Title	外部性と競争均衡の最適性
Sub Title	Pareto optimality of competitive equilibria in the presence of externalities
Author	長名, 寛明
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1973
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.66, No.11 (1973. 11) ,p.827(19)- 843(35)
JaLC DOI	10.14991/001.19731101-0019
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19731101-0019

外部性と競争均衡の最適性*

長　名　寛　明

外部経済や不経済が存在する場合の Pareto 最適と競争均衡との関係は，既に古くから Pigou〔11〕, Meade〔7〕, Lange〔5〕, Graaff〔4〕等によって論じられており，主として「外部性が存在する場合には，競争均衡は一般には Pareto 最適とはならない」という否定的結論が下されてきた。しかし，この結論は「外部性が存在する場合には，競争均衡は Pareto 最適になり得ない」という不可能性定理ではないから，競争均衡が Pareto 最適になり得る場合を見つけ出そうという試みは無意味ではない。

Arrow〔1〕および Debreu〔2, 3〕等によって外部性がない場合について確立された「厚生経済学の基本定理」を外部性が存在する場合に拡張しようとする Ledyard〔6〕および Osana〔9, 10〕の試みは，実はこの可能性を追求したものである。そこでは客観的な技術的可能性と経済主体のそれについての主観的な判断との関係に注目し，それを規定するものを「情報」と名付け，いかなる情報があれば競争均衡が Pareto 最適になるか，また，いかなる情報があれば Pareto 最適が競争均衡として達成され得るか，という問題に対する1つの答が与えられた。そこで展開された議論は論理的には極めて一般的であるが，反面その一般性が外部性の性質そのものの役割を議論の背後に隠してしまうという欠点を持っているように思われる。

そこで本稿では，この点を浮き彫りにするために，各経済主体は客観的な技術的可能性を完全に知っているという「完全情報」の仮定に基づいて議論を展開してみようと思う。この仮定は Ledyard〔6〕および Osana〔9, 10〕のモデルの特殊ケースを考えることを意味するから，以下の議論は理論の一般化を目指すものではなく，この特殊な仮定の含意を追求することによって外部性の役割を明確にすることを目指すものである。この仮定は，実は伝統的な Pigou-Meade-Lange-Graaff 流の議論においても暗黙になされていたのであるから，以下の議論はそれらとの関係を一層明らかにするのにも役立つであろう。

1. 予備的考察

* 本稿に報告される研究は松永記念科学振興財団の研究費補助を受けて行われた。記して謝意を表したい。

一般的な議論に入る前に簡単な例を用いて考察することが問題点の理解を助けるであろう。1種類の生産物，1種類の生産要素，2人の生産者，と1人の消費者から成る経済を考えよう。生産者 j が投入する生産要素量を x_j，生産物の産出量を y_j で表わすことにする。

生産者1に与えられた投入産出の技術的可能性が集合

$$Y_1=\{(x_1, y_1)\in R_+{}^2 : y_1\leqq f(x_1)\}$$

によって表わされるものと仮定しよう。ただし，$R_+{}^2$ は2次元ユークリッド空間の非負象限を表わし，f は非負の実数の集合 R_+ から R_+ への函数であり，次の性質を持つ：

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=\infty,$$

$$f'(x_1)>0 \text{ and } f''(x_1)<0 \text{ for every } x_1>0.$$

つまり，f は逓減する正の限界生産力を持ついわゆる生産函数であり，Y_1 はいわゆる生産可能性集合である。生産者1にとって可能な産出高の集合は，

$$Z_1=\{y_1\in R_+ : y_1\leqq f(x_1) \text{ for some } x_1\geqq 0\}$$

である。以上の定式化の中で生産者1の生産可能性は他の経済主体の活動から独立である，すなわちいかなる外部経済も不経済も受けないということが暗黙に仮定されていることに注意しておこう。

他方，生産者2の生産可能性は生産者1の生産活動に依存し，生産者1の産出高 $y_1\in Z_1$ が与えられた時の生産者2の生産可能性は，集合

$$Y_2(y_1)=\{(x_2, y_2)\in R_+{}^2 : y_2\leqq g(y_1, x_2)\}$$

によって表わされるものとしよう。ただし，g は次の性質を持つ $R_+{}^2$ から R_+ への函数である：

$$g(y_1, 0)=0,\ \ g_2(y_1, 0)=\infty,$$

$$g_2(y_1, x_2)>0,\ \ g_{22}(y_1, x_2)<0,$$

$$g_{11}(y_1, x_2)g_{22}(y_1, x_2)-(g_{12}(y_1, y_2))^2>0$$

for every $(y_1, x_2)>0$. ここで g の添字は偏導函数を表わす。

最後に，消費者の消費可能性は，集合

$$X=\{(x, y)\in R^2 : x\leqq\bar{x} \text{ and } y\geqq 0\}$$

によって表わされるものとし，彼の選好関係は次の性質を持つX上の実数値函数Uによって表わされるものとしよう：

$$U_1(\bar{x}, y)=-\infty,\ \ U_2(x, 0)=\infty,$$

$$U_1(x, y)<0,\ \ U_2(x, y)>0,$$

$$U_{11}(x, y)<0, \text{ and}$$

$$U_{11}(x, y)U_{22}(x, y)-(U_{12}(x, y))^2>0$$

for every $(x, y)\in X^\circ=\{(x, y)\in R^2 : x<\bar{x} \text{ and } y>0\}$. ここで $\bar{x}$ は正の実数であり，消費者の生産要素供給量の可能な最大値を表わす。

