Negishi, T., "Dynamics of the Public Expenditure in a Two-Party System," *Zeitschrift für Nationalökonomie*, No. 3-4, 1971.

Niemi, R. G., and Weisberg, H. F. (eds.), *Probability Models of Collective Decision Making*, 1972.

Olson, M., *The Logic of Collective Action*, 1965.

Peston, M., *Public Goods and the Public Sector*, 1972.

Riker, H. and Ordeshook, P. C., *An Introduction to Positive Political Theory*, 1972.

Samuelson, P. A., "The Pure Theory of Public Expenditure," *R. E. and S.*, Nov., 1954.

———, "Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure," *R. E. and S.*, Nov., 1955.

———, "Aspects of Public Expenditure Theories," *R. E. and S.*, Nov., 1958.

———, "Public Goods and Subscription TV: Correction of the Record," *J. L. E.*, 1964.

———, "Pitfalls in the Analysis of Public Goods," *J. L. E.*, 1967.

———, "Contrast Between Welfare Conditions for Joint Supply and for Public Goods," *R. E. and S.*, Feb., 1969(a).

———, "Pure Theory of Public Expenditures and Taxation," in Margolis and Guitton (eds.), *Public Economics*, 1969(b).

関谷登『市場機構と政治機構』三田学会雑誌 June, 1973.

Shoup, C. S., "Public Goods and Joint Production," *Rivista internazionale di scinze economiche e commerciali*, Mar., 1965.

Shoup, C., *Public Finance*, 1969.

Steiner, P. O., "The Public Sector and the Public Interest," in *PPBS Compendium of Papers*, 1969.

Tanzi, V., "A Note on Exclusion, Pure Public Goods, and Pareto Optimality," *P. F.*, No. 1, 1972.

Thompson, E. A., "The Perfectly Competitive Production of Collective Goods," *R. E. and S.*, Feb., 1968.

Tuite, and Radner, (eds.) *Inter Organizational Decision Making*, 1972.

Tullock, G., *The Politics of Bureaucracy*, 1965.

———, *Toward a Mathematics of Politics*, 1967.

———, "Public Decision as Public Goods," *J. P. E.*, July/Aug., 1971.

———, *Private Wants, Public Means*, 1971.

Weisbrod, B. A., "Collective-Consumption Services of Individual-Consumption Goods," *Q. J. E.*, Aug., 1964.

Weldon J. C., "Public Goods (and Federalism)," *C. J. E.*, May, 1966.

Wicksell, K., "A New Principle of Just Taxation," in Musgrave. R. and Peacock A. (eds.), *Classics in the Theory of Public Finance*, 1958.

Zeckhauser, R., "Uncertainty and the Need for Collective Action," in *PPBS Compendium of Papers*, 1969.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程）

計画問題における影の価格とその計算可能性について（その1）*

細　野　助　博

「……一般の獣のほかに，……力の強いしかも危険な獣の狩猟に成果をあげていたことが真実であるとすれば，それはまえもって一群の狩人たちが方針をとりきめてから行ったからに違いない。事前に計画を立てるためには，言語を用いる必要があったはずである。」J. Monod

『必然と偶然』

はじめに

経済問題に数理計画法を適用して考察する場合の典型例は，経済計画(Economic Planning)に見出される。あるいは経済体制論的な議論からは，計画経済（Planned Economy）の効率性について数理計画法が云々される。そして一般的には後者の議論が有名でもある。(1) 今，その議論を要約するならば，

生産要素を国有化したような経済社会では，

Ⓐ生産要素に対する「市場」が消滅する為に，合理的な「経済計算」（Wirtschaftsrechnung）の根拠となる「生産要素価格」が設定不可能になる。

Ⓑしかも，「価格」が理論的に設定されるとしても，財の種類が多種多様にわたる現実の中で，財ごとに価格を付加して方程式体系を作っても，その方程式体系に解を持たせる，あるいはもっと要求を強くすれば，市場機構が約束する Parato 最適を満たす解を持たせるような機構は存在しない。

という主張と，

ﾌⒶ合理的な経済計算の根拠となる「価格」は，要素間の技術的代替率をもって「計算価格」として設定可能であり，

ﾌⒷ大規模方程式をすべて中央計画当局（Central Planning Boad: C.P.B.）が大型計算機を用いて解を求めるには限界があるが，解を実現させる機構を便法として持つことは可能である。

という主張に代表される。

本論の主題は，経済体制論的な接近というよりも，経済計画（それは体制を抽象化させた形で）における2つの key words について，考察して行こうとするものである。その key words とは，「影の価格」(shadow price) であり，「計算可能性」(Computability) である。この2つの key words はﾌⒶなりﾌⒷなりに関連している。

◎計画問題を

［ある制約条件が許す範囲で
　ある目的関数を最大化（最小化）する問題

として定義する。

◎影の価格を

［目的関数値と制約条件との対応で，制約条件の
　変更が目的関数値に与える変化値

として定義する。

◎計算可能性を

［有限回のある操作によって，目標値に到達可能
　であること

として定義する。

さて，本論での計画問題では簡単化の為の種々の限定を行なう必要があろう。

「限定条件1」

［期間は比較静学的な検討が十分可能なくらい短
　期である。

「限定条件2」

［貨幣のような自己増殖的な財の存在を排除する。
　これは「限定条件1」との関連で，どの財（自由
　財でなければ，財価格はゼロではないから）も基準財
　(numéraire) になりうる。

*）本論は主に生産計画を中心に話を展開している。

注(1)　この周辺の議論は次の著書及び論文参照。M. Dobb, *Welfare Economics and the Economics of Socialism*, 1969.（日本語訳『厚生経済学と社会主義経済学』昭48）。T. Marschak, 'Centralization and Decentralization in Economic Organization' *Econometrica*, Vol. 27, 1959.

