

Title	投票の矛盾(Voting paradox)の可能性と多数決原理に関するノート : Arrowの一般可能性定理の現実的意味
Sub Title	A note on the possibility of the voting paradox and the majority decision rule : practical significance of Arrow's general possibility theorem
Author	関谷, 登
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1974
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.67, No.1 (1974. 1) ,p.33- 45
JaLC DOI	10.14991/001.19740101-0033
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19740101-0033

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

下社会主義の運動は、1910年から14年までの、第1次世界大戦に先立つきわめて短い期間、イギリス社会主義運動に深刻な影響をあたえたといわれるが、それは一体いかなる思想と運動であったろうか。その主要な指導者と大衆の大多数は、20歳代の青年であり、高度に知的な中産階級に属していたといわれる⁽¹⁸⁾。その運動は、現実的であることを目的としたのと同時に、浪漫的であることをも目的としていたというのが Margaret Cole の解釈であるが、この場合の romanticism とは、労働組合や労働組合の構造を中心に考えることであり、労働組合を革命の母体として位置づけることを意味していた。そして1914年以前のきわめて短い時期の「産業上の大不安」において、Guild-socialism は、変革のイデオロギーとなりえたのである。

この産業上および社会上の大不安の主要な直接的な原因は、1906年の選挙後の自由党政権の失敗であったといわれるが、より具体的には、R. C. K. Ensor, England, 1870-1914 にみられる大衆の自由党政権への期待、しかもそれにもかかわらず、大衆の期待は裏切られて幻滅と化したことであったが、その幻滅の様は、George Dangerfield, The Strange Death of Liberal England にきわめて鮮明に描かれているという。20世紀に入ってからの上昇する失業と鉄道や鉱山に頻発するストライキによって象徴される 'Great Unrest' にたいして、自由党政権は何ら有効な政策を立てることができず、Poor Law Commission はまだ開会中であり、Beatrice Webb による貧困の防止を目的とするフェビアン⁽¹⁹⁾の社会保障計画は、やがて生まれようとしている段階であった。Arthur Penty, The Restoration of the Gild System, 1906 が、Guild-socialism の運動の発端となり、William Morris の影響を受けた彼の思想は、近代工業への憎しみと skilled craftsman にたいする擁護となってあらわれ、雑誌 New Age を主宰したフェビアン、A. R. Orage や S. G. Hobson, H. G. Wells も Guild socialism の鼓吹者もしくは支持者であった。Guild socialism の主張は、現存の賃金奴隷の制度を終らせるために、「労働者の民主的に自治的なギルドと国家の政治組織との統一」(a marriage of democratically self-governing Guilds of workers with the political organization of the State) を目指すものであった。そしてこの統一は、ILP やフェビアン協会あるいは議会労働

党が、伝統的に唱えている社会主義を打ち棄てるのではなく、それがいやしくも社会主義を主張するものである限り、これを維持し、syndicalism や industrial unionism と呼ばれるものの中にある正しくまた魅力的であったところのものを利用することを意図するものであったとい⁽¹⁹⁾う。その限りでは Guild socialism は、イギリスに伝統的な社会主義思想の上に立ちつつ、syndicalism や industrial unionism を外来の思想としてとらえていたことになる。

やがて1912年、'Great industrial unrest' がはじまるや否や、新聞や一般大衆をとらえたところのものは、New Age にあらわれた Guild-socialism の論説ではなく、むしろ syndicalism や industrial unionism の運動であり、その有力な指導者は Tom Mann であり、IWW の理論を運動に導入し、イギリス労働運動にサンディカリズムの理論を注入したのは、Jim Larkin であった。G. D. H. Cole, The World of Labour は、このような Guild-socialism の伝統の上に立って書かれたものといえることができるが、この書は一方において Syndicalist としての Tom Mann や Jim Larkin らの左翼革命主義にたいして批判的であり、その点では、Webb 夫妻の History of Trade Unionism の伝統をうけつぎ、Industrial Democracy と同じ流れに倣さすようにみえるが、それとは大きな差異があると、Margaret Cole は主張する。すなわち、World of Labour は、イギリスのみならず、西欧世界全体にわたって、制度をかえようとする力にかんしての詳細にして昂揚した記述である。この影響を受けたものとして、Raymond Postgate, H. Belloc, G. K. Chesterton, Maurice Reckitt, R. H. Tawney, Bertrand Russell, William Temple などの著名な人々がいたとはいえ、これらの人々はいわゆるインテリゲンチヤであり、ギルド社会主義が知的な運動にとどまり、当時澎湃としておこりつつあった industrial unionism の運動や syndicalism にたいして、むしろ批判の姿勢をとっていたことが、この論文からうかがわれる。では Guild socialism の運動は、現実に、労働運動とどのような関係に立っていたのであろうか。Frank Matthews, The Building Guilds は、この点についてふれている論文であるが、割愛せざるをえない。(経済学部教授)

注(18) Margaret Cole, Guild Socialism and the Labour Research Department (Essays in Labour History, p. 261).

(19) Ibid., p. 266.

投票の矛盾 (Voting Paradox) の可能性と 多数決原理に関するノート

— Arrow の一般可能性定理の現実的意味 —

関 谷 登

目 次

1. 個人的選択と社会的選択
2. 投票の矛盾の認識
3. Arrow の理論
4. 多数決ルールと投票の矛盾の可能性
 - a) 投票の矛盾の可能性
 - b) C. D. Campbell と G. Tullock による計算
 - c) R. G. Niemi と H. F. Weisberg による計算
 - d) 制約された選好の仮定
 - e) R. G. Niemi による計算結果とその意味
 - f) 多数決ルールとの関連における意味
 - g) 多次元状況における矛盾の可能性
5. 議論の要約とその現実的意味
6. 多数決原理の意味

1. 個人的選択と社会的選択

社会的選択は、個々の意思決定者の選択をある特定のルールに従って集計した結果である。こうした社会的選択は、個人的選択とは異なって、必ずしも斉合的であるとは限らない。合理的個人の決定は、自己の効用極大化をめざしてなされるので完全に斉合的であり得るが、社会的選択は、そうした目的達成行動の結果ではないからである。それは、ある場合には、多数の意見の反映であったり、また、ある場合には、他の集計方法によって選択されたグループの意見の反映であったりする。その意味で、社会的選択は、常に何らかの恣意性を含んでいると考えられる。

2. 投票の矛盾 (Voting Paradox) の認識

18世紀後半以来、投票の理論に深い関心をもつてい

た人々は、cyclical majority, Condorcet effect, paradox of voting, Arrowian paradox としてさまざまな形で説明されてきた奇妙な現象に気付いていた。それは、18世紀後半の Condorcet に始まり、19世紀の終りに Lewis Carroll によって再発見され、その後、比例代表 (proportional representation)、あるいは、運動競技の得点についての研究者達に引き継がれ、今世紀の半ばに、Duncan Black によって明確な形で示され、それによって、この問題が、政治理論の主要な流れの中にもちこまれた⁽¹⁾。