以上で本節で用いるモデルの形式的記述は完結した。あまりに単純であるために，このモデルに具体的なイメージを与えることは容易ではないが，例えばここでの消費者は労働という生産要素を持った多くのメンバーから成る1つの家計であり，2人の生産者は同一の川の上流と下流にそれぞれ漁場を持つ漁業経営者であり，労働者を雇って魚を獲るという生産活動に従事していると考えることができる。上流の漁場を持つ者が生産者1であり，下流の漁場を持つ者が生産者2であると想定しておこう。

この経済の状態は消費者の消費 (x, y)，生産者1の生産 (x_1, y_1)，および生産者2の生産 (x_2, y_2) を指定することによって定まる。達成可能な状態の集合は

$$A=\{(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) \in R^6 : (x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) \in X \times R_+{}^2 \times R_+{}^2,$$
$$x=x_1+x_2,\ \ y=y_1+y_2,\ \ y_1 \leqq f(x_1),\ \text{and}\ \ y_2 \leqq g(y_1, x_2)\}$$

によって表わされる。Aは R^6 の原点を含むから空集合ではなく，またAがコンパクトであることを見るのも困難ではない。従って達成可能な消費の集合

$$\hat{X}=\{(x, y) \in X : (x, y, x_1, y_1, x_2, y_2) \in A \text{ for some } (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R^4\}$$

も非空かつコンパクトである。

Pareto 最適とはすべての $(x, y) \in \hat{X}$ に対して $U(x^*, y^*) \geqq U(x, y)$ となるような達成可能な状態 $(x^*, y^*, x_1{}^*, y_1{}^*, x_2{}^*, y_2{}^*)$ であり，他方，競争均衡状態とは次の条件を満足する達成可能な状態 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ である：

(i) すべての $(x_1, y_1) \in Y_1$ に対して $\hat{y}_1 - w\hat{x}_1 \geqq y_1 - wx_1$,

(ii) すべての $(x_2, y_2) \in Y_2(\hat{y}_1)$ に対して $\hat{y}_2 - w\hat{x}_2 \geqq y_2 - wx_2$,

(iii) $y \leqq wx + (\hat{y}_1 - w\hat{x}_1) + (\hat{y}_2 - w\hat{x}_2)$ を満足するすべての $(x, y) \in X$ に対して $U(\hat{x}, \hat{y}) \geqq U(x, y)$

となるような正の実数 w が存在する。

w は生産物の価格を1とした時の労働の価格すなわち実質賃金率である。条件(i)は，この実質賃金率で評価した生産者1の利潤が $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ において最大化されていることを表現している。条件(ii)は，生産者2にとっての利潤最大化を表わすが，生産者2は生産者1が $\hat{y}_1$ という産出水準を変えないであろうと想定して利潤最大化を行っている，と考えられていることに注意する必要がある。条件(iii)は，消費者が所得の制約の下に満足を最大化していることを表現している。所得は賃金所得 wx と利潤所得 $(\hat{y}_1 - w\hat{x}_1) + (\hat{y}_2 - w\hat{x}_2)$ から成っている。つまり，ここでは私有財産経済が想定されているのであり，生産者が獲得する利潤はすべて消費者に分配し尽されるものと仮定している。このように条件(i), (ii), (iii)は，主体的均衡の条件を示している。需給が均衡しているという市場均衡の条件は，競争均衡状態が達成可能な状態であるという性質の中に含まれている。

さて，この単純なモデルについて Pareto 最適の必要条件を求めてみよう。$(x^*, y^*, x_1{}^*, y_1{}^*, x_2{}^*, y_2{}^*)$ を Pareto 最適とする。Lagrange 函数

$$U(x_1+x_2, y_1+y_2)+q_1(f(x_1)-y_1)+q_2(g(y_1, x_2)-y_2)+q_3(\bar{x}-x_1-x_2)$$

を作れば，U, f, g がすべて凹函数であるから，$(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, q_1^*, q_2^*, q_3^*)$ がこの Lagrange 函数の鞍点となるような非負の実数の組 $(q_1^*, q_2^*, q_3^*)\geqq 0$ が存在する（例えば，二階堂〔8, 定理 37.3〕を見よ）。従って次の関係が成立する。

(1) $U_1(x^*, y^*)+q_1^*f'(x_1^*)-q_3^*\leqq 0$ with equality if $x_1^*>0$,

(2) $U_1(x^*, y^*)+q_2^*g_2(y_1^*, x_2^*)-q_3^*\leqq 0$ with equality if $x_2^*>0$,

(3) $U_2(x^*, y^*)-q_1^*+q_2^*g_1(y_1^*, x_2^*)\leqq 0$ with equality if $y_1^*>0$,

(4) $U_2(x^*, y^*)-q_2^*\leqq 0$ with equality if $y_2^*>0$,

(5) $q_1^*(f(x_1^*)-y_1^*)=0$,

(6) $q_2^*(g(y_1^*, x_2^*)-y_2^*)=0$,

(7) $q_3^*(\bar{x}-x_1^*-x_2^*)=0$.