「限定条件3」

行動主体として，指令する側の中央計画当局と指令される側の企業と消費者の三者とする。但し，消費者については明示的には議論しない。

「限定条件4」

経済環境は線型で，不確実性は存在しない。又，ある条件下では分割可能である。

「限定条件5」

想定する経済は閉鎖経済である。輸出入や貿易決済に言及しない。

「限定条件6」

想定する経済では，生産要素は殆んど国有化されているか，また私有化されている生産要素の価格はゼロ。あるプラントで私有する生産要素が他のプラントへ移動する場合は，国有化されたと同等の価格づけが行なわれる。

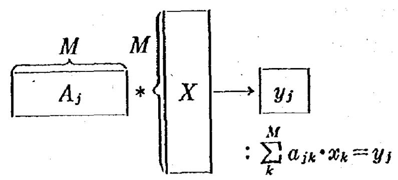
——なお，上記の限定を多少ゆるめた「計画問題」については後の機会を待ちたい。それでは経済環境の描写から入ってゆこう。

1.1 経済環境の描写(2)

$a_{\cdot k}$: k 番目の生産プロセス $a_{\cdot k}\in A$ $(k=1, \cdots, M)$

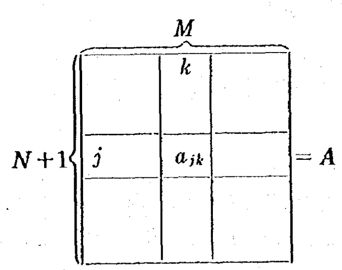
x_k: k 番目の生産プロセスの水準 $x_k\in X$ $(k=1, \cdots, M)$

y_j: j 番目の財の産出量 $y_j\in Y$ $(j=0, \cdots, N)$



$: \sum_{k}^{M} a_{jk}\cdot x_k=y_j$

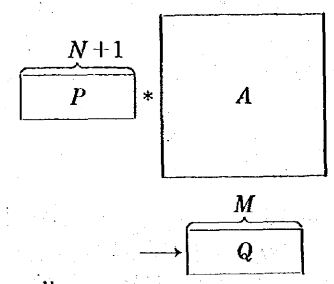
A: $((N+1)\times M)$ の技術係数行列



J: 財集合 $J_0\cup J_1$ $(0 : j-l)$ $\begin{cases} J_0\text{: 大局財} \\ J_1\text{: 個別財}\end{cases}$

p_j: j 番目の財の価格 $p_j\in P$ $(j=0, 1, \cdots, N)$

q_k: k 番目の生産プロセスが得られる利潤 $q_k\in Q$ $(k=1, \cdots, M)$



$: \sum_{j=0}^{N} p_j a_{jk}=q_k$ $(k=1, \cdots, M)$

r_j: n 番目の財が受けとるべき利潤

$r_j\in R$ $(j=0, 1, \cdots, N)$

今，経済環境を次のように描写する，

①生産活動は，ある指定された産出量を各々満足する。

$$AX\geqq \bar{Y}$$

②生産要素価格で各生産プロセスの利潤力を評価する。

$$PA=Q$$

③生産活動によって得られた利潤は生産要素間に配分しつくされる。

$$QX^*=-R\bar{Y}$$

$$y_i\begin{cases} >0 & \text{最終生産物} \\ =0 & \text{純中間財} \\ <0 & \text{本源的投入物}\end{cases}$$

X^* は QX を，$AX\geqq\bar{Y}$ を制約条件として極大化させる生産水準を示す。

④生産プロセスの単位当り利潤は，そのプロセスに投入された生産要素が得るべき利潤を越えない。

$$-RA\geqq Q$$

この①から④迄をブロック図で表現すると，(3)

$-R*A\geqq Q$ （④より）

$Q*X\leqq Q*X^*$ （③より）

$\leqq -R*\bar{Y}$ （〃）

一方，

$P*A=Q$ （②より）

$Q*X^*=-R*\bar{Y}$ （③より）

$Q*X^*\geqq Q*X$ （③より）

$-R*A\geqq P*A$ （②，④より）

$-R*A*X^*\geqq Q*X^*$

また，$R\geqq 0$ とすると，

$R*A*X^*\geqq R*\bar{Y}$ （①より）

$-R*A*X^*\leqq -R*\bar{Y}$

$Q*X^*\leqq -R*A*X^*\leqq -R*\bar{Y}$

$Q*X^*\leqq -R*\bar{Y}$

である。以上でブロック図の説明を終える。しかし，このブロック図には，この経済環境を構成する「人間活動」はない。只，議論の枠組を設定したのみである。この枠組の中を「人間活動」がどう流れてゆくのか，次に検討してみる。

1.2 計画問題の一般的議論(4)

さて，1.1で描写された枠組みを，ひとつの「目標追求型」(Goal Seeking) 経済として考えてゆく場合，そこに，目的関数が設定されていなければならない。この目的関数の設定に関する議論は本論では行なわない。この「目標追求型」経済では，

$$\left.\begin{array}{l} QX\to\text{Max!} \\ \text{S.T.} \\ -AX^*\leqq -\bar{Y}\quad X^*\geqq 0\end{array}\right\} \quad (1)$$

であり，

$$\left.\begin{array}{l} -R\bar{Y}\to\text{Min!} \\ \text{S.T.} \\ -RA\geqq Q\end{array}\right\} \quad (2)$$

が追求されるが，目的関数が，QX で与えられる場合と，$-R\bar{Y}$ で与えられる場合がある。又，枠組みが斉合性を有する為には，

$$QX^*=-R^*\bar{Y}=\text{Min}(-R\bar{Y}) \quad (3)$$

が成立しなければならない（③より）。すると，最適な活動水準 X^* が決定されると同時に，最適な利潤の配分が決定されることになる。これは「双対性」の議論として計画問題で取扱われている。(3)が成立するとは，1.1 で導いた，

$$-RAX^*\geqq RY \quad (4)$$

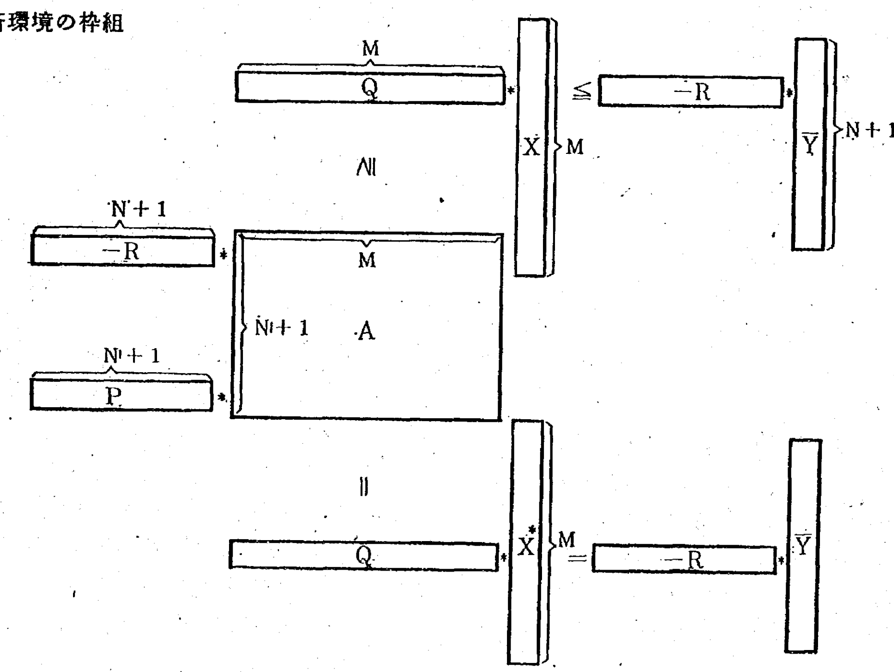
$$QX^*\leqq -RAX^* \quad (5)$$

の各々の不等式を成立させる要素を消去するような操作を行なえばよい。その操作は，

$$\Psi(R_0)\left\langle\begin{array}{l} \sum a_{ij}x_i^*>\bar{y}_j \\ \quad\Downarrow \\ r_j=0\quad(\forall j)\end{array}\right. \quad \text{(4)より}$$

$$\Psi(R_+)\left\langle\begin{array}{l} i=\{i\mid x_i^*>0\} \\ \quad\Downarrow \\ -\sum r_j^* a_{ji}=q_i\end{array}\right. \quad \text{(5)より}$$