こうした投票の矛盾と呼ばれる現象は、通常、次のように説明される。

3つ以上の選択肢 (例えば、候補者、決議案等) と、3人以上の投票者がある場合、それらの選択肢を対にして比較する時、他のどの選択肢よりも選好されるいかなる選択肢も存在しない。

例えば、3つの選択肢を、 a, b, c 、3人の投票者を、1, 2, 3 とし、 P が選好関係を示す (aP_b は、 a が b よりも選好されることを表わす) とする時、各投票者の選好関係が次のような場合には、集計の結果は、非斉合的となる。

(1) aP_1, bP_2, cP_3

(2) bP_1, cP_2, aP_3

(3) cP_1, aP_2, bP_3

すなわち、選択肢 a は、多数 (投票者1と3) によって b よりも選好されるが、 b も c も共に多数によって、それぞれ、 c, a よりも選好され、選好関係が循環してしまう。

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \dots$

この矛盾は、投票によってある1つの選択肢を選び

注(1) 投票の矛盾の研究の歴史について詳しくは、次の文献を参照。1940年代までは D. Black [6], 1961年までは W. H. Riker [41], 1965年までは J. K. Arrow [1] の第2版の appendix.

得ると考えられた多数決ルールが失敗することを示している。

この現象は、先に述べたように、今世紀半ばに Black によって再発見された後、K. J. Arrow によって、一般的な形で証明がなされ、この問題が、厚生経済学の分野にもちこまれた。それ以後、この現象の現実的重要性についてはほとんど問われないまま、経済学及び政治学に大きな影響を与えてきた。特に、経済学においては、その展開を阻害する1つの要因になっているようにも思われる。例えば、今日、「市場の失敗」を認識している経済学者は、政治的決定分析の必要性を強調するが、彼らは、そこに Arrow 問題が存在することを指摘するに留まり、それ以上に進もうとはしない。次の P. Samuelson の言葉は、それを端的に表わしている。

「どのようにして、Wicksell や Lindahl, 更に Musgrave, Johansen でさえもが(そして、おそらく Dorfman も) 擬均衡分析に一番をくれた後に、不毛な数理政治学の領域に下り、結局、政党や諸党派の不決定的な行動様式にいきつき、Arrow の不可能性定理に衝突することが不可避となったかは全く注目に値する。つまらない場合を除いて、ゲームの理論は、問題を解決するよりも、むしろ逆説的な事例を示すことが多いと(3)思う。」

厚生経済学における Arrow の証明及び、政治学における Black の著書の重要性は、投票の矛盾という現象が、全く一般的なものであるという考えに基づいている。しかし、その重要性は、矛盾の生じる可能性の大きさに依存する。例えば、その現象が、1億回に1度しか起こらないとするならば、たとえ、Arrow の証明が完全に正しいとしても、それは、全く現実的重要性をもち得ないことは明らかである。最近、矛盾の生じる頻度を計算することによって、この問題の現実的意味を考えようとする多くの試みがなされている。このノートの目的は、こうした試みの幾つかを示し、そのもつ現実的意味を明らかにすることである。次節では、後の議論の便宜のために Arrow の一般可能性定理

注(2) G. Tullock [49] は、次のような文章で始まっている。「この15年間、幻影(phantom)が、経済学と政治学の教室やセミナーを歩き回っている。この幻影、すなわち、Arrow の一般不可能性定理は、一般に、選好を集計するいかなる有効な方法も存在しないことを証明するものとして説明されている。この小論の私の目的は、その幻影を追い払うことである……」。しかし、一部の政治学者は、あまり大きな関心を示さなかつた。R. A. Dahl, C. E. Lindblom は、[17]で、投票の矛盾は、数学に関心を持つ人が、おもちゃとして楽しむ(enjoy toying)もので現実には、あまり重要ではないと述べている。

(3) P. Samuelson [44].

(general possibility theorem)について簡単に述べ、その後の節で上の問題を考察することにする。

3. Arrow の理論

Black の著書が公にされた後、すぐに、Arrow は、「Social Choice and Individual Values」において一般可能性定理(general possibility theorem)の証明をした。この定理は、最も一般的な形で、個人の選好の集計における問題を述べ、多くの経済学者に大きな衝撃を与えることによって、さまざまな議論を引き起こした。

まず、彼は、選好の特質を規定する2つの公理(axiom)を示すことから始める。3つ以上の選択肢の集合(a_1, a_2, \dots, a_n)と、選好されるか無差別であるという関係を表わすRが与えられている場合、それらの選択肢がこのRという関係によって順序付けされている時、それを弱い順序関係(weak ordering)という。

公理 I 選択肢のいかなる組合せにおいても、Rによってそれらと比較することが可能である。これは、常に、少なくとも次の2つの関係のうち1つが成り立つことを意味する。

$a_i R a_j$ あるいは $a_j R a_i$

公理 II 選択肢の順序関係は、推移律を満たす。これは次のことを意味する。

$a_i R a_j$ でかつ $a_j R a_k$ ならば、 $a_i R a_k$ が成り立つ。

今、各々の個人が、選択肢に対する自己の順序付けをもっている社会を考えるならば、そこでの社会的問題は、単一の社会的順序付けを得るために、個人の順序付けを集計することである。この集計の方法を Arrow は、社会的厚生関数(social welfare function)と呼んだ。全体の投票からある勝利者をいかに選び出すかを教え込むために、投票計算機械に送られた指令としてそのような関数を考えてみるならば、選好集計の理論の目的は、個人の弱い順序関係をもった選好の集合から、社会にとっての単一の弱い順序関係をもった選好を導き出すための社会的厚生関数を見つけ出すことである。しかしながら、Arrow の定理の本質は、も

し、そのような関数に、幾つかの論理的な条件が置かれるならば、常に、単一の弱い順序関係をもった社会的選好を導き出すようないかなる関数も存在しないということである。

その Arrow の条件とは次の5つである。

条件1 個人の順序付けの普遍的許容性

選択肢の集合の総ての論理的に可能なR順序関係を、各個人の選好として是認される。

条件2 個人の評価と社会の評価の正の対応関係

ある集計の方法が社会的結果 $a_i R a_j$ をもたらすような構成員による選択肢のR順序関係の集合を与えられたものとした場合、もし、構成員の1人あるいは、それ以上が自らの選好順序において a_i の選好順序を上昇させるか、不変のままにとどめるならば、社会的結果は、 $a_i R a_j$ のままである。

条件3 無関係な選択対象からの独立

社会的結果が $a_i R a_j$ であるような構成員による選択肢のR順序関係の集合を与えられたものとした場合、もし、ある選択肢 a_n が、考慮からはずされたとしても、社会的結果 $a_i R a_j$ はそのままである。

条件4 市民主権

いかなる選択肢の組合せ(a_i と a_j)に対しても、集計の方法が社会的結果として、 $a_i R a_j$ をもたらすような選択肢のR順序関係の集合が存在する。