まず(4)より，$y^*=y_1^*+y_2^*>0$ 従って，また $x^*=x_1^*+x_2^*>0$ となる。もし $x_2^*=0$ であれば(2)により $q_2^*=0$ となり，(4)と矛盾するから $x_2^*>0$ である。$U_1(\bar{x}, y^*)=-\infty$ だから，(2)により $x_1^*+x_2^*<\bar{x}$ となる。ここで $x_1^*=0$ と仮定してみよう。(1)により$q_1^*=0$ であり，他方 $y_1^*=f(x_1^*)=0$ だから$y_2^*>0$ となる。従って(4)により $q_2^*=U_2(x^*, y^*)>0$，故に(3)により $q_2^*(1+g_1(y_1^*, x_2^*))\leqq 0$，結局 $1+g_1(y_1^*, x_2^*)\leqq 0$ となる。要するに $x_1^*>0$ あるいは $1+g_1(y_1^*, x_2^*)\leqq 0$ の少なくとも一方が必ず成立する。(5)および(6)を考慮すれば，以上の議論から次のことを主張することができる。すなわち，$(x^*, y^*, x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ が Pareto 最適であれば，

(a) $y_1^*=f(x_1^*)\geqq 0$,

(b) $y_2^*=g(y_1^*, x_2^*)>0$,

(c) $U_1(x^*, y^*)+g_2(y_1^*, x_2^*)U_2(x^*, y^*)=0$,

(d) $x_1^*>0$ または $1+g_1(y_1^*, x_2^*)\leqq 0$,

(e) $(1+g_1(y_1^*, x_2^*))f'(x_1^*)\leqq g_2(y_1^*, x_2^*)$ with equality if $x_1^*>0$

が成立つ。U, f，および g は凹函数だから，この逆も成立つ。つまり条件(a)~(e)が満たされれば達成可能な状態 $(x^*, y^*, x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ は Pareto 最適である（例えば二階堂〔8, 注意 37.5 および定理 37.2〕を見よ）。

次に競争均衡状態の必要条件を求めよう。$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ を競争均衡状態とする。その場合，競争均衡状態の定義の条件(i)，(ii)，および(iii)を満足する均衡実質賃金率 $w>0$ が存在する。Lagrange 函数

$$y_1-wx_1+q_4(f(x_1)-y_1)$$

を考えよう。条件(i)により $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{q}_4)$ がこの Lagrange 函数の鞍点となるような非負の実数 $\hat{q}_4$ が存在する。従って

(8)　$-w+\hat{q}_4 f'(\hat{x}_1)\leqq 0$ with equality if $\hat{x}_1>0$,

(9)　$1-\hat{q}_4\leqq 0$ with equality if $\hat{y}_1>0$,

(10)　$\hat{q}_4(f(\hat{x}_1)-\hat{y}_1)=0$

が成立する。(8)と(9)より $\hat{x}_1>0$ だから $\hat{q}_4 f'(\hat{x}_1)=w$ また $\hat{y}_1>0$ となる。故に $\hat{q}_4=1$ 従って $f'(\hat{x}_1)=w$ 他方(10)より $\hat{y}_1=f(\hat{x}_1)$ となる。

生産者2についても Lagrange 函数

$$y_2-wx_2+q_5(g(\hat{y}_1, x_2)-y_2)$$

を作れば，

(11)　$-w+\hat{q}_5 g_2(\hat{y}_1, \hat{x}_2)\leqq 0$ with equality if $\hat{x}_2>0$,

(12)　$1-\hat{q}_5\leqq 0$ with equality if $\hat{y}_2>0$,

(13)　$\hat{q}_5(g(\hat{y}_1, \hat{x}_2)-\hat{y}_2)=0$

となる $\hat{q}_5\geqq 0$ が存在する。従って $\hat{y}_2=g(\hat{y}_1, \hat{x}_2)>0$ かつ $g_2(\hat{y}_1, \hat{x}_2)=w$ となる。

最後に消費者について Lagrange 函数

$$U(x, y)+q_6(\hat{y}-w\hat{x}+wx-y)+q_7(\bar{x}-x)$$

を作れば，

(14)　$U_1(\hat{x}, \hat{y})+w\hat{q}_6-\hat{q}_7\leqq 0$ with equality if $\hat{x}>0$,