経済環境の枠組



注(2) 大文字は，行列あるいは，ベクトルを表わす。

$$a_{\cdot k}\begin{cases} >0 & \text{産出係数} \\ =0 & \text{当該財は生産プロセス}k\text{に関係なし} \\ <0 & \text{投入係数}\end{cases}$$

$x_k\geqq 0$

(3) $*$は結合子である。$-RA\equiv -R*A$

注(4) 本論では縮退 (degeneration) は存在しない計画問題に限定している。

$-AX^*-R=\bar{Y}$ において，すべての $x^*\in X^*$ がゼロの場合，$ri=\bar{y}i$ $(ri\in R,\ \bar{y}i\in\bar{Y})$ となる。この ri が1個以上ゼロである場合の実行可能解〔定義 F〕は縮退していると呼ぶ。

と書けよう。$\Psi(\cdot)$ は操作関数を表わす。この操作関数の変数値は，R である。

このRは，計画問題では「影の価格」として働き，計画上の操作変数として働く。そして，この操作変数の各段階を S で表現すると，

$$\Psi^S(\cdot)$$

は S 段階での操作関数を表現する。又，計画問題の計算可能性とは，有限回の操作で $\Psi^S(\cdot)$ が最適解を保障してくれる場合をいう。

▶「双対性」について少し問題を掘り下げてみよう。というのは，大規模な枠組みを設定した計画問題で計算可能性を云々する場合には，この「双対性」がその便宜的能力を十分に発揮してくれるからである。今，原問題（Primal Program: P.P）を

$$(\mathrm{P.P})\left\langle\begin{array}{l} QX \rightarrow \mathrm{Max} \\ \mathrm{S.T.} \\ -AX=-\bar{Y} \\ \qquad X \geqq 0 \end{array}\right.$$

双対問題（Dual Program: D.P）を

$$(\mathrm{D.P})\left\langle\begin{array}{l} -R\bar{Y} \rightarrow \mathrm{Min!} \\ \mathrm{S.T.} \\ -RA \geqq Q \end{array}\right.$$

とする。(P.P) の制約式が等式，(D.P) の制約式を構成する $-R$ の符号条件が未定であることに注意。(P.P) の制約がきつくなったことによって，(D.P) の解が得やすくなっている。

〔定義F〕

線型計画法の実行可能解とは，

$$\left\langle\begin{array}{l} -AX=-\bar{Y} \\ \quad X \geqq 0 \end{array}\right.$$

を満足するベクトル，X をいう。

〔定義B〕

基底行列とは，制約行列の M 個の列からつくられる（$M \times M$）の正則行列をいう。

〔定義BS〕

線型計画法の基底解とは，基底行列を選び，これに含まれない A の列に対応した $N-M$ 個の変数を O とおき，残りの M 個の変数に対する正方正則な連立方程式の一意的なベクトルをいう。

〔定義FBS〕

実行可能基底解とは，すべての変数が非負の値の基底解をいう。

〔定義OS〕

最適解とは，〔定義FBS〕をみたし，かつ，$QX \rightarrow \mathrm{Max!}$ にする解をいう。

〔定義DF〕

双対実行可能解とは，(P.P) に対する，(D.P) の制約条件 $-RA \geqq Q$ を満足するベクトル，R をいう。以上の定義から，周知の「双対定理」が導びける。つまり，

〔定理-1〕

X^*, R^* を，(P.P) および (D.P) の実行可能解とすれば，

$$QX^* \leqq -RY$$

▷ $$X^* \geqq 0,\ -AX^*=-\bar{Y},\ -R^*A \geqq Q$$
$$R^*(-AX^*)=R^*(-\bar{Y})$$
$$-(R^*A)X^*=-R^*\bar{Y} \geqq QX^*$$ ◁

〔定理-2〕

(P.P) と (D.P) がともに実行可能解を持つならば，両方とも最適解をもち，かつ，両方の最適解は等しい。

$$QX^*=-R^*\bar{Y}$$

▷ (P.P) は上に有界，(D.P) は下に有界。ゆえに最適解有り。(P.P) は1つの最適基底解を持つから，基底解を X^0，最適基底行列を A^0，基底変数のベクトルを $X_A{}^0$ とすると，

$$-A^0X_A{}^0=-\bar{Y} \qquad X_A{}^0 \geqq O$$

A^0 に関するシンプレックス変数は

$$R^0=Q_A(-A^0)^{-1}$$

である。X^0 は最適解だとすると，

$$Q_k=Q_k+R^0A^0{}_k \leqq 0 \quad (\forall k)$$

となり，

$$-R^0A^0 \geqq Q$$

で $-R^0$ は (D.P) の制約式を満たし，

$$-R^0\bar{Y}=-Q_A(-A^0)^{-1}\bar{Y}=Q_AX_A{}^0$$ ◁

〔定理-3〕

(P.P) 又は (D.P) のどちらかが有界でない解を持つとき，もう一方は実行可能ではない。

▷省略 ◁

〔定理-4〕

(P.P) および (D.P) の実行可能解を，X^0, R^0 とすると，(X^0, R^0) が各々 (P.P) および (D.P) の最適解である為の必要十分条件は

$$(Q+R^0A)X^0=0$$

が成立すること。

▷

(P.P) のある実行可能解 $\bar{X}$ に対して，定義により，

$$-A\bar{X}=-\bar{Y}$$

両辺に $-\bar{R}$ をかけると

$$\bar{R}A\bar{X}=\bar{R}\bar{Y}$$
$$Q\bar{X}+\bar{R}A\bar{X}=Q\bar{X}+\bar{R}\bar{Y}$$