条件5 非独裁

ある個人 i の選好 $a_i R a_j$ が、他の個人の選好のいかにかわからず、社会的選好が、 $a_i R a_j$ であることを決定するならば、そのような結果を独裁的(dictatorial)という。

以上、5つの条件との関係で、Arrow の定理は、次のように述べることができる。

条件1-3を満たし、公理I, IIを満足する社会的順序関係をもたすいかなる社会的厚生関数も、条件4あるいは5のどちらかを犯すことになる。言い換えるならば、集計における公正のある基本的要求(5つの条件)を与えられたものとした場合、斉合的な社会的結果を確保することは不可能である。

この定理は、その後さまざまな証明が成されているが、ここではそのいずれをも示さない。

Arrow の仕事の1つの重要な特徴は、多数決ルールあるいは市場というようなある特定の集計方法と関係なく、その定理を証明したということである。すなわち、Arrow の証明はもし、彼の条件が満たされるなら

注(4) J. H. Blau [7], K. Inada [28], K. O. May [33]

ば、矛盾が不可避であるということを示している。

4. 多数決ルールと投票の矛盾の可能性

多数決ルールは、社会的選好順序付けPを得るための1つの一般的な方法である。今、決定をしようとする集団において、各々完全な推移律を満たす選好順序 P_1, P_2, \dots, P_n をもつ n 人の個人がいるとするならば、その時、多数決ルールは次のことを意味する。 a_i を a_j より選好する個人の数が、 a_j を a_i より選好する個人の数より多ければ、そして、その場合にのみ $a_i P a_j$ となる。もし、1と n の間の総ての k にとって、そして、総ての $a_i (a_i \in A)$ にとって $a_i P_k a_j$ が $a_j P_k a_i$ を意味せず(すなわち、 P_k は非対称的である)、 n が奇数の時、 a_j よりも a_i を選好する個人の数が $\frac{n}{2}$ より大きいならば、そして、その場合にのみ、 $a_i P a_j$ となる。

このような多数決ルールは、先の Arrow の社会的厚生関数にとっての要求のうち1つを除いて他の総てを満たす。すなわち、多数決ルールは、推移律を満たさない可能性がある。この非推移性の可能性にもかかわらず、多数決ルールは、その単純さの故に魅力的なものである。そこで、非推移性の可能性の大きさを確かめることが重要な問題となる。この問題に対してわれわれは、2つのアプローチを見出すことができる。

1つのアプローチは、もし、総ての個人の選好順序の集合が、ある形態のそれを排除するように制約されるならば、その時、多数決ルールは推移律を満たす社会的順序付けを得ることができることを示そうとする。非推移的な多数決ルールの可能性の重要性を検討しようとする第2のアプローチは、非推移性に導く個人の選好形態の可能性には触れず、非推移性の可能性だけを問題にする。

以下、これら2つのアプローチによる計算の結果を検討することにしよう。説明の都合上、後者から始めることにする。

a) 投票の矛盾の可能性

投票の矛盾の可能性の問題を最も簡単な例で考えてみよう。選択肢3つ、選択者3人と仮定する。この場合、もちろん、選択肢の間の推移律を満たす順序付けは、 $3! = 6$ 通りある。そこで、ある選択者が、これらの順序付けの1つを選択する確率は、総て等しい($1/6$)とする(equiprobability assumption)と、一般的

には、 $n!$ の順序付けがあり、 m 人の選択者のいずれもが、それらの順序付けのどの1つをも選択しうるから、 m 人の社会が、個人の選好序列を順序付ける可能性は、 $(n!)^m$ 存在することになる。 $n=3, m=3$ の場合には、それは、 $(n!)^m=216$ となる。この216通りのうち、6通りが全員一致の場合であり、多数(2人)が、同じ順序付けを選択する場合は、90通りある。これらの96通りは、もちろん、矛盾に結果しない。また、3人の選択者が総て違った選択をする場合(126通り)のうち、12通りが、矛盾($a_1a_2a_3a_1, a_1a_3a_2a_1$)に導く。こうして、この例($n=3, m=3$)では、矛盾の生じる確率は、 $12/216=0.0556$ となる。この数字は、決して無視することのできない大きさである。しかし、われわれが、実際に投票によって決定をしようとする場合、 $n=3, m=3$ という状況は、きわめて稀なケースであろう。それでは、更に一般的な状況において、その確率はどの程度の大きさであろうか。次に、そうした一般化の試みの幾つかを見てみよう。

b) C. D. Campbell と G. Tullock による計算⁽⁵⁾

Black は、cyclical majority の頻度の問題が非常に重要であると考え、“The Theory of Committees and elections”において、予想される cyclical majority の

可能性を示す表を挙げている。しかし、彼の表のほとんどの場合は、空白のままである。それは、次のような理由による。「われわれは、表の計算を可能にするような一般的な連続性を引き出すことができないので、ほんの幾つかのみに数字を入れたにすぎない。」

Campbell と Tullock は、Black によって空白のままに残された部分を、計算機を用い、モンテカルロ法によって計算しようと試みた。その結果は、下の表に示されている。

この表は、1000 回のうちで cycles の起る平均の比率が示されている。そこに示されている数字から判断する限り、個人が独立した選好に基づいて選択をする場合には、cyclical majority という現象は、決して無視しうるものではなく、それ故、Arrow の証明も、それを数学的遊びにすぎないとして、放棄してしまうことは許されないことが解る。そして、選択肢、及び選択者の数が増加するに従って、cyclical majority の可能性も大きくなる傾向を読みとることができる(この表では、選択者が、13, 19, 29 の時に例外的に、若干の低下が見られるが、その理由は明らかでない)。

c) R. G. Niemi と H. F. Weisberg による計算⁽⁷⁾
Niemi と Weisberg は、Tullock らの結果を更に一

表1 投票者の数(奇数のみ)

	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
3	5.7	7.8	8.4	8.9	8.5	7.3	7.4	8.4	8.0	8.9	9.1	9.7	11.1	11.1
4	10.7	14.6	15.9	15.6	15.1	14.7	15.5	17.3	16.9	17.2	16.4	18.0	18.6	17.4
5	15.4	18.3	21.5	23.0	25.1	22.4	25.3	23.7	23.9	24.8	25.4	24.3	24.0	21.1
6	20.1	25.5	25.8	28.4	29.4	28.1	29.8							
7	23.9	29.9	30.5	34.2	34.3	34.1	35.9							
8	27.7	32.5	36.7	37.8	38.6									
9	30.2	36.7	39.5	41.8	42.1									
10	32.4	40.8												
11	35.2			46.4			49.7							47.5
12														
13														
14														
15														
16														
17	46.4								62.6					
18														

注(5) C. D. Campbell and G. Tullock [12].

(6) Monte Carlo method, シュミレーションの一種で乱数により、確率的モデルの解を求める方法。

(7) R. G. Niemi and H. F. Weisberg [37].