(15)　$U_2(\hat{x}, \hat{y})-\hat{q}_6\leqq 0$ with equality if $\hat{y}>0$,

(16)　$\hat{q}_7(\bar{x}-\hat{x})=0$

となる非負の実数の組 $(\hat{q}_6, \hat{q}_7)$ が存在する。$\hat{x}_1>0$ また $\hat{x}_2>0$ だから $\hat{x}=\hat{x}_1+\hat{x}_2>0$ 従って(14)より $U_1(\hat{x}, \hat{y})+w\hat{q}_6=\hat{q}_7$ となる。故に $\hat{x}<\bar{x}$, 従って(16)より $\hat{q}_7=0$ となる。従って $U_1(\hat{x}, \hat{y})+w\hat{q}_6=0$。他方(15)より $\hat{y}>0$ かつ $\hat{q}_6=U_2(\hat{x}, \hat{y})$ だから $U_1(\hat{x}, \hat{y})+wU_2(\hat{x}, \hat{y})=0$ である。以上を要約すれば，$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ が競争均衡状態であれば，

(f)　$\hat{y}_1=f(\hat{x}_1)>0$,

(g)　$\hat{y}_2=g(\hat{y}_1, \hat{x}_2)>0$,

(h)　$f'(\hat{x}_1)=g_2(\hat{y}_1, \hat{x}_2)=-\dfrac{U_1(\hat{x}, \hat{y})}{U_2(\hat{x}, \hat{y})}$

が成立する，という主張が証明された。再び U, f, および g が凹函数であることに注目すれば，(f)〜(h)は達成可能な状態 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ が競争均衡状態であるための十分条件であることがわかる。

Pareto 最適の必要十分条件(a)〜(e)と競争均衡状態の必要十分条件(f)〜(h)を比較すれば，本節の主要結果である次の主張を得る：競争均衡状態 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ は条件 $g_1(\hat{y}_1, \hat{x}_2)=0$ が満たされるならば，しかもその場合に限り，Pareto 最適である。また Pareto 最適 $(x^*, y^*, x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ は条件 $g_1(y_1^*, x_2^*)=0$ が満たされるならば，しかもその場合に限り，競争均衡状態である。

本節の極めて単純化されたモデルにおいては，厚生経済学の基本定理が成立するための必要十分条件は $g_1(y_1, x_2)=0$ という形の条件に要約される。この条件の意味を少し詳しく見ることにしよう。そのためには限界的な外部効果と総体的な外部効果という２つの概念を区別して考えることが有益であるように思われる。不等式 $g(y_1, x_2)>g(0, x_2)$ が成立する時，y_1 は x_2 における生産者２の生産可能性に対して総体的な外部経済をもたらし，逆の不等号が成立する時は，総体的な外部不経済をもたらす，と言うことにし，他方，不等式 $g_1(y_1, x_2)>0$ が成立する時，y_1 は x_2 における生産者２の生産可能性に対して限界的な外部経済をもたらし，逆の不等号が成立する時は，限界的な外部不経済をもたらす，と言うことにしよう。その場合，条件 $g_1(y_1, x_2)=0$ は生産者２の生産可能性に対する y_1 の限界的外部効果が x_2 において零であることを意味することになる。$g_{11}(y_1, x_2)<0$ がすべての $(y_1, x_2)>0$ に対して成立するという仮定を考慮すれば，この条件は生産者１の産出活動が生産者２の生産可能性に対して持つ総体的な外部経済効果が (y_1, x_2) において最大化されていることを意味する。従って先に証明された主要結果は，次のように言い替えることができる：競争均衡状態 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{x}_2, \hat{y}_2)$ は，生産者２が生産者１のもたらす外部経済効果を最大限に享受しているならば，しかもその場合に限り，Pareto 最適になる。他の１つの主張は，すべての $(y_1, x_2)>0$ に対して $g_{11}(y_1, x_2)<0$ が成立するという仮定には依存しないから，次のように述べることができる：Pareto 最適 $(x^*, y^*, x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ は，生産者１の産出が生産者２に対して与える限界的外部効果が零であるならば，しかもその場合に限り，競争均衡状態である。

次節以下の本論で明らかにされるように，この主要命題は一般的な場合に拡張され得る。本節を締め括る前に，総体的な外部経済効果が最大化されているという条件の１つの便利な表現を求めておくことにする。任意の $\bar{y}_1 \in Z_1$ を固定しよう。生産者１の産出活動が生産者２の生産可能性に与える総体的な外部経済効果が $\bar{y}_1$ において最大化されているという条件は，「すべての $(y_1, x_2)\geqq 0$ に対して $g(y_1, x_2)\leqq g(\bar{y}_1, x_2)$ が成立つ」あるいは本節の仮定の下では単に「すべての $x_2\geqq 0$ に対して $g_1(\bar{y}_1, x_2)=0$ が成立つ」という形に表現できる。

ここで「すべての $(y_1, x_2)\geqq 0$ に対して $g(y_1, x_2)\leqq g(\bar{y}_1, x_2)$ が成立つならば，すべての $y_1 \in Z_1$ に対して $Y_2(y_1)\subseteq Y_2(\bar{y}_1)$ となる」ことを証明しよう。実際，もし $y_1 \in Z_1$ かつ $(x_2, y_2) \in Y_2(y_1)$ であれば，$0\leqq y_2\leqq g(y_1, x_2)\leqq g(\bar{y}_1, x_2)$ だから $(x_2, y_2) \in Y_2(\bar{y}_1)$ となる。