ところで，(X^0, R^0) が最適解であるならば，〔定理-2〕より，

$$\begin{aligned} 0 &= QX^c+R^0Y \\ &= QX^0+R^0AX^0 \\ &= (Q+R^0A)X^0 \end{aligned}$$

逆に，(X^0, R^0) が

$$(Q+R^0A)X^0=QX^0+R^0\bar{Y}=0$$

となるならば，〔定理-1〕より，X^0 で QX^0 は上限に，R^0 で $-R^0\bar{Y}$ は下限に達し，X^0 と R^0 はともに最適解である。 ◁

〔定義C〕

$$(Q+R^0A)X^0=0$$

$$\left\langle\begin{array}{l} Q+R^0A \geqq 0 \\ \qquad X^0 \geqq 0 \end{array}\right.$$

を，相補条件という。

$$Q+R^0A>0 \Rightarrow X^0=0$$
$$X^0>0 \Rightarrow Q+R^0A=0$$

さて，今迄の議論で条件として，

① (P.P) の制約条件
② (D.P) の制約条件
③ 相補条件

が指摘された。さて，計画問題において有限回の操作で $\Psi^S(\cdot)$ が最適解を保証してくれる為には，上記の3条件をどう戦略的に扱ってゆけばよいのだろうか。その前に，$\Psi^S(\cdot)$ が有限回で最適解を保証してくれる為に戦略的操作が必要になる状況についての議論に進もう。ワンステップおくことによって，条件に対する戦略的意義が明確になってくるであろう。

1.3 計画と分解原理

「目標追求型」経済の枠組みと，その操作について考えてみた。次に，枠組みの中で人間がどう行動してゆくのか考えてみよう。この枠組みの中で人間は単独で，あるいは集団をくんで活動している。彼らは，自分の活動についての情報については熟知しているが，他部門の情報には必ずしも通暁しているとは思われない。化学プラントの技師にとって製鋼プラントの工法は複雑で理解しがたいであろうし，製鋼プラントの技師にとっても化学プラントのプロセスについては同様な思いをするであろう。ところで，化学プラント，製鋼プラントの技師達が相互のプロセスに通暁する必要はこの計画問題では全くないのであるが，中央計画当局が，各プラントのプロセスについて十分な情報収集と分析ができかねる場合には，計画問題の行方に重大な影響を及ぼす。たとえば，あるプラントの生産可能集合が S^* で表現されているとする。生産可能集合を，

$$S^*=\{X^* \mid -AX^* \leqq -Y,\ X^* \geqq 0\} \qquad (1)$$

とする。今，これと別にあるプラントが自らの立場を S^* とするよりも，立場を有利にできる生産可能性集合が存在するとしよう。これを，

$$S=\{X \mid -AX \leqq -Y,\ X \geqq 0\}$$

で表わす。すると，

$$\Psi_k(S) \geqq \Psi_k(S^*)$$

となる。したがって，プラント k では，当然 S を採用するであろう。ところが，社会的操作関数で評価して，

$${}_k\Psi(S) \leqq {}_k\Psi(S^*)$$

となる場合は何らかの考慮が必要になってくる。このような事態を避ける方法のひとつは，Ψ_k と ${}_k\Psi$ とを一致させることであろう。その為には，

①Ψ_k の性質を把握し制御しやすいようにする。
②プラント k とプラント j の性質が似通っていたならば，グループ化する。

操作が必要になってくる。Ψ_k の性質とは何か。[5] 今，各プラントは，自らの計画問題を解いてゆく。その場合に，(P.P) における構成変数に注目する。この構成変数が Ψ_k の性質を決定する。

▶
$$(\mathrm{P.P})\left\{\begin{array}{ll} X_1+X_2+2X_3+X_4 \rightarrow \mathrm{Max!} & \\ \mathrm{S.T.} & \\ \boxed{X_1+X_2+3X_3+X_4} & \leqq 90 \\ \boxed{\begin{array}{l} X_1+3X_2 \\ 2X_1+X_2 \end{array}} & \begin{array}{l} \leqq 20 \\ \leqq 20 \end{array} \\ \qquad\qquad \boxed{\begin{array}{l} X_3 \\ \qquad X_4 \\ X_3+X_4 \end{array}} & \begin{array}{l} \leqq 5 \\ \leqq 7 \\ \leqq 15 \end{array} \end{array}\right.$$

この場合，(P.P) は，副計画問題（sub-program: S.P）によって分割可能である。つまり，X_1X_2 を構成変数とする (S.P-1) と，X_3X_4 を構成変数とする (S.P-2) である。すると，$\Psi_1(X_1, X_2)$, $\Psi_2(X_3, X_4)$ という行動関数が成立する。 ◀

そして，構成変数とプラントとの対応関係を調べてゆくと，構成変数の共通なグループでひとまとめにす

注(5) Ψ_k と ${}_k\Psi$ の性質については，2.2 の「計画プロセスの記述」で具体的に検討されよう。

るのである。グループ化された行動関数値を，$\tilde{\Psi}_k$ とすると，各グループが計画問題として解いた値は $\tilde{\Psi}_k{}^*$ となる。この値の組み合せに適当なウェイトをつけて，(P. P) の最適解となるのであるから，

$$ {}_k\tilde{\Psi}^k=\alpha_1\tilde{\Psi}_1{}^*+\alpha_2\tilde{\Psi}_2{}^*+\cdots+\alpha_k\tilde{\Psi}_k{}^*+\cdots+\alpha_M\tilde{\Psi}_M{}^* $$

$$ \sum_{k=1}^{M}\alpha_k=1 \qquad \alpha_k\geqq 0 $$

となる。この式からわかるように，すべてのプラントが (P. P) の最適解と (S. P) の最適解が一致する偶然と巡り合うことはないのである。したがって，プラントとしては，自ら (S. P) の最適解と (P. P) の最終解が一致するような戦略をとることになろう。[(6)] その戦略とは何かを探るために，(P. P) と (S. P) の解法プロセスを眺めてゆこう。しかし，計画当局としては，(S. P) の存在を許した原因は，${}_k\Psi$ が最適解を求めやすくするためであるし，Ψ_k を ${}_k\Psi$ の最適解を得るための情報として使うという意味でのコントロールを容易にするためであった。

▶分解原理は Danzig と Wolfe によって展開された。本論での考察は，次のようになろう。今，社会に存在する「価格システム」が P で表現されている。又計画当局の情報センターに横書きテープで価格は記憶されている。次に技術行列 A は，並べかえを行なって，

	1 2		··················	M
$0'$	$A_0{}^1$	$A_0{}^2$	$A_0{}^3$	$A_0{}^4$
$1'$ $2'$	$A_1{}^1$	0	0	0
⋮	0	$A_1{}^2$		
		0	$A_1{}^3$	
N'			0	$A_1{}^4$

