$

である。

補助定理4　各 $i \in I$ に対して，$R^{l(m+n)} \times P$ から R^l への点対集合写像 γ_i は連続である。

証明　$W_i(x, y, p)\equiv\{x_i'\in R^l:\ p\cdot x_i'\leqq p\cdot\omega_i+\theta_i\cdot\pi(x, y, p)\}$

とおく。補助定理3によりπは連続だから$R^{l(m+n)}\times P$からR^lへの点対集合写像W_iは閉写像である。

$$F_i(x, y, p)\equiv X_i'(x_{\backslash i}, y)$$

とおけば，補助定理2により$R^{l(m+n)}\times P$からR^lへの点対集合写像F_iは上半連続である。$\gamma_i(x, y, p)=W_i(x, y, p)\cap F_i(x, y, p)$ だから，γ_iは上半連続である。

(x^0, y^0, p^0) を $R^{l(m+n)}\times P$ の任意の点，Gを $G\cap\gamma_i(x^0, y^0, p^0)\neq\phi$ となるR^lの任意の開集合とする。この時，$x_i^1\in G\cap W_i(x^0, y^0, p^0)\cap F_i(x^0, y^0, p^0)$ が存在する。他方 (C.3) と (C.4) により $a_i\leqq x_i^2<\omega_i$ となる $x_i^2\in X_i'(x_{\backslash i}^0, y^0)\equiv F_i(x^0, y^0, p^0)$ が存在する。(P.1) により $\pi(x^0, y^0, p^0)\geqq 0$ だから，$x_i^2\in F_i(x^0, y^0, p^0)\cap\operatorname{int}W_i(x^0, y^0, p^0)$ である。ここで$x_i(t)\equiv tx_i^1+(1-t)x_i^2$ とおく。Kは凸だから，(C.2) により $F_i(x^0, y^0, p^0)$ は凸である。故に各 $t\in[0, 1]$ に対して $x_i(t)\in F_i(x^0, y^0, p^0)$ である。明らかに $W_i(x^0, y^0, p^0)$ は凸だから，各 $t\in[0, 1[$ に対して $x_i(t)\in\operatorname{int}W_i(x^0, y^0, p^0)$ となる。更にGは開集合だから，1に十分近い $t\in[0, 1]$ に対して $x_i(t)\in G$ である。従って，$G\cap\operatorname{int}W_i(x^0, y^0, p^0)\cap F_i(x^0, y^0, p^0)\neq\phi$ となる。

$C\equiv G\cap\operatorname{int}W_i(x^0, y^0, p^0)$ とおけば，CはR^lの開集合であり $F_i(x^0, y^0, p^0)\cap C\neq\phi$ である。故に $x_i^2\in F_i(x^0, y^0, p^0)\cap C$ が存在する。Cは開集合だから，$U(x_i^2;\ \delta)\subset C$ となる $\delta>0$ が存在する。ただし $U(x_i^2;\ \delta)$ は x_i^2 の δ-近傍である。故に $U(x_i^2;\ \delta)\subset\operatorname{int}W_i(x^0, y^0, p^0)$ となる。

$$f(x, y, p, x_i')\equiv p\cdot\omega_i+\theta_i\cdot\pi(x, y, p)-p\cdot x_i'$$

とおけばfは $R^{l(m+n)}\times P\times R^l$ の上で連続である。$x_i^2\in\operatorname{int}M$ となるような $U(x_i^2;\ \delta)$ のコンパクトな部分集合Mが存在する。従って $R^{l(m+n)}\times P$ からRへの写像gを

$$g(x, y, p)\equiv\min f(x, y, p, M)$$

によって定義することができる。Berge の最大値の定理によりgは連続である。$g(x^0, y^0, p^0)>0$ だから，すべての $(x, y, p)\in V_1(x^0, y^0, p^0)$ に対して $g(x, y, p)>0$ すなわち $M\subset\operatorname{int}W_i(x, y, p)$ となる (x^0, y^0, p^0) の近傍 $V_1(x^0, y^0, p^0)$ が存在する。他方，$F_i(x^0, y^0, p^0)\cap\operatorname{int}M\neq\phi$ であり，補助定理2によりF_iは下半連続だから，すべての$(x, y, p)\in V_2(x^0, x^0, p^0)$に対して$F_i(x, y, p)\cap\operatorname{int}M\neq\phi$ となる (x^0, y^0, p^0) の近傍 $V_2(x^0, y^0, p^0)$ が存在する。故にすべての $(x, y, p)\in V_1(x^0, y^0, p^0)\cap V_2(x^0, y^0, p)$ に対して $W_i(x, y, p)\cap F_i(x, y, p)\cap\operatorname{int}M\neq\phi$ 従って $G\cap\gamma_i(x, y, p)\neq\phi$ となる。故に γ_i は (x^0, y^0, p^0) において下半連続である。(x^0, y^0, p^0) は任意だからγ_iは下半連続，従って連続である。（証了）