次にこの逆を証明するために

$$Z_1'=\{y_1 \in R_+ :\ y_1\leqq f(x_1), y_2\leqq g(y_1, x_2),\ \text{and}\ x_1+x_2\leqq \bar{x}\ \text{for some}\ (x_1, x_2, y_2)\geqq 0\}$$

とおこう。明らかに $Z_1'=\{y_1 \in R_+ : y_1\leqq f(\bar{x})\}$ となる。さてすべての $y_1 \in Z_1'$ に対して $Y_2(y_1)\subseteq Y_2(\bar{y}_1)$ が成立つものと仮定しよう。$x_2\geqq 0$ かつ $y_1 \in Z_1'$ とする。$y_2=g(y_1, x_2)$ とおけば $(x_2, y_2) \in Y_2(y_1)\subseteq Y_2(\bar{y}_1)$ だから $y_2\leqq g(\bar{y}_1, x_2)$ となる。すなわち，すべての $y_1 \in Z_1'$ と $x_2\geqq 0$ に対して $g(\bar{y}_1, x_2)\geqq g(y_1, x_2)$ となる。かくして「すべての $y_1 \in Z_1'$ に対して $Y_2(y_1)\subseteq Y_2(\bar{y}_1)$ が成立つならば，すべての $y_1 \in Z_1'$

と $x_2 \geqq 0$ に対して $g(\bar{y}_1, x_2) \geqq g(y_1, x_2)$ となる」ことが証明された。

以上2つの主張をまとめると，「すべての $y_1 \in Z_1'$ と $x_2 \geqq 0$ に対して $g(\bar{y}_1, x_2) \geqq g(y_1, x_2)$ となることとすべての $y_1 \in Z_1'$ に対して $Y_2(y_1) \subseteq Y_2(\bar{y}_1)$ となることとは同値である」という命題を得る。次節以下では，総体的な外部経済効果が最大化されているということを後者の形で表現する。

2. 一般的な経済モデル

l 種類の商品，m 人の消費者，n 人の生産者から成る経済を考える。消費者の集合を $I=\{1, 2, \cdots, m\}$，生産者の集合を $J=\{1, 2, \cdots, n\}$ によって表わそう。各消費者 $i \in I$ に対して彼の消費は l 次元ユークリッド空間 R^l の点 x_i によって表わされる。ある財が彼によって投入される，あるいは通常の言葉を使うならば，消費される場合，その量は正の実数によって表わされ，他方ある財が彼によって産出される，あるいは通常の言葉を使うならば，供給される場合，その量は負の実数によって表わされるという符号の取扱いに関する約束を設けておくことにする。各生産者 $j \in J$ に対しても彼の生産は R^l の点 y_j によって表わされる。この場合は消費の場合と逆の符号に関する約束を設ける。すなわち産出量は正の実数，投入量は負の実数で表わす。m 人の消費者の消費を一まとめにしたものを消費配分と呼び，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ で表わす。他方 n 人の生産者の生産を一まとめにしたものを生産配分と呼び，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ で表わす。明らかに x は R^{lm} の点であり，y は R^{ln} の点である。消費配分と生産配分の組 (x, y) を状態と呼ぶことにする。この経済の中の経済主体，すなわち消費者と生産者の物理的(経済外的)能力，例えば消費者の肉体的能力や生産者の技術的能力，によって可能な状態の集合が定まる。これをDで表わそう。Dは明らかに $R^{l(m+n)}$ の部分集合である。

消費配分 x から消費者 i の消費 x_i を除去したものを $x_{)i(}$ で表わすことにする，すなわち $x_{)i(}=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m)$ と書くことにする。更に $x_{)i(}$ に x_i をつけ加えて消費配分を表わす時には $(x_i, x_{)i(})$ という記号を用いる，つまり $(x_i, x_{)i(})=(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_m)$ と書くことにする。状態 (x, y) から x_i を除去した $(x_{)i(}, y)$ を消費者 i の情況と呼ぼう。消費者 i の可能な情況の集合は，

$$B_i=\{(x_{)i(}, y) \in R^{l(m-1+n)}:\quad ((x_i, x_{)i(}), y) \in D \text{ for some } x_i \in R^l\}$$

によって表わされる。同様の記号法を用いれば，生産者 j の可能な情況の集合は，

$$C_j=\{(x, y_{)j(}) \in R^{l(m+n-1)}:(x, (y_j, y_{)j(})) \in D \text{ for some } y_j \in R^l\}$$

によって表わされる。消費者 i の可能な情況 $(x_{)i(}, y)$ が与えられた時，彼にとって可能な消費の集合は，

$$X_i(x_{)i(}, y)=\{x_i \in R^l:\quad ((x_i, x_{)i(}), y) \in D\}$$

によって表わされる。同様に生産者 j にとって情況 $(x, y_{\backslash j}) \in C_j$ の下で可能な生産の集合は,

$$Y_j(x, y_{\backslash j}) = \{y_j \in R^l:\ (x, (y_j, y_{\backslash j})) \in D\}$$