のようになるとしよう。この新技術行列を A' とする。すると，

$$ PA'=Q' \qquad A'=\begin{bmatrix} A'_0 \\ \hdashline A'_1 \end{bmatrix} \tag{1} $$

$$ \text{(D. P. P)}\left\langle\begin{array}{ll} Q'X^*\ \rightarrow\ \text{Max!} & (2) \\ \text{S. T.} & \\ -A'_0X^*=-Y_0 & (3) \\ -A_1'X^*=-Y_1 & (4) \\ X^*\geqq 0 & (5) \end{array}\right. $$

これを，分解された原問題(Decomposed P. P; D. P. P)と呼ぶ。この (D. P. P) では，

$$ S^D=\{X^* \mid -A_1'X^k=-Y_1,\ X^*\geqq 0\} $$

は有界の凸多面体を構成する。すると，

〔定理〕

$S^D=\{X^* \mid -A_1'X^*=-Y_1,\ X^*\geqq 0\}$ は空でなく有界で，$X_k{}^*$ $(k=1,\ \cdots,\ M)$ をその端点とする。このとき，任意の要素 $X^*\in S^D$ は，

$$ \left\langle\begin{array}{lll} X^*=\sum_{k=1}^{M}\alpha_kX^*_k & & (6) \\ \alpha_k\geqq 0 & (k=1,\ \cdots,\ M) & (7) \\ \sum_{k=1}^{M}\alpha_k=1 & & (8) \end{array}\right. $$

と表わされる。

▷省略[(7)] ◁

であるから，(D. P. P) は(4)(5)を満たし，かつ(3)を満足し，$Q'X^*$ を最大にするような X^0 を選ぶことになる。(6)→(3)より，

$$ -\sum_{k=1}^{M}A_0'X_k{}^*\alpha_k=-Y_0 \tag{9} $$

また，

$$ -A_0'X_k{}^*=B_k $$

とし，(6)→(1)より

$$ \sum_{k=1}^{M}Q'X_k{}^*\alpha_j \tag{10} $$

とする。更に，

$$ Q'X_k{}^*=C_k \tag{11} $$

とすると，(D. P. P) は

$$ \text{(D. P. P)}'\left\langle\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{M}C_k\alpha_k\ \rightarrow\ \text{Max!} & (2)' \\ \text{S. T.} & \\ -\sum_{k=1}^{M}B_k\alpha_k=-Y_0 & (3)' \\ \sum_{k=1}^{M}\alpha_k=1 & (4)' \\ \alpha_k\geqq 0 & (5)' \end{array}\right. $$

となる。

今，
$$ \bar{C}_k=C_k+R\begin{bmatrix} -B_k \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} \tag{6$'$} $$

また，$R=(-R_1,\ -r_0)$ を使って

$$ \begin{aligned} \bar{C}_k&=Q'X_k{}^*+R_1A_0'X_k{}^*+r_0 \\ &=(Q'+R_1A_0')X_k{}^*+r_0 \end{aligned} \tag{7$'$} $$

シンプレックス基準により，(7)′から，

$$ \text{Max}\ \bar{C}_k=C_k{}^0=(Q'+R_1A_0')X_k{}^0+r_0 \tag{8$'$} $$

として基底に入れるべき α_k を選ぶ。

また，$X_k{}^*\in S^D$ でかつ端点であり，$\bar{C}_k$ が $X_k{}^*$ に関して線型である。Σ は有界であると定義した為，(8)′は，実は各プラントの (S. P) であり，

注(6) 最終解とは，時間制限によって計画が打ち切られたときに到達している (P. P) の解。

(7) 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』p. 188 の定理1参照。

$$ \text{(S. P)}\left\langle\begin{array}{l} (Q'+R_1A_0')X_k{}^*\ \rightarrow\ \text{Max!} \\ \text{S. T.} \\ -A_1'X_k{}^*=-Y_1 \\ X_k{}^*\geqq 0 \end{array}\right. \tag{9$'$} $$

と等価である。これから $X_k{}^0$ を求めて，基底に入れるべき α_k は，

$$ \begin{bmatrix} -A_0'X_k{}^0 \\ \hdashline 1 \end{bmatrix} $$

となり，対応する係数は

$$ C_k{}^0=Q'X_k{}^0 $$

で与えられ，線型計画をシンプレックス法で解く定石が求められる。 ◀

2.1 計画系と計画

今迄，計画系 (plan) と計画 (program) とを区別した議論を行なってはこなかった。ここでは，次のような定義づけをしよう。

〔定義-1〕

計画系とは，計画がある規則 (後述する[(8)]) によって結合されたもの。

〔定義-2〕

計画とは，政策 (policy) がある規則によって結合されたもの。

〔定義-3〕

政策とは 中央計画当局が使用する操作関数 ${}_k\Psi(\cdot)$ の変数である。

〔定義-2′〕

計画とは，ある規則に従った操作関数 ${}_k\Psi(\cdot)$ の値をいう。

〔定義-1′〕

計画系とは，計画が操作関数の短期的な値とすれば，その値の修正を含みながら長期的に達成される，操作関数及びその値の最適な組み合せである。

さて，それでは各プラントあるいは消費者の持つ個別の操作変数はいまの定義とどのように関連してゆくのであろうか。これは，次のようにして考えてみる。各プラントあるいは消費者も，彼らの操作変数に従って彼らの計画の最適化をはかってゆく。しかし「限定条件3」で示したように，「指令」する側と される側に別れた。したがって，「指令」される側の計画は，「指令」する側の計画の一部となってしまうのである。しかし一部になることがそのまま，個別の行動関数が完全に社会的操作関数の一部になるとは限らない。これは後述されよう。したがって，