表2 選好序列の可能性が等しい場合の投票の矛盾の可能性, $P(m, n)$

選択肢の数 (n)	個人の数 (m)															
	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	59	∞
3	.0556*	.0694	.0750	.0780	.0798	.0811	.0820	.0827	.0832	.0836	.0840	.0843	.0846	.0848	.0863	.0877
4	.1111	.14	.15													.1755
5	.16	.20	.22													.2513
6	.20	.25	.27													.3152
7																.3692
8																.4151
9																.4545
10																.4887
15																.6087
20																.6811
25																.7297
30																.7648
35																.7914
40																.8123
45																.8292
49																.8405

* 小数点第2位までの数字は、Klahr によるシュミレーションの結果である。他の数字は Niemi と Weisberg による計算の結果である。

般化した計算を行なった。彼らは、D. A. Klahr の結果⁽⁸⁾を利用して、上のような表を作った。

われわれは、この表から2つの点を指摘することができる。

1) もし、選択者の数 m が、10以上ならば、投票の矛盾の可能性は、 m が無限大に近づくまでほとんど変化しない。このことは、現実存在する大部分の集会、あるいは、会議において、投票の矛盾の起こる可能性があり得るということを意味する。

2) 選択肢の数 n が小さい時には、それが大きな時に比較して、矛盾の起こる可能性はかなり小さい。

これら2つの内容から、全体として次のように結論しうる。 m と n が小さい時、矛盾の発生する可能性は、相対的に小さい。

以上、われわれは、2つの計算結果を示したが、これらの結果は、3つの問題点をもっている。

1つは、選択者が、可能な総ての選好序列のうちのある1つを選択する可能性は総て等しい (equiprobability assumption) という仮定である。この仮定は、現実には正しくない。個人が、どの選択肢を選ぶかは、選択肢の性質、個人の趣好あるいは、階級的背景とい

った要因によってかなりの影響を受ける。そこで当然、個人が、ある選好序列を選択する確率 (probability) は、異なっているであろう。しかし、この問題を実際に計算の中に含めることは困難である。

他の1つは、上との関連で出てくる問題であり、先の計算結果を更に疑わしいものとする。それは、企図された矛盾 (contrived paradox) の可能性の存在である。それは、投票者が、自己の真の選好を表わさず、矛盾を造り出すように行動する時起こる。もし、こうした企図された矛盾をも考慮に入れるならば、偶然的な矛盾 (accidental paradox) の可能性だけを問題とした先の計算結果は、矛盾の全体の可能性を過少評価しているということになる。しかも、矛盾を企図するということは、時間や労力を必要とするので、人々は、より重要な問題に関してのみそうした努力をするであろう。ということになると、先の計算は、より深い意味で、矛盾の社会的重要性を過少評価していることになる。

もう1つの問題点は、この計算においては個人の決定は、互いに全く独立し、何の制約も受けないということが前提とされている。しかし、現実には、われわれの選好はさまざまな形で制約を受けている。例えば、

注(8) D. A. Klahr [31].

(9) R. Farquharson [21]. W. H. Riker は、[42] で投票の矛盾の2つの例を挙げている。

そうした要因として、教育、文化、慣習、宗教あるいは、社会的状況等を挙げることができる。もし、こうした考えが正しいとするならば、われわれは、ある状況における選好の形態に、ある程度の類似性を仮定しようのではないだろうか。次に挙げる Niemi の試みは、そのような類似性の存在する場合の矛盾の生じる確率の計算の例である。

d) 制約された選好の仮定

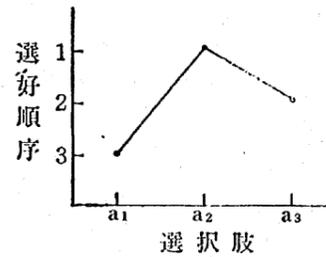
多数決ルールのもとで、推移律を満たす社会的結果をもたらす十分条件の1つは、多数が、同じ選択肢に最も高いランク付けを与えることである。これは、社会が高度に同質的であるというきわめて稀な場合であり、通常こうした条件が満たされる可能性は、ほとんど存在しない。この条件に代わる、最も良く知られた有益な条件は、Black の単峰型 (single peakedness) の選好曲線という特徴である。

第2図の a, b, d が彼の単峰型の選好曲線を示す。

図から明らかのように、それは、次の2つの特徴を持つ (左から右へ読む)。

- a) 常に右上りか右下がりである。
 - b) ある点まで右上りであり、それから右下がりとなる。すなわち、一度だけ方向を変える。
- この Black の単峰型の条件は、次のように述べられ

第1図



る。もし、個人々の選好序列の集合が横軸の選択肢の適当な配列によって、単峰型曲線の集合として示されるならば、その時、ある選択肢は多数によって選好され、社会的結果は、推移的となる。このことは、第3図によって示される。その図から、われわれは、中央の選択肢が、多数決勝者であることを知る。

こうして、単峰型の選好順序は、推移的な社会的結果をもたらす。しかし、その時、多数決による決定は、Arrow の条件 I を放棄することを意味する。すなわち、それは、個人によるある可能な選択肢の選択を禁止する。例えば、個人 I と III が、第3図のような選択をしたとすれば、単峰型の要求は、個人 II が、 a_2, a_3, a_1 を選択することを許さない。もし、個人 II がそれを選択したとすれば、3人の順序付けは、

$$I : a_1 a_2 a_3, \quad II : a_2 a_3 a_1, \quad III : a_3 a_1 a_2$$

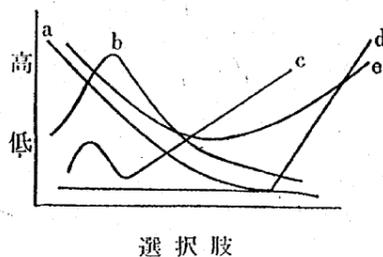
となり、単峰型の要求を満たさないからである。こうして、結局、単峰型の要求は、個人の順序付けのある組合せを禁止することによって、多数決ルールを保障するものであることが解る。

A. K. Sen は、多数決ルールのための十分条件を、単峰型よりも、より一般的な価値制約という特徴を規定することによって示そうとしている。(10) 彼によれば、個人の選好序列の集合が、次のような場合に、価値制約的であるという。もし、総ての個人の選好序列において、最も良くないか、最も悪くないか、あるいは中間でないようなある選択肢がある場合、例えば先の図の選好序列の集合は、 a_1 が最も悪いランクを付けられていないという理由で価値制約的である。こうして、Sen は、多数決ルールは、もし、選択肢の集合が価値制約的であるならば、Arrow の条件

II-V と推移性の要求を満たすことを証明した。

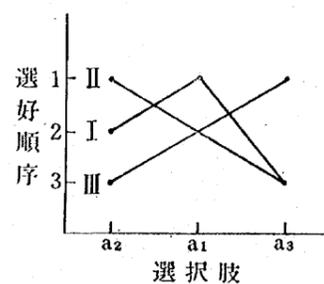
Black と Sen の議論の要旨は、もし、内的調和が選択者の間に存在するならば、社会的結果は斉合的に順序付けられるということである。この内的調和は、一種の評価可能性を意味する。また、単峰型の選好曲線の存在は、個人の選好 (と社会的選好) が順序付けられる共通の質的次元 (common qualitative dimension)

第2図



第3図

個人	選好順序		
	1	2	3
I	a_1	a_2	a_3
II	a_2	a_1	a_3
III	a_3	a_1	a_2



注(10) A. K. Sen (45).