である。

この経済に与えられた資源の賦存量を ω で表わそう。ω は R^l の点である。達成可能な状態の集合は,

$$A = \{(x, y) \in D:\ \textstyle\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} y_j \leqq \omega\}$$

で表わされる。

可能な状態の集合Dと資源の賦存量 ω に加えて,この経済を特徴づける最後の要素は各消費者の選好関係である。各 $i \in I$ に対して彼の選好関係はDの上で定義された全擬順序 $\precsim_i$ である。$(x, y) \succsim_i (x', y')$ は状態 (x, y) は消費者 i にとって少なくとも状態 (x', y') と同じ程度に望ましいことを意味しているものと解釈される。$(x, y) \succsim_i (x', y')$ かつ $(x', y') \succsim_i (x, y)$ である場合 $(x, y) \sim_i (x', y')$ と書き,$(x, y) \succsim_i (x', y')$ であり $(x', y') \succsim_i (x, y)$ ではない場合 $(x, y) \succ_i (x', y')$ と書くことにする。

可能な状態 $(x, y) \in D$ が与えられた時,Pareto の意味でそれより良い状態の集合を

$$P(x, y) = \{(x', y') \in D:\ (x', y') \succsim_i (x, y) \text{ for every } i \in I \text{ and } (x', y') \succ_i (x, y) \text{ for some } i \in I\}$$

によって表わせば,Pareto 最適の集合は,

$$P = \{(x, y) \in A:\ P(x, y) \cap A = \phi\}$$

となる。つまり Pareto 最適とはそれよりも Pareto の意味で良く,しかも達成可能な状態が存在しないような達成可能な状態である。他方,競争均衡状態の集合は次のように定義される:

$C = \{(x, y) \in A:$ There is $p \in R^l$ such that

(i) $p \geqq 0$ and $p \cdot (\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} y_j - \omega) = 0$,

(ii) for every $i \in I$, $(x, y) \succsim_i ((x_i', x_{\backslash i}), y)$ for every $x_i' \in X_i(x_{\backslash i}, y)$ such that $p \cdot x_i' \leqq p \cdot x_i$, and

(iii) for every $j \in J$, $p \cdot y_j \geqq p \cdot y_j'$ for every $y_j' \in Y_j(x, y_{\backslash j})\}$.

競争均衡状態は達成可能でなければならない,特に各財の総需要量は総供給量を超えることはできない。しかも総供給量が総需要量を超えるような財があれば,その財は自由財になる,すなわち価格が零になる,ということが条件(i)によって要求されている。条件(i)は,更にどの財の価格も負になり得ないことを要求している。以上は市場均衡の条件である。条件(ii)は,消費者の主体的均衡を表現している。すなわち,各消費者は他の経済主体が行動を変えないと想定する限り,その均衡状態で支出する費用の範囲内では更に望ましい状態に移ることが不可能な状態にいる,ということが要求されている。いわゆる所得制約の下での満足の最大化が実現している状態である。最後の条件(iii)は,各生産者は他の経済主体が行動を変えないと想定した場合に自らにとって技術的に可能な投入産出の組合せの中で利潤を最大化するものを選択している,という要求である。

厚生経済学の基本定理は，この2つの集合PとCの間に存在する関係を説明しようとするものであるが，Cと類似の概念として「補整的均衡状態」の集合と呼ばれるものを定義しておくことが便利である。そのために，可能な状態 $(x, y)\in$ D と消費者 $i\in$ I が与えられた時，他の経済主体は行動を変えないと想定した場合に，彼にとって (x, y) と少なくとも同じ程度に望ましい状態をもたらす消費の集合を，

$$X_i^+(x, y)=\{x_i'\in X_i(x_{|i}, y):\ ((x_i', x_{|i}), y)\succsim_i(x, y)\}$$

によって表わそう。その場合，補整的均衡状態の集合は，

$$C'=\{(x, y)\in A:\ \text{There is } p\in R^l \text{ such that}$$

$$\text{(i)}\ p\geqq 0 \text{ and } p\cdot(\textstyle\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}y_j-\omega)=0,$$

$$\text{(ii)}\ \text{for every } i\in I,\ p\cdot x_i\leqq p\cdot x_i' \text{ for every } x_i'\in X_i^+(x, y), \text{ and}$$

$$\text{(iii)}\ \text{for every } j\in J,\ p\cdot y_j\geqq p\cdot y_j' \text{ for every } y_j'\in Y_j(x, y_{|j})\}$$

によって定義される。C と C′ の相違は条件(ii)，すなわち消費者の主体的均衡条件の差にある。C′ の条件(ii)は，各消費者は他の経済主体が行動を変えないと想定した場合に少なくとも (x, y) と同じ満足を得るという条件の下で支出を最小化していることを要求している。C を規定する満足の最大化と C′ を規定する支出の最小化という2条件の関係は外部性が存在しない場合については，Debreu〔2, Theorems (1) and (2) of 4.9〕において詳しく述べられており，同じ議論が外部性が存在する場合にも妥当であるから，ここでは触れない (Osana〔9, Lemmas 1 and 2〕および Osana〔10〕にある訂正を参照)。