〔定義-4〕

個別のプラントあるいは消費者の計画とは，その行動関数 $\Psi_k(\cdot)$ の値をいう。

〔定義-5〕

個別のプラントあるいは消費者の行動 (action) とは，その行動関数 $\Psi_k(\cdot)$ の変数をいう。

しかし以下でも消費者は明示的に出現してはこない。便法として消費者の意向は中央計画当局が把握し，操作変数の有効な使用によってその意向を表現できるとする。

2.2 計画プロセスの記述

さて今，次のような情況を設定しよう。

①技術係数行列： A' は各個別のプラシトが分割して持っている。中央計画当局はこの A' についての情報は十分持っているわけではない。

②中央計画当局は，政策として，「価格システム」：P と「報酬システム」：$-R$ を使う。

③各プラントは，中央計画当局の政策を眺めて，行動をとる。

④中央計画当局の目的関数は，単純に

$$ Q'X^* $$

とする。

⑤各プラントの目的関数も，

$$ (Q'+R_1A_0')X_k{}^* $$

とする。

⑥中央計画当局の操作関数は，各プラントに対して，[(9)]

$$ {}_k\Psi(P,\ -R) $$

とする。

⑦各プラントの行動関数は，

$$ \Psi_k(D,\ X_k{}^*) \qquad X_k{}^*\in S $$

とする。D は後述する。

⑧「価格システム」： P は，前計画時に達成された価格を参考にしている。

⑨「報酬システム」： $-R$ は，P との関連で計画の過程で決定される。

さて，以上を念頭に計画プロセスを記述してゆこう。

注(8) 3.2 参照。

(9) 各プラントといっても，分割原理に従って共通のプラントは，プラント群としてあたかも1プラントのように操作する。従って，k という添字は複数個のプラントも表わす。だから実は，$k\leqq M$ であろう。

ここでは各プラントは，投入産出構造[10]ではない。ある生産計画$\bar{Y}$が決定され「価格システム」：Pが与えられると，その「価格システム」から得られる生産要素価格は，各プラントにとって高い程望ましい。というのは，各プラントにとって，

$$(Q'+R_1A_0')X_k^* \rightarrow \text{Max!}$$

を，制約条件 $-A_1'X_k^*=-Y_1$, $X_k^*\geqq 0$ を満たしながら達成しなければならない。その場合，$Q'=PA'$ であるから，生産プロセスの水準をあげる努力なしで，義務をはたすことができる。というのは十分にたかい要素価格にのみ反応すれば Q' を増大できるからである。それは，各プラントが生産しようとしている財の要望価格 $\tilde{P}_j$ と，中央計画当局が「価格システム」P で与える P_j に対して各プラントの反応は，$\tilde{P}_j \epsilon \tilde{P}$; $P_j \epsilon P$ とすると，

$$d_{jk}\begin{cases}1 & (\tilde{P}_j\leqq P_j \text{ のとき})\\ 0 & (\tilde{P}_j> P_j \text{ のとき})\end{cases} \qquad (k=1, \cdots, M)$$

で示される。すると，各生産プロセスで列を構成し，各財で行を構成する，$(N+1)\times M$ の行列 D が形成される。この D を「受容行列」(Accept Matrix) と呼ぶ。ただし，

$$PD=\tilde{P}A'$$
$$D=\tilde{P}^{-1}PA'$$

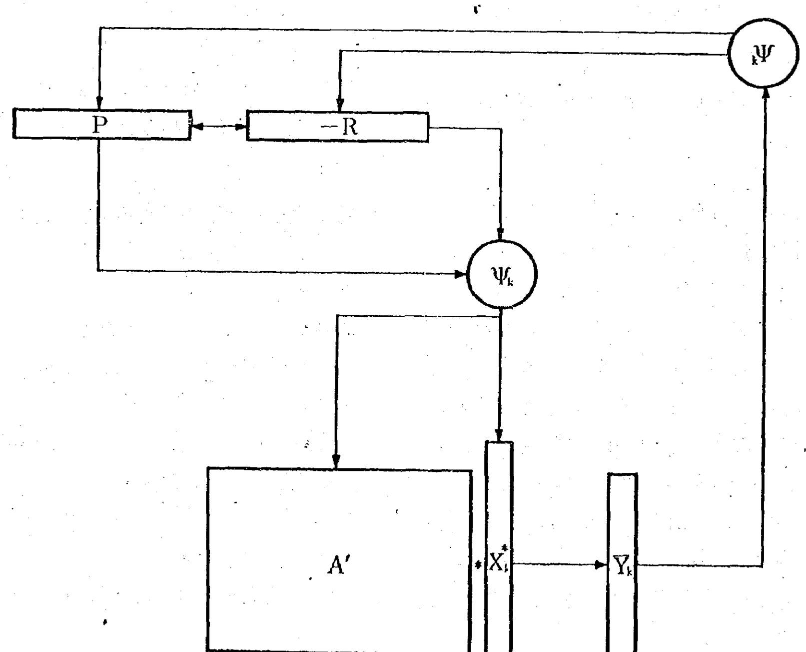
であり，各プラントは，行動関数$\Psi_k(\cdot)$ にのせて，中央計画当局にDの列を発表する。中央計画当局は，それをもとに $(N+1)\times M$ の行列を作成する。この場合，どの行もすべてゼロであることはできない。ゼロであれば，その行に対応する財は生産される機会が喪失していることを示しているからである。従って，中央計画は「価格システム」の該当財の価格を変更する。それは，1.2 で示した〔定理-4〕と〔相補条件〕を満足するような変更である。つまり，

$$PA'=Q'>-R^0A' \Rightarrow X^0=0$$
$$X^0>0 \Rightarrow Q'=-R^0A'$$

より，$-R^0$ の変更によって，$X^0>0$ とすることが可能かもしれない。あくまで予想の域を出ないのは，

$$Q'=-R^0A' \Rightarrow X^0>0$$

は断言できないからである。そこでこのような $-R^0$ の変更が操作関数 ${}_k\Psi(\cdot)$ で示されると，それをもとに，各プラントは，自らの計画問題にひき直して，D の列の改訂をするであろう。しかし，中央計画当局も P の改訂については限度を設けて，ついにはある財の生産計画を断念するかもしれない。また，各プラントが互いに競争的であれば，ある程度の価格改訂に対して，応じるプラントも出てこよう。その場合，あくまでも，計画に応じてくれたプラント群の中で，要望価格が最も低いプラントにある財の生産行動の権限は委ねられる。



注(10)　投入産出構造とは，財には唯一の生産プロセスしか存在しないし，ある生産プロセスは唯一の財しか生産しないような生産構造をいう。しかし，本論では各プラントは，唯一の生産プロセスだけ持ち，複数の財を生産可能であると考える。

さて，これでPが各々のプラントで承認され，それに従って，各生産プロセスの生産態勢が整うことになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
\blacktriangleright {}_k\Psi^1(-R) & \rightarrow & {}_k\Psi^2(-R) & \rightarrow\cdots\cdots\rightarrow & {}_k\Psi^S(-R) & & \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
{}_k\Psi^1(P) & \rightarrow & {}_k\Psi^2(P) & \rightarrow\cdots\cdots\rightarrow & {}_k\Psi^S(P) & & \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\
\Psi_k^1(D) & \rightarrow & \Psi_k^2(D) & \rightarrow\cdots\cdots\rightarrow & \Psi_k^S(D) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Psi_k^1(X) & \rightarrow & \Psi_k^2(X) & \rightarrow\cdots\cdots\rightarrow & \Psi_k^S(X) & & \blacktriangleleft
\end{array}$$