の存在を意味すると考えることができる。それは、判断基準の文化的均一性の反映としてとらえることができる。

しかしながら、こうした完全な一次元性 (complete unidimensionality) あるいは、完全な単峰型の仮定は非現実的である。たとえ、判断の多次元性という問題を問わないとしても、選択肢についての情報の欠除、誤認、類似性といった他の要素が、必要条件の達成を妨げるであろう。それ故、論理のその美しさにもかかわらず Black と Arrow の発見は、矛盾の発生の頻度の説明においては、ほんの限られた意味しかもたない。

明らかに、Black と Arrow の論理は、確定的条件としてよりも、確率的なものとして矛盾を考えることによって洗練されたものとなる。例えば、矛盾は、999 の選好序列のうち、1つでも単峰型の条件を満たさなければ起こりうるけれども、もし、そうだとすれば、それは実際には、ほとんど起こり得ないであろう。少なくとも、選好序列のうちの 50, 150 あるいは、250 が単峰型でない場合よりも、可能性は小さいと考えられる。一般的に、矛盾の可能性は、単峰型の選好序列の比率が減少するにつれて、大きくなると考えられる。

そこで、選好序列のうちある一定割合が単峰型の要求を満たすものとした場合の矛盾の起こる可能性の大きさを計算するという問題は、大変興味あるものとなる。というのは、その結果から、われわれは、何故、

表3 3つの選択肢と選好序列の選好の等しい可能性のもとでの投票の矛盾の可能性

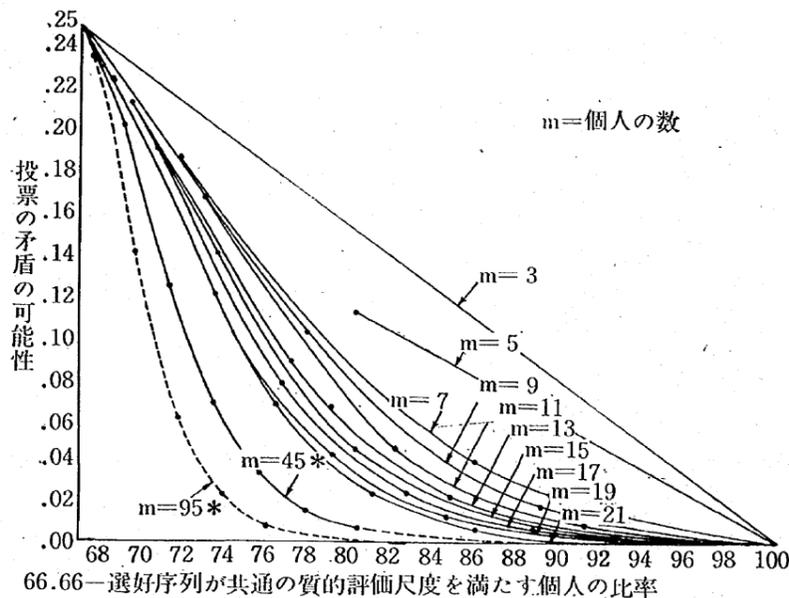
		共通の質的評価尺度を満たす選好序列をもつ個人の数																												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21								
個人の数	1	0*																												
	3	**	.250	0																										
	5	—	—	—	.112	0																								
	7	—	—	—	—	.188	.039	0																						
	9	—	—	—	—	—	.250	.102	.017	0																				
	11	—	—	—	—	—	—	.168	.045	.008	0																			
	13	—	—	—	—	—	—	—	.214	.089	.022	.003	0																	
	15	—	—	—	—	—	—	—	—	.250	.142	.045	.012	.002	0															
	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.192	.077	.024	.006	.001	0														
	19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.226	.119	.042	.013	.003	.000+	0												
	21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	.250	.165	.068	.024	.007	.001	.000+	0										

* 記入されている数字は、一定の条件のもとでの投票の矛盾の可能性を示す。

** 個人の選好序列の少なくとも $2m/3$ が常に共通の質的評価尺度を満たすことが仮定されているので、この欄は条件に当てはまらない。

注(11) R. G. Niemi (38).

第4図 選好序列が共通の評価尺度 (J scale) を満たす個人の比率による投票の矛盾の可能性



の次元を満たすならば、矛盾は生じないことを示している。

第4図は、J scale を満たす選好序列の割合の変化に対する投票の矛盾の可能性を明示したものである。

図の曲線の形から、投票の矛盾は、J scale を満足する選好序列をもった個人の割合と、含まれている個人の数に依存していることが解る。そこで、われわれは、次のように結論することができる。J scale を満足する選好序列をもつ個人の数を一定とすれば、個人の数が増加するにつれて、投票の矛盾の可能性は減少する。しかしながら、 m のいかなる大きさに対しても、投票の矛盾の可能性は、はじめ急速に減少するので、 m がそれほど小さくなければ、たとえ選好序列の75~80%が、J scale を満足するとしても、矛盾は、ほとんど起こりそうもない。そこで、結局、非常に大きな個人の集団にとって、基礎となる次元に関して70%程度の一致があれば、矛盾は、めったに起こらないということになる。

f) 多数決ルールとの関連における意味

われわれは、先に、もし、総ての個人の選好序列が、単峰型 (すなわち、共通次元) を満たすならば、斉合的な社会的選択が必然的に得られることを示し、次に、こうした完全な同次元性は、現実にはほとんどあり得ないので、Black と Arrow の論理は、投票の矛盾の発生の実際的可能性の説明には、ほとんど役立たないことを示した。Niemi は、前節で説明したように、この完全な同次元性という仮定を緩め、部分的同次元性 (partial unidimensionality) における投票の矛盾の可能性を計算した。繰り返してその結論を要約すれば次のようになる。

「...より緩い程度の同次元性でさえ、斉合的な多数決決定をもたらすに十分である。グループの大きさに依存して、ほんの75あるいは70%、あるいは、更により少ない個人が、共通の判断基準を採用するならば、矛盾の発生は、稀なものとなるであろう」。

そこで、重要な問題は、こうした共通の判断基準の広範な一致をもたらす要因として、どのようなものが

注(12) $m=45, m=95$ は、Niemi が特別に計算した結果である。彼はまた、 m が無限大に近づくにつれて、選好のちょうど2/3 が J scale を満足する場合、矛盾の可能性が 0.25 となることを示している。すなわち、それは次のことを意味する。2/3 以上のいかなる割合に対しても投票の矛盾の可能性は 0 に近くなる。こうして、 m が無限大に近づくにつれて $x=2/3, y=0$ に近づく。