各消費者iに対して需要函数を次のように定義する。

$$\xi_i(x, y, p)\equiv\{x_i^*\in\gamma_i(x, y, p):\ ((x_i^*, x_{\backslash i}), y)\succsim_i((x_i', x_{\backslash i}), y)\ \text{for every}\ x_i'\in\gamma_i(x, y, p)\}.$$

補助定理5　各 $i\in I$ に対して $R^{l(m+n)}\times P$ からR^lへの点対集合写像ξ_iは上半連続であり，すべての $(x, y, p)\in R^{l(m+n)}\times P$ に対して $\xi_i(x, y, p)$ は非空かつ凸である。

証明　$R^{l(m+n)}$ は連結だから，(T.1) により $R^{l(m+n)}$ 上の連続な効用函数u_iが存在する（Debreu〔4, (1) of 4.6〕を参照)。

$$u_i'(x, y, p, x_i)\equiv u_i(x, y)$$

とおく。ただし，u_i'はxの中の成分x_iからは独立であると考える。u_i'は$R^{l(m+n)}\times P\times R^n$上で連続である。補助定理4により，$\gamma_i$は連続だから，(C.3)，(C.4)，(P.1)により，すべての$(x, y, p)\in R^{l(m+n)}\times P$ に対して $\gamma_i(x, y, p)$ は非空かつコンパクトである。故に $R^{l(m+n)}\times P$ 上の実数値函数v_iを

$$v_i(x, y, p)\equiv\max\{u_i'(x, y, p, x_i'):\ x_i'\in\gamma_i(x, y, p)\}$$

によって定義することができる。この時，$\xi_i(x, y, p)=\{x_i^*\in\gamma_i(x, y, p):\ u_i'(x, y, p, x_i)=v_i(x, y, p)\}$ となるから Berge の最大値の定理により，ξ_iは上半連続である。上に見たように，各 $(x, y, p)\in R^{l(m+n)}\times P$ に対して $\gamma_i(x, y, p)$ は非空かつコンパクトだから，u_i'の連続性により，各 $(x, y, p)\in R^{l(m+n)}\times P$ に対して，$\xi_i(x, y, p)$ は非空である。$\xi_i(x, y, p)$ の凸性はKの凸性，(C.2)，(T.1)，および (T.2) から導かれる。（証了）

補助定理6　各 $i\in I$，各 $(x, y, p)\in R^{l(m+n)}\times P$ に対して，$x_i'\in\xi_i(x, y, p)$ であれば$p\cdot x_i'=p\cdot\omega_i+\theta_i\cdot\pi(x, y, p)$ となる。

証明　$w_i=p\cdot\omega_i+\theta_i\cdot\pi(x, y, p)$ とおく。$x_i'\in\xi_i(x, y, p)$ だから明らかに $p\cdot x_i'\leqq w_i$ となる。他方，ξ_iの定義により，$x_i\in X_i'(x_{\backslash i}, y)$ かつ $p\cdot x_i\leqq w_i$ であれば $((x_i, x_{\backslash i}), y)\precsim_i((x_i', x_{\backslash i}), y)$ となる。換言すれば，$x_i\in X_i'(x_{\backslash i}, y)$ かつ $((x_i, x_{\backslash i}), y)\succ_i((x_i', x_{\backslash i}), y)$ であれば $p\cdot x_i>w_i$ となる。(T.3) により，このことから，$x_i\in X_i'(x_{\backslash i}, y)$ かつ $((x_i, x_{\backslash i}), y)\succsim_i((x_i', x_{\backslash i}), y)$ であれば$p\cdot x_i\geqq w_i$ となる（Debreu〔4, (2) of 4.9〕を参照)。明らかに $x_i'\in X_i'(x_{\backslash i}, y)$ かつ $((x_i', x_{\backslash i}), y)\succsim_i((x_i', x_{\backslash i}), y)$ だから $p\cdot x_i'\geqq w_i$ となる。故に $p\cdot x_i'=w_i$ である。（証了）

各 $(x, y)\in K^{m+n}$ に対して，

$$\mu(x, y)\equiv\{p\in P:\ p\cdot(x_I-y_J-\omega_I)\geqq q\cdot(x_I-y_J-\omega_I)\ \text{for every}\ q\in P\}$$