さて，今迄議論したように，「価格システム」Pには，つねに $-R$ が「影」のごとくついてまわるのである。

次に，Pが決定され，全体の技術係数行列が作製され，

$$PA'=Q'$$

そして，P に関して $-R$ が相対的に決定されると，$S^D=\{X_k^* \mid -A_1'X_k=-Y_1,\ X_k\geqq 0\}$ となる有効生産水準が導びき出される。さて，各プラントは自らが保持する(S.P)を解くことになるのである。A_0' は，大局財 J_0 についての技術係数のベクトルである。こうして，X_k^0 という各プラントについての最適解が導びかれると，全体としての最適解は，X_k^0 の線型結合として表現される。

$$X^0=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k X_k^0$$
$$\alpha_k\geqq 0,\ \sum_{k=1}^{M}\alpha_k=1$$

この X^0 は S^D にやはり含まれるから，実行可能解である[11]。さて，この X^0 が最適解である証拠は，〔定理-4〕と〔相補条件〕から；

$$(Q'+R^0A')X^0=0$$

を満足すればよい。従って，これが生産計画の停止条件である。しかし議論はこれに止まらないのである。つまり，停止条件は発見可能であるとしても，試行回数なり解の収束性についての追加的検討なしには，「計画問題」はその実現性は危ぶまれるのである。

3.1　計画問題と影の価格

1.2 ですでに，短期の生産計画で「双対性」の議論をしてきたが，実はこの双対性に着目することは，計画の「動機づけ」あるいは実行性を大幅に増大させるひとつの有効な方法なのである。先に，各プラントが中央計画当局の生産計画$\bar{Y}$を最大にするような行動に協力体制をとってくれるか否かは，各プラントの受容メッセージ $d_{\cdot k}$ $(k=1, \cdots, M)$ に依存した。ある財の受容メッセージ $d_{j\cdot}$ が中央計画当局が望む当該財の数量 $\bar{y}_j$ を保障してくれるか否かは，$\tilde{P}_j \epsilon \tilde{P}$ と $P_j \epsilon P$ との不等関係であった。一般的には，

$$\tilde{P}_j^T\geqq P_j^T \qquad \text{（ある試行段階}T\text{において）}$$

が成立するから

$$\tilde{P}_j^T=P_j^T+r_j^T$$

であればよい。しからば，中央計画当局の P_j^T が $\tilde{P}_j^T$ と等しくなれば，r_j はゼロになるから，P_j を上昇させればよい。しかし，この r_j，つまり「影の価格」は，どの時点でゼロに転化するかといえば，ある財 j について，

$$\sum_{k=1}^{M}a_{ij}x_k^*>\bar{y}_j$$

が成立した時である。つまり，j 財についての供給額が需要額を超過した時点である。一方，中央計画当局は，おおまかな現状把握ではあっても，当初の生産計画 $\bar{y}_j$ $(j=0, 1, \cdots, N)$ について，どの生産プロセスがどれくらいの生産水準で稼動する必要があるかの認識を持つ専門部局を有しているのが普通であるから，

$$P_j^0=\min(\tilde{P}_{jk}^T) \qquad \begin{array}{l}(T=0, 1, \cdots, S)\\(k=1, \cdots, M)\end{array}$$

を求めようとする。ところが，ある財 j についての産業構造が均一ではなく，生産水準がまちまちであるとすれば，最終的な生産要素価格 P_j^S は

$$P_j^S\fallingdotseq P_j^0=\min(\tilde{P}_{jk}^T) \quad (k=1, \cdots, M)$$

となる可能性も大きい。従って，r_j が P_j の上昇を先導するような機能を持ち，生産の誘発機能を有している。

この事実は，

$$\max_k \min_j r_{jk}=\min_j \max_k r_{jk}=r_j^*$$

を達成する，中央計画当局と各プラントとのゲームを想定させることになる[12]。

注(11)　X^0 が $S^D=\{X^0 \mid -A_1X^0=-Y_1,\ X^0\geqq 0\}\fallingdotseq\phi$ に含まれるための必要十分条件は，

$$X^0=\sum_{k=1}^{M}\alpha_k X_k^0,\quad \sum_{k=1}^{M}\alpha_k\delta_k=1,\quad \alpha_k\geqq 0,\quad \delta_k\begin{cases}1: & (X_k^0 \text{ が端点})\\ 0: & \text{otherwise}\end{cases}$$

である。

(12)　このゲームについての議論は，D. Gale, *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, 1960, Ch. 7. を参照。

さて，このゲームがどのような条件下で，r_{ij}^0 を達成させるかについての考察が必要になってくる。

3.2 影の価格とその計算可能性

計算可能性については，「有限回の操作によって，目標値に到達可能であること」と定義した。さて，3.1で r_j^* を最適の「影の価格」とした。これは，$r_j^* \in R^*$ である。そしてかつ，

$$-R^*\bar{Y}=\min(-R\bar{Y})$$
$$-R^*A \geqq Q'$$

を満足する。すると，今，$\bar{Y}$ を固定（というのは，当初の生産計画額——それも十分実行可能な——として $\bar{Y}$ を考えるから）して，$-R$ を最少化する単純な計画におきかわってしまう。この計画のプロセスは，R で計画の内部状態を表わし，X を入力記号の有限集合（この有限とは，直接には計算可能である為の便法で，もし，X が無限集合であっても，X と R の組み合せで，無限ループ（trap）に入るような X のグループを[13]，ひとまとめにできる）。R も勿論，有限集合である。$r^0 \in R$ を初期状態，$R^* \subset R$ は停止条件を満たす状態の集合で，$r^* \in R^*$ である。そして，入力記号を読みこんで，R で代表される計画の内部状態の推移（transaction）とその一期前の記憶 $R^\sharp$ を行なう関数を，${}_k\Psi$ とすると，

$${}_k\Psi:\ X \times R \times R^\sharp \to R \times R^\sharp$$

と書ける[14]。すると，計画系は，その出力を各プラントに全面的に依存させるとすれば，

$$\mathfrak{P}=[X,\ R,\ {}_k\Psi,\ R^\sharp,\ r^0,\ R^*]$$

と書き表わせる。

さて，入力集合 $X^* \subset X$ となる X^* はある端末記号の有限集合。Ψ_k を，

$$\Psi_k:\ (X-X^*) \to X \times X^*$$

と定義される生産規則（Production Rule）とする。唯一の出発記号は，$X \in X-X^*$ である。ただし，X と X^* は，

$$S=\{X|\ -AX \leqq -Y;\ X \geqq 0\}$$
$$S^*=\{X^*|\ -AX^* \leqq -\bar{Y},\ X^* \geqq 0\}$$