考えられるかということになる。そうした要因として最も一般的なものは、政党システムであろう。特に、2党制の場合には、矛盾の可能性を 0 に近づけるに十分な程度に一致をもたらす可能性はかなり大きいと考えられる。また、他の社会化の過程 (socialization process) が、そうした同質性をもたらすと考えられる。

しかし、これで問題が総て解決したわけではない。現実には、こうした条件が整っていない場合がある。例えば、新しい問題が解決されなければならないような場合には、判断のための共通の基礎となるような規準は存在しないので、矛盾が起こる可能性がある。また、このような判断規準について的一致をもたらすような社会化 (socialization) や議論等によってあまり影響を受けていないアドホック (ad hoc) な集団においては、矛盾の可能性がある。更に、実際には、1つではなく、幾つかの規準によって判断がなされる場合の方がむしろ一般的であるように思われる。例えば、学校予算は、教育の質という規準と税率の大きさという規準の2つの側面から評価される。ということは、選択肢が、幾つかの次元によって評価される時に、斉合的な社会的選択あるいは、多数決ルールをもたらすための十分条件をも検討する必要があるということになる。

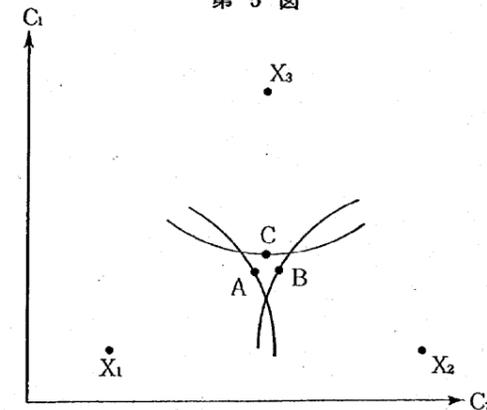
g) 多次元 (multidimensional) 状況における矛盾の可能性

まず、2次元の場合を考えてみよう。図における2つの軸 C_1, C_2 は、3人の個人が、選択肢を評価するのに用いる2つの基準を示している。また、 X_1, X_2, X_3 は、3人の選択者が最も選好する選択肢を表わし、ある選択肢が X_i に近いほど、個人 i は、その選択肢をより選好すると仮定する。図の曲線は、理想的な点 X_1, X_2, X_3 から等しい半径の円の弧である。以上のような状況においては、3つの代替案 A, B, C に対して、個人1と2は、CよりもAを選好し、1と3は、BよりもCを選好し、2と3は、AよりもBを選好するので、社会的選好は、非推移的となる。

このように単純な状況においてさえ、斉合的な結果

がもたらされないということになると、更に評価の基準がふえた場合には、斉合の結果を生み出し得ないと考えられるかもしれない。

第5図



しかし、必ずしもそうではない。もし、人々の投票の棄権の可能性を考慮するならば、完全に斉合的な結果をもたらし得ないとしても、Condorcet winners (dominant alternative) は存在しうる。更に、投票者が、0から1の間のある確率で、ある選択肢を選ぶと仮定するならば Condorcet winner の可能性は大きくなる。これらは、M. J. Hineh, J. O. Ledyard, D. C. Ordeshook らによって明らかにされた。

5. 議論の要約とその現実的意味

簡単に、これまでの議論を要約すると、次のようになるであろう。

(1) 個人的選択と社会的選択は異なり、後者は、必ずしも斉合的であるとは限らず、常に何らかの恣意性を含む。

(2) こうした社会的選択における非斉合性の1つの例が、投票の矛盾と呼ばれる現象である。この現象は、18世紀以来多くの学者によって認識されてきたが、一般的な形で証明したのは、Arrow である。彼は、民主的な社会において、個人の選好を集計するいかなる方

注(13) Niemi は、P. T. David による経験的事例によって現実には、非斉合的な社会的順序付けの可能性が非常に小さいことを示している。「David は、学校への連邦の援助についての3つの代替案に対する学生の選好序列を引き出すために、1つのクラスでの経験を用いた。69人の学生のうち67人(97.1%)が共通のJ scale を満足する選好序列をもった。それは、この論文で用いられたモデルの下で矛盾の可能性を実質的に0にする値である。」R. G. Niemi [38]

(14) ある選択肢が、他のどの選択肢と比較しても常に選好される場合、その選択肢を Condorcet winner という。 $a_1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1 \dots$ の場合、 a_1 は Condorcet winner である。

(15) M. J. Hineh, J. O. Ledyard, and P. C. Ordeshook [26].

法も、斉合的な社会的選択に導き得ないことを証明した。

(3) しかし、この Arrow の一般可能性定理の重要性は、非斉合的な社会的結果に導く可能性に依存している。

(4) Black 以来、Campbell, Tullock, Niemi, Weisberg, Plott, Klahr 等、多くの学者によって、そうした可能性の大きさを計算しようとする試みがなされてきた。

(5) そのうち、Campbell と Tullock による計算結果は、投票の矛盾という現象が、かなり高い確率で生じる可能性のあることを明らかにした。

(6) しかし、彼らの計算は、幾つかの非現実的な仮定の上になされていた。そこで、Niemi と Weisberg は、それらの仮定のうちの1つ(個人の選択は、全く互いに独立で、何らかの制約を受けないという仮定)を緩め、共通の評価尺度が存在する場合には、矛盾の可能性はかなり低下することを明らかにした。

(7) その後、更に、評価次元を複数にしたり、投票の棄権の可能性、あるいは、選好の強さをモデルに含めることによる一般化の試みが Hinch, Ledyard, Ordeshook らによってなされている。彼らは、そこで、上のような要因を含めるならば、多数決ルールは、斉合的な結果をもたらすことを明らかにした。

以上が、このノートで展開された議論の要旨である。こうした議論の展開を通して、われわれは、一応、次のように結論づけることができるであろう。

Arrow の一般可能性定理は、その証明に誤りがないとしても、現実的重要性は、かなり限られたものでしかない。というのは、われわれが、一般に、投票によって社会的選択を得ようとする場合には、事前に、評価尺度についての大まかな一致が得られていると考えられる。すなわち、Arrow の条件のように、各々が全く独立に自らの評価尺度に従って投票するという状況は、ほとんどあり得ない。むしろ、今日の民主主義は、投票による決定は最終的で便宜的な方法で、事前の接触、討論によってできるだけ一致を見出すことがより望ましいと考えられている。とすれば、Niemi の計算結果が示しているように、矛盾の可能性を恐れる必要はないように思われる。