とおけば，K^{m+n}からPへの点対集合写像μは上半連続であり，各 $(x, y)\in K^{m+n}$ に対して$\mu(x, y)$は非空かつ凸である。$K^{m+n}\times P$ からそれ自身への点対集合写像Fを

$$F(x, y, p)\equiv(\Pi_{i\in I}\xi_i(x, y, p))\times(\Pi_{j\in J}\eta_j(x, y_{\backslash j}, p))\times\eta(x, y)$$

によって定義する。補助定理3と5によりFは上半連続であり（Berge〔3, Theorem 4′ of VI, 2〕を参照)，各 $(x, y, p)\in K^{m+n}\times P$ に対して $F(x, y, p)$ は非空かつ凸である。$K^{m+n}\times P$ は明らかに非空，凸，コンパクトだから，角谷の不動点定理により $(x^*, y^*, p^*)\in F(x^*, y^*, p^*)$ となる $(x^*, y^*, p^*)\in K^{m+n}\times P$ が存在する。

各 $i\in I$ に対して，$x_i^*\in\xi_i(x^*, y^*, p^*)$ だから補助定理6により $p^*\cdot x_i^*=p^*\cdot\omega_i+\theta_i\cdot(p^*, y^*)$ である。従って，$p^*\cdot(x_I^*-y_J^*-\omega_I)=0$ となる。$p^*\in\mu(x^*, y^*)$ だから $p^*\cdot(x_I^*-y_J^*-\omega_I)\geqq p\cdot(x_I^*-y_J^*$

$-\omega_I)$ がすべての $p \in P$ に対して成立する。故に各 $p \in P$ に対して $p \cdot (x_I^* - y_J^* - \omega_I) \leqq 0$ となるから，$x_I^* - y_J^* - \omega_I \leqq 0$ である。他方，$(x^*, y^*) \in (\Pi_{i \in I} \xi_i(x^*, y^*, p^*)) \times (\Pi_{j \in J} \eta_j(x^*, y_{)j(}^*, p^*))$ だから明らかに $(x^*, y^*) \in D$，故に $(x^*, y^*) \in A$ である。従って，均衡の定義の条件(i)は満たされる。

条件(ii)が成立しなかったとする。ある $i \in I$ に対して，$p^* \cdot x_i' \leqq p^* \cdot \omega_i + \theta_i \cdot (p^* \cdot y^*)$ かつ $((x_i', x_{)i(}^*), y^*) \succ_i ((x_i^*, x_{)i(}^*), y^*)$ となる $x_i' \in X_i(x_{)i(}^*, y^*)$ が存在する。各 $t \in]0, 1[$ に対して $x_i(t) = (1-t)x_i^* + tx_i'$ とおけば，明らかに，各 $t \in]0, 1[$ に対して $p^* \cdot x_i(t) \leqq p^* \cdot \omega_i + \theta_i \cdot (p^* \cdot y^*)$ であり，他方 (T. 2) により $((x_i(t), x_{)i(}^*), y^*) \succ_i (x^*, y^*)$ となる。ところが $x_i^* \in \operatorname{int} K$ だから，0に十分近い $t \in]0, 1[$ に対して $x_i(t) \in X_i'(x_{)i(}^*, y^*)$ となる。これは $x_i^* \in \xi_i(x^*, y^*, p^*)$ であるという事実に反する。故に条件(ii)が成立する。

同様の議論により条件(iii)が成立することを見ることができる。かくして (x^*, y^*, p^*) は実際に均衡であることがわかった。これで定理1の証明は完結した。

3. 定理2の証明

各 $i \in I$ に対して，

$$Q_i \equiv \{(x, y, p) \in K^{m+n} \times P:\ w_i(x, y, p) > \min p \cdot X_i'(x_{)i(}, y)\},$$

ただし，

$$w_i(x, y, p) \equiv p \cdot \omega_i + \theta_i \cdot \pi(x, y, p)$$

とおく。更に

$$P^0 \equiv \{p \in P:\ p > 0\}$$

とおく。(C. 3′) により，補助定理4の証明の中の議論と同様にして $K^{m+n} \times P^0 \subset Q_i$ がすべての $i \in I$ に対して成り立つことを示すことができる。補助定理5の証明により，各 $i \in I$ に対して ξ_i は Q_i の上で上半連続であり，すべての $(x, y, p) \in Q_i$ に対して $\xi_i(x, y, p)$ は非空かつ凸である。$K^{m+n} \times P^0$ は $K^{m+n} \times P$ で稠密だから，各 $i \in I$ に対して Q_i は $K^{m+n} \times P$ で稠密である。故に，各 $i \in I$ に対して，Q_i から K への点対集合写像 ξ_i は $K^{m+n} \times P$ から K への上半連続な点対集合写像 ξ_i' に拡張され得る (Nikaido〔8, Lemma 4.4 and Theorem 4.7〕を参照)。各 $i \in I$，各 $(x, y, p) \in K^{m+n} \times P$ に対して $\xi_i''(x, y, p)$ を $\xi_i'(x, y, p)$ の凸包とすれば，$K^{m+n} \times P$ から K への点対集合写像 ξ_i'' は上半連続であり，各 $(x, y, p) \in K^{m+n} \times P$ に対して $\xi_i''(x, y, p)$ は非空かつ凸である (Nikaido〔8, Theorem 4.8〕を参照)。