に各々含まれる，双方とも有限である。これから，プラントの行動文法（Action Grammer）は，

$$\mathfrak{G}=[X,\ X^*,\ \Psi_k,\ \hat{X}]$$

で表現される。これから，計画系 $\mathfrak{P}$ が，計画 ${}_k\Psi$ によって，計算可能性を有するとは，「$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{P}$ によって受理されること」であることを示そう。

〔定義-1〕

各プラントの行動文法 $\mathfrak{G}$ が適切（Attainable）に定義されているとは，$\hat{X}$, X, X^*, Ψ_k および S, S^* が明確であること。従って，S 又は S^* に含まれない $\tilde{X}$ は $\mathfrak{G}$ には存在しないし，X および X^* は各々有限集合である。

〔定義-2〕

計画系 $\mathfrak{P}$ は，その最終状態 r^S が前もって許容された有限の状態 R^* のひとつの要素であるとき，そのプロセスで順序づけられてきた入力集合 X(string：連系）を受理（accept）したと言う。もし最終状態 r^S が，$R-R^*$ に含まれる場合は，その string を拒否（reject）したと言う。

〔定理-1〕

すべての適切に定義された行動文法 G は，計画系 $\mathfrak{P}$ によって受理される。

▷まず計画系 $\mathfrak{P}$ に記憶機能を持たしていることで，入力集合の連系はユニークに認識可能である。今，ある入力集合 X を，

$$X=X^1X^2X^3X^4\cdots\cdots X^S \qquad X^1 \in \hat{X} \subset X$$

の S 個の入力の連系とする。計画系 $\mathfrak{P}$ は，$S+2$ 個の状態を推移すると考える。これを，r^0, r^1, r^2, …, r^*, $\tilde{r}$ とする。r^0 は初期状態，r^* は唯一の停止条件を満たす最終状態とする。入力連系を，左から順番に観察してゆく。もしも，$\tilde{X} \in X$ が X^S を観察される前に観察された場合は，$\mathfrak{P}$ は $\tilde{r}$ の状態になる。この $\tilde{r}$ は，次に X の中の要素を読むこともなく，「無限ループ」（trap）を示す状態である。従って，

$${}_k\Psi(r^{T-1},\ X^T)=r^T \qquad 1 \leqq T \leqq S$$
$${}_k\Psi(r^{T-1},\ \tilde{X})=\tilde{r} \qquad 1 \leqq T \leqq S$$
$$(\forall \tilde{r}|\ r^T \neq \tilde{r})$$
$${}_k\Psi(r^*,\ \tilde{X})=\Psi(\tilde{r},\ \tilde{X})=\tilde{r} \quad \forall \tilde{X}$$

と書ける。さて，この「無限ループ」が受理されるには，${}_k\Psi(r_0,\ \tilde{X})={}_k\Psi(\tilde{r},\ \tilde{X})=\tilde{r}$

$$\tilde{\mathfrak{P}}=[X,\ \{r_0,\ \tilde{r}\},\ {}_k\Psi,\ r_0,\ R^\sharp,\ \{r_0\}]$$
$$\tilde{X} \in X$$

のみである。なお，$\tilde{\mathfrak{P}} \subset \mathfrak{P}$ である。◁

さて，「影の価格」R と操作関数 ${}_k\Psi$ を通じて計画問題を考えてみた。そして「計算可能性」についての間接的考察を加えたが，実は計画系 $\mathfrak{P}$ は更に検討を加える必要がある。それは，計画系 $\mathfrak{P}$ が受理する行動文法 $\mathfrak{G}$ が，「無限ループ」に誘われるような $\tilde{r}$ を初期の状態で拒否することである。この考慮なしには計画系 $\mathfrak{P}$ は望ましい最終状態に到達しえない。又，次のような考慮も必要である。つまり，計画系 $\mathfrak{P}$ の推移に要する費用（transaction cost）は，状態の数に比例して増大すると考えてみよう。すると，最適解を保障する最終状態を目前にしながら，推移費用の増大に耐えきれずに計画を打ち切る（cut down）必要に迫られる場合が出てくる。そこで，計画系 $\mathfrak{P}$ の状態最小化の操作が必要になってくる。この状態最小化の操作は計算可能性の精度とも関連して興味深い示唆を与えてくれる。この設計は次回の導入として予定している。

注(13)　これらのグループを，拒否された（rejected）グループと呼ぶ。
(14)　$X \times R \times R^\sharp$ は，X と R と $R^\sharp$ のデカルト積である。

おわりに

きわめて限定条件の厳しい環境下での計画問題を考えてみた。又，計画系 $\mathfrak{P}$ についてわかるように，この計画では受理・拒否の権限は中央計画当局の手に掌握されている。その理由は，各プラントは価格改訂に対しての要求や生産受託の権限を持ってはいるものの，計画系 $\mathfrak{P}$ の最終状態で約束される最適解は，各プラントの最適解の凸結合で示されたものであり，きわめて「動機性」（つまり，各プラントが自発的に計画系の最適状態達成に協力すること）の根拠は弱いといえる。従って，相当の権限を持った中央計画当局の存在が必要とされる。これは，Dantzig がいみじくも語ったように，「中央計画当局が完全な情報を持たないときの，決定権が集中された計画」なのである。このような計画系 $\mathfrak{P}$ が，経済環境の変化とともにどのような変更を迫られてゆくか興味ある問題である。

〔参考文献〕

〔1〕 Birkhoff, G. and T.C. Bartee, *Modern Applied Algebra*, McGraw-Hill 1970.
〔2〕 Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press 1963.
〔3〕 Dantzig, G. B. and P. Wolfe, ‘The decomposition algorithm for linear programs.’ *Econometrica*. Vol. 23, 1961.
〔4〕 Dobb. M. *Welfare Economics and the Economics of Socialism*. 1969（『厚生経済学と社会主義経済学』昭48)
〔5〕 Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, 1960.
〔6〕 Kornai, J. and Th. Lipták, ‘Two-Level Planning’ *Econometrica*, Vol. 31, 1965.
〔7〕 Lasdon, L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, 1970.
〔8〕 Malinvaud, E., ‘Decentralized Procedures for Planning’ in *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, ed. by E. Malinvaud and M. O. L. Bacharach Macmillan, 1967.
〔9〕 Marschak, T. ‘Centralization and Decentralization in Economic Organization.’ *Econometrica* Vol. 27, 1959.
〔10〕 森嶋通夫『近代社会の経済理論』創文社, 1973.
〔11〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』1960.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科修士課程修了）