しかし、われわれが冒頭に述べたように、社会的選択は、全員一致という極端な場合以外は、総て何らかの恣意性を含むものであることを注意しなければなら

ない。

6. 多数決原理の意味

最後に、今日、社会的決定ルールとして一般的に用いられている多数決ルールについて、少し考えてみようと思う。

われわれは、このノートの初めに、社会的選択は、何らかの恣意性を含むことを指摘した。例えば、単純多数決ルールでは、最も極端な場合には、49%の反対があっても、51%の賛成の得られた決定は、社会的決定として採用される。この場合には、かなりの恣意性が含まれる。それでは、何故、こうした多数決ルールが一般性を得ているのか。こうしたルール自体が、社会的選択の結果であるとすれば、人々は、その時、いかなる理由で、社会的決定ルールとして多数決ルールを採用することに同意したのか。

Buchanan と Tullock は、constitutional rule の選択の問題に関して興味ある分析を行なった⁽¹⁶⁾。彼らの議論の要点は、社会的意思決定費用と政治的外部費用との合計の最低点で、constitutional rule が決定されるというものである。それを図で示せば、第6図のようになる。この議論から、彼らは、単純多数決ルールは、無数の決定ルールのうちの1つにすぎず、先験的(apriori)にそれを選択するいかなる理由もない、と結論している。そして、ルールを決定するためのルールの選択という無限の繰り返しを避けるため、個々人は、constitutional rule の選択に関して交渉し、最終的に採用されたルールは、全員の同意を必要とすると仮定している。

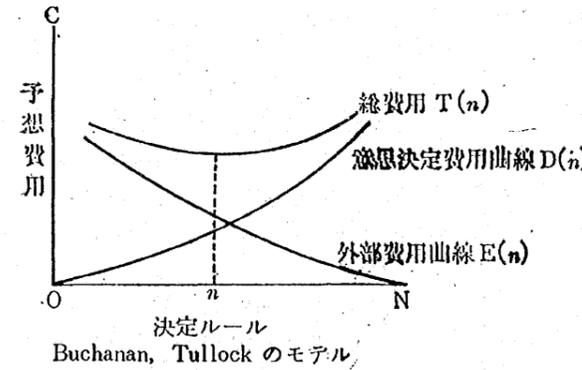
こうした彼らの議論は、constitutional rule の選択に関する基本的に重要な問題を明らかにしているが、何故、単純多数決ルールが一般性を得ているかということの問題には、有効な答を示し得ない(きわめて便宜的には単純多数決ルールが採用された場合不確実な社会においては、長期的に見た場合、自分が多数派に属する可能性と少数派に属する可能性がほぼ等しくなると考えられるので、そのルールの採用に賛成するという答があり得る)。

D. M. Barton は、Buchanan, Tullock らの議論に対する批判を通して、この問題に1つの解を与えている⁽¹⁷⁾。彼は、多数決以下のルールは、それ以上のルールよりも、同意を必要とする人数が表4のようにかえて大

注(16) J. M. Buchanan and G. Tullock (11).

(17) D. M. Barton (3).

第6図



第7図

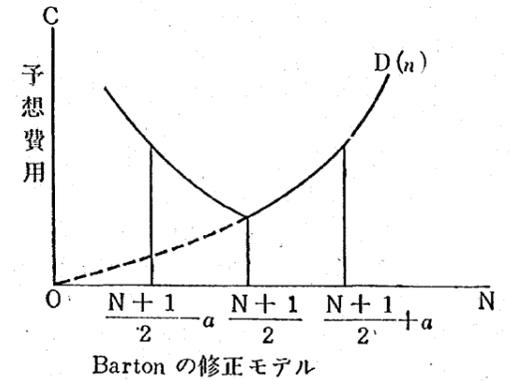


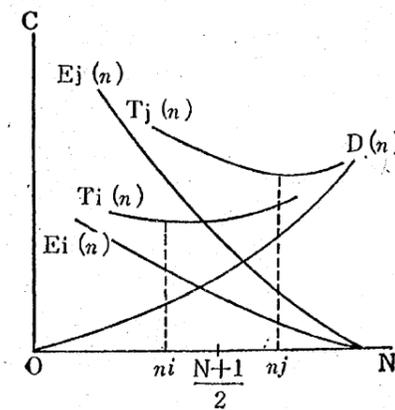
表4

名目のルールの大きさ (A)	明示的に同意を必要とする数 (B)	グループの残りの数 (C)	暗黙に同意を必要とする残りの数* (D)	一致を必要とする総数** (E)
1	1	10	10	11
2	2	9	8	10
3	3	8	6	9
4	4	4	4	8
5	5	6	2	7
6	6	5	0	6
7	7	4	0	7
8	8	3	0	8
9	9	2	0	9
10	10	1	0	10
11	11	0	0	11

* $(N-2n+1)$ if $n < (N+1)/2$; 0 if $n \geq (N+1)/2$.

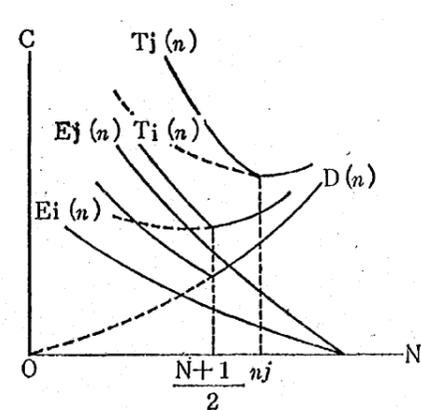
** 実質的なルールの大きさ。

第8図



第9図

2つのモデル比較



きくなるので、Buchanan, Tullock らの示した社会的相互依存費用を表わす図は、第7図のように修正されなければならない。その修正された図においては、単純多数決ルールの場合に意思決定費用が最低となるので、このルールが選択される可能性がはじめのモデルより大きくなるという。

この Barton の議論は、多数決ルールが一般性を得ていることについての説明としては、ある程度の説得性をもっている。しかし、この議論が成り立つのは、選択肢が2つの場合だけであるので一般的ではない。また、彼のモデルでは、多数決以下のルールの選択の可能性が全く排除されてしまうことになり、現実に用いられている少数者ルールを説明し得ない。一般に、人々は、あまり重要でないと考えられる決定に関しては、少数者ルールを受け入れるであろう。

W. J. Baumol は、投票ルールの相違によって生じる個人の投票の持つ影響力の変化に着目し、多数決ルールが、他のルールとは異なった意味をもっていることを示唆している。⁽¹⁸⁾

まず、彼は、総ての投票ルールは、その同意が、変化を起こすに十分な人数を特定化するばかりでなく、変化を阻止することのできる人数をも特定化するという2つの側面をもっていることを指摘する。例えば、2/3 の投票ルールは、投票者の67%が、ある案に賛成しなければならぬということを意味する一方、投票者の34%に、その案の成立を阻止する力を与えるということをも含んでいる。それ故、次のように言うことができる。多数決ルールと全員一致ルールとの間の可能性を考えるならば、全員一致に近づくにつれて少数者の持つ影響力は大きくなる。そこで、多数決ルールは、次のような意味をもつ。「...それ(多数決ルール)は、保守的少数者の専制を最小化する一方、同時に、いかなる少数者にも、変化を始めるための一方的力を与えないと言いうるルールである。つまり、他人へ費用を課すことと、他人へ費用が移転されないようにすることとの間には、ほとんど差はない。力は、費用を課すことのできるグループにも、それを防ぐことのできるグループにも、共に存在する。多数決ルールは、これらのグループのより小さな方を、できるだけ大きくする1つの装置である。」

以上の議論を通して、われわれは、多数決ルールが、他のルールにはないある特性をもっていることを知っ

注(18) W. J. Baumol [4].