$$F'(x, y, p) \equiv (\Pi_{i \in I} \xi_i''(x, y, p)) \times (\Pi_{j \in J} \eta_j(x, y_{)j(}, p)) \times \mu(x, y)$$

によって定義される $K^{m+n} \times P$ から，それ自身への点対集合写像 F' は角谷の不動点定理により不動点 (x^*, y^*, p^*) を持つ。

(C. 3′) により $\sum_{i \in I} w_i(x^*, y^*, p^*) = p^* \cdot \omega_I + p^* \cdot \sum_{j \in J} \pi_j(x^*, y^*, p^*) \geqq p^* \cdot \omega_I > p^* \cdot x_I^0$ となる $x^0 \in \Pi_{i \in I} X_i(x_{)i(}^*, y^*)$ が存在する。故に $w_k(x^*, y^*, p^*) > p^* \cdot x_k^0$ となる $k \in I$ が存在する。(C. 4) と K の選択により，$x_k^0 \in K$ だから $w_k(x^*, y^*, p^*) > \min p^* \cdot X_k'(x_{)k(}^*, y^*)$ すなわち $(x^*, y^*, p^*) \in Q_k$ となる。ξ_k'' は Q_k から K への点対集合写像 ξ_k の $K^{m+n} \times P$ への拡張 ξ_k' の凸包であり，すべての $(x, y, p) \in Q_k$ に対して $\xi_k(x, y, p)$ は凸だから，ξ_k と ξ_k'' は Q_k の上では一致する。故に $x_k^* \in \xi_k(x^*, y^*, p^*)$ である。

ここで $p_h^* = 0$ となる $h \in H$ が存在したとする。(T. 3′) により，$x_k(\lambda, h) \in X_k(x_{)k(}^*, y^*)$ かつ $((x_k(\lambda, h), x_{)k(}^*), y^*) \succ_k (x^*, y^*)$ となる正の実数 λ が存在する。$x_k(t) \equiv (1-t)x_k^* + tx_k(\lambda, h)$ とおくと，(T. 2) により，すべての $t \in]0, 1[$ により $((x_k(t), x_{)k(}^*), y^*) \succ_k (x^*, y^*)$ であり，また明らかに $p^* \cdot x_k(t) \leqq p^* \cdot \omega_k + \theta_k \cdot (p^* \cdot y^*)$ となる。ところが $x_k^* \in \operatorname{int} K$ だから，0に十分近い $t \in]0, 1[$ に対して $x_k(t) \in X_k'(x_{)k(}^*, y^*)$ となる。これは $x_k^* \in \xi_k(x^*, y^*, p^*)$ という事実に反する。故に $p^* > 0$ である。

従って，すべての $i \in I$ に対して $(x^*, y^*, p^*) \in K^{m+n} \times P^0 \subset Q_i$ となり，結局 $x^* \in \Pi_{i \in I} \xi_i(x^*, y^*, p^*)$ であることがわかった。この後は定理1の証明と全く同じである。（証了）

引用文献

〔1〕 Arrow, K. J. and Debreu, G., "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 22 (1954).

〔2〕 Arrow, K. J. and Hahn, F. H., *General Competitive Analysis*, Holden-Day (1971).

〔3〕 Berge, C., *Topological Spaces*, Macmillan (1963).

〔4〕 Debreu, G., *Theory of Value*, John Wiley and Sons (1959).

〔5〕 Kakutani, S., "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem," *Duke Mathematical Journal*, 8 (1941).

〔6〕 Marshall, A., *Principles of Economics*, 8th ed., Macmillan (1920).

〔7〕 McKenzie, L. W., "Competitive Equilibrium with Dependent Consumer Preferences," in H. A. Antosiewicz, ed., *Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*, National Bureau of Standards (1955).

〔8〕 Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press (1968).

〔9〕 Osana, H., "On the Boundedness of an Economy with Externalities, *Review of Economic Studies*, 40 (1973).

（経済学部助教授）