3.　競争均衡は Pareto 最適であるか？

本節では競争均衡状態が Pareto 最適となるための，いわば必要十分条件を求めて，その条件の意味を多少詳しく吟味する。

以下の議論では，「局所的非飽和」の仮定が必要である。先ず，形式的に局所的非飽和の仮定を満足する状態の集合を，

$$S=\{(x, y)\in D:\ \text{For every } i\in I,\ \text{every } x_i'\in X_i(x_{|i}, y), \text{ and every } \varepsilon>0, \text{ there is}$$
$$x_i''\in X_i(x_{|i}, y) \text{ such that } \|x_i'-x_i''\|<\varepsilon \text{ and } ((x_i'', x_{|i}), y)\succ_i((x_i', x_{|i}), y)\}$$

によって定義する。状態 (x, y) がSに属すということは次のことを意味する。各消費者 $i\in$ I に対して，(x, y) が定める彼の情況 $(x_{|i}, y)$ の下で，彼にとって可能ないかなる消費 $x_i'\in X_i(x_{|i}, y)$ に対しても，それにいくらでも近いところに更に望ましい可能な消費 $x_i''\in X_i(x_{|i}, y)$ が存在する，ということである。いかなる外部性も存在しない場合，Sが空集合でないことと S=D とは同値であり，更に Debreu〔3〕において定式化された局所的非飽和の仮定と同値になる。

局所的非飽和の仮定を満足する競争均衡状態が Pareto 最適となるための必要十分条件を述べるために，任意の $i \in \mathrm{I}$ と $(x, y) \in \mathrm{D}$ に対して，記号

$$\mathrm{X}_i{}^0(x, y)=\{x_i' \in \mathrm{X}_i(x_{)i(}, y) : ((x_i', x_{)i(}), y) \succ_i (x, y)\}$$

を定義する。ここで，

$$\mathrm{E}=\{(x, y) \in \mathrm{D}: \text{ For every } (x', y') \in \mathrm{P}(x, y) \cap \mathrm{A} \text{ there is } i \in \mathrm{I} \text{ such that}$$
$$x_i' \in \mathrm{X}_i{}^0(x, y) \text{ and } (x', y') \in \Pi_{k \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_k{}^+(x, y) \times \Pi_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{Y}_j(x, y_{)j(})\}$$

とおこう。本節の基本定理は次のものである。

定理 1　$\mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{P}=\mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{E}$.

すなわち，局所的非飽和の仮定を満足する競争均衡状態 $(x, y) \in \mathrm{C} \cap \mathrm{S}$ が Pareto 最適となるための必要十分条件は (x, y) がEに属することである。集合Eの意味は後に考察する。この定理は，実質的には Osana〔10〕において既に証明された定理の特殊ケースであるから，証明を省略することができるが，読者の便宜のために繰返しておこう。

定理1の証明　$(x, y) \in \mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{P}$ とすれば $\mathrm{P}(x, y) \cap \mathrm{A}=\phi$ だから，明らかに $(x, y) \in \mathrm{E}$, 従って $\mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{P} \subseteq \mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{E}$ が成立つ。

次に $(x^*, y^*) \in \mathrm{C} \cap \mathrm{S} \cap \mathrm{E}$ としよう。$(x^*, y^*) \in \mathrm{C}$ だから

(1)　$p \geqq 0,\ p \cdot (\sum_{i \in \mathrm{I}} x_i^* - \sum_{j \in \mathrm{J}} y_j^* - \omega)=0$,

(2)　各 $i \in \mathrm{I}$ について，すべての $x_i \in \mathrm{X}_i{}^0(x^*, y^*)$ に対して $p \cdot x_i^* < p \cdot x_i$,

(3)　各 $j \in \mathrm{J}$ について，すべての $y_j \in \mathrm{Y}_j(x^*, y^*_{)j(})$ に対して $p \cdot y_j^* \geqq p \cdot y_j$

の3条件を満足する価格ベクトル $p \in \mathrm{R}^l$ が存在する。

ここで $i \in \mathrm{I}$, $x_i \in \mathrm{X}_i(x_{)i(}^*, y^*)$, さらに $((x_i, x_{)i(}^*), y^*) \sim_i (x^*, y^*)$ とする。$p \cdot x_i < p \cdot x_i^*$ と仮定しよう。その場合，x_i に十分近いすべての x_i' に対して $p \cdot x_i^* > p \cdot x_i'$ となる。ところが，$(x^*, y^*) \in \mathrm{S}$ だから，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $\|x_i - x_i'\| < \varepsilon$ かつ $((x_i', x_{)i(}^*), y^*) \succ_i ((x_i, x_{)i(}^*), y^*) \sim_i (x^*, y^*)$ となるような $x_i' \in \mathrm{X}_i(x_{)i(}^*, y^*)$ が存在する。すなわち x_i にいくらでも近いところに $x_i' \in \mathrm{X}_i{}^0(x^*, y^*)$ が存在し，それに対しては(2)により，$p \cdot x_i^* < p \cdot x_i'$ となるから矛盾である。従って $p \cdot x_i \geqq p \cdot x_i^*$ でなければならない。故に再び(2)を考慮すれば，