た。それは、われわれが、当然のこととして受け入れてきた多数決ルールの意味をある程度明らかにし、更には、民主主義を考える1つの手掛りを与えてくれる。

参考文献

- A. J. S. American Journal of Sociology
 A. P. S. R. American Political Science Review
 B. S. Behavioral Science
 E. J. Economic Journal
 J. E. Th. Journal of Economic Theory
 J. P. E. Journal of Political Economy
 P. C. Public Choice
 Q. J. E. Quarterly Journal of Economics
 R. E. S. Review of Economics and Statistics
- [1] Arrow, K. J., Social Choice and Individual Values, 1951; 2nd ed. 1965.
 [2] —, "Values and Collective Decision Making," in Hook, [27].
 [3] Barton, D. M., "Constitutional Choice and Simple Majority Rule: Comment." J.P.E. 1972.
 [4] Baumol, W. J., Welfare Economics and the Theory of the State, 1952; 2nd ed. 1966.
 [5] Black, D., "On the Rationale of Group Decision Making," J.P.E. 56, 1948.
 [6] —, The Theory of Committees and Elections, 1958.
 [7] Blau, J. H., "The Existence of Social Welfare Function," Econometrica, 25, 1957.
 [8] Bowen, H. R., "The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources," Q.J.E. 58, 1943.
 [9] Bowen, B. D., "Toward an Estimate of the Frequency of Occurrence of the Paradox of Voting in U.S. Senate roll call votes," in R. G. Niemi & H. F. Weisberg (eds.) Probability Models of Collective Decision Making, 1972.
 [10] Buchanan, J. M., "Individual Choice in Voting and the Market," J.P.E. 62, 1954.
 [11] Buchanan, J. M., & Tullock, G., The Calculus of Consent, 1962.
 [12] Campbell, C. D., & Tullock, G., "A Measure of the importance of Cyclical Majorities," E. J., 75,

1965.
 [13] —, "The Paradox of Voting—A Possible Method of Calculation," A.P.S.R., 60, 1966.
 [14] Coleman, J. S., "Foundations for a Theory of Collective Choice," A.J.S., 71, 1966.
 [15] —, "The Possibility of a Social Welfare Function," A.E.R., 56, 1966.
 [16] Dahl, R. A., A Preface to Democratic Theory, 1956.
 [17] Dahl, R. A., & Lindblom, Politics, Economics & Welfare, 1954.
 [18] DeMeyer, F., & Plott, C. R., "The Possibility of a Cyclical Majority," Econometrica, 38, 1970.
 [19] Downs, A., An Economic Theory of Democracy, 1956.
 [20] —, "In Defence of Majority Voting," J.P.E. 69, 1961.
 [21] Farguharson, S., Theory of Voting, 1969.
 [22] Fishburn, P. C., "Intransitive Individual Indifference and Transitive Majorities," Econometrica, 38, 1970.
 [23] —, The Theory of Social Choice, 1973.
 [24] Garman, M., & Kamien, M., "The Paradox of Voting: Probability Calculations," B.S., 13, 1968.
 [25] Gleser, L. J., "The Paradox of Voting: Some Probabilistic Results," P.C. 7, 1969.
 [26] Hinch, M. J., Ledyard, J. O. & Ordeshook, P. C., "The Existence of Equilibrium under Majority Rule," J.E.Th., 1972.
 [27] Hook, S., ed., Human Values and Economic Policy, 1967.
 [28] Inada, K., "Alternative Incompatible Conditions for a Social Welfare Function," Econometrica, 23, 1955.
 [29] —, "A Note on the Simple Majority Decision Rule," Econometrica, 32, 1964.
 [30] —, "On the Simple Majority Decision Rule," Econometrica, 37, 1969.
 [31] Klahr, D. A., "Computer Simulation of the Paradox of Voting," A.P.S.R., 60, 1966.
 [32] Margolis, J., ed., The Public Economy of Urban Committees, 1965.
 [33] May, K. O., "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision," Econometrica, 20, 1952.
 [34] —, "Intransitivity, Utility and Aggregation in Preference Patterns," Econometrica, 41, 1966.
 [35] Murakami, Y., Logic and Social Choice, 1968.
 [36] Nicholson, M. B., "Conditions for the Voting Paradox in Committee Decisions," Metroeconomica, 42, 1965.
 [37] Niemi, R., & Weisberg, H., "A Mathematical Solution for the Possibility of the Paradox of Voting," B.S., 13, 1968.
 [38] Niemi, R., "Majority Decision-Making with Partial Unidimensionality," A.P.S.R., 63, 1969.
 [39] Niemi, R., & Weisberg, H., "Probability Calculations for Cyclical Majorities in Congressional Voting," in R. G. Niemi & H. F. Weisberg, (eds.) Probability Models of Collective Decision Making, 1972.
 [40] Plott, C. R., "A Notion of Equilibrium and Its Possibility under Majority rule," A.E.R., 57, 1967.
 [41] Riker, W., "Voting and the Summation of Preferences: An Interpretative Bibliographical Review of Selected Developments During the Last Decade," A.P.S.R., 55, 1961.
 [42] —, "Arrow's Theorem and Some Examples of the Paradox of Voting," in Ulmer [51]
 [43] Riker, W., & Ordeshook, P. C., An Introduction to Positive Political Theory, 1973.
 [44] Samuelson, P. A., "Pure Theory of Public Expenditure and Taxation," in Margolis & Guitton, (eds.) Public Economics, 1969.
 [45] Sen, A. K., "A Possibility Theorem on Majority Decisions," Econometrica, 34, 1966.
 [46] —, "Quasi-Transitivity, Rational Choice and Collective Decisions," R.E.S., 78, 1970.
 [47] —, Collective Choice and Social Welfare, 1970.
 [48] Simpson, P. B., "On Defining Areas of Voter Choice," Q.J.E., 1969.
 [49] Tullock, G., "The General Irrelevance of the General Impossibility Theorem," Q.J.E., 81, 1967.
 [50] —, Towards a Mathematics of Politics, 1968.
 [51] Ulmer, S., et al., Mathematical Applications in Political Science, 1965.
 [52] Williamson, O. E., & Sargent, J. G., "Social Choice: A Probabilistic Approach," E. J., 77, 1967.
 (慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程)