(2′)　各 $i \in \mathrm{I}$ について，すべての $x_i \in \mathrm{X}_i{}^+(x^*, y^*)$ に対して $p \cdot x_i^* \leqq p \cdot x_i$ となる。

新しく記号

$$\mathrm{G}(x^*, y^*)=\sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i{}^+(x^*, y^*)-\sum_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{Y}_j(x^*, y_{)j(}^*)$$

を定義し，$z \in \mathrm{G}(x^*, y^*)$ としよう。その場合，すべての $i \in \mathrm{I}$ に対して $x_i \in \mathrm{X}_i{}^+(x^*, y^*)$, すべての $j \in \mathrm{J}$ に対して $y_j \in \mathrm{Y}_j(x^*, y_{)j(}^*)$ となり，$z=\sum_{i \in \mathrm{I}} x_i - \sum_{j \in \mathrm{J}} y_j$ という関係を満足する $(x, y) \in \mathrm{R}^{l(m+n)}$ が存在する。(2′)および(3)により，すべての $i \in \mathrm{I}$ に対して $p \cdot x_i \geqq p \cdot x_i^*$ またすべての $j \in \mathrm{J}$ に対して $p \cdot y_j^* \geqq p \cdot y_j$ となるから，$p \cdot z \geqq p \cdot (\sum_{i \in \mathrm{I}} x_i^* - \sum_{j \in \mathrm{J}} y_j^*)$ が成立する。結局

(4) すべての $z\in G(x^*,y^*)$ に対して $p\cdot(\sum_{i\in I}x_i^*-\sum_{j\in J}y_j^*)\leqq p\cdot z$ となる。

さて結論を否定して $(x^*,y^*)\notin P$ であると仮定しよう。定義により $(x,y)\in P(x^*,y^*)\cap A$ が存在する。仮定により $(x^*,y^*)\in E$ だから，すべての $i\in I$ に対して $x_i\in X_i^+(x^*,y^*)$，すべての $i\in J$ に対して $y_j\in Y_j(x^*,y_{)j(}^*)$，更にある $i\in I$ に対しては $x_i\in X_i^0(x^*,y^*)$ となる。他方，$(x,y)\in A$ だから，$\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}y_j\leqq\omega$，故に(1)により，$p\cdot(\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}y_j)\leqq p\cdot\omega=p\cdot(\sum_{i\in I}x_i^*-\sum_{j\in J}y_j^*)$ である。従って(4)より，すべての $z\in G(x^*,y^*)$ に対して $p\cdot(\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}y_j)\leqq p\cdot z$ となる。もし $x_i'\in X_i^+(x^*,y^*)$ ならば $x_i'+\sum_{k\in I-\{i\}}x_k-\sum_{j\in J}y_j\in G(x^*,y^*)$ だから $p\cdot(x_i'+\sum_{k\in I-\{i\}}x_k-\sum_{j\in J}y_j)\geqq p\cdot(\sum_{i\in I}x_i-\sum_{j\in J}y_j)$ すなわち $p\cdot x_i'\geqq p\cdot x_i$ となる。従って各 $i\in I$ についてすべての $x_i'\in X_i^+(x^*,y^*)$ に対して $p\cdot x_i\leqq p\cdot x_i'$ 特に $p\cdot x_i\leqq p\cdot x_i^*$ となる。故に(2)により，すべての $i\in I$ に対して $(x^*,y^*)\succsim_i((x_i,x_{)i(}^*),y^*)$ となり，ある $i\in I$ に対して $x_i\in X_i^0(x^*,y^*)$ であるという事実と矛盾する。かくして $(x^*,y^*)\in P$ であることが証明され，結局 $C\cap S\cap E\subseteq C\cap S\cap P$ であることが示された。 Q. E. D.

本節の残りの部分で集合Eの意味を考察しよう。始めに集合

$$E^1=\{(x,y)\in D:\quad \text{For every } i\in I,\ ((x_i',x_{)i(}),y)\succsim_i(x',y') \text{ for every } (x',y')\in D \text{ such that } x_i'\in X_i(x_{)i(},y)\}$$

を考える。$(x,y)\in E^1$ ということは次の意味を持っている。任意の消費者 $i\in I$ に対して (x,y) が定める彼の情況 $(x_{)i(},y)$ の下で彼にとって可能ないかなる消費 $x_i'\in X_i(x_{)i(},y)$ に対してもその情況 $(x_{)i(},y)$ は x_i' と両立し得る，すなわち $((x_i',x_{)i(}'),y')\in D$ となる，すべての情況 $(x'_{)i(},y')$ の中で最も良い情況である。これが (x,y) が E^1 に属するということの文字通りの意味であるが，少し大ざっぱな言い方をするならば，(x,y) がすべての消費者の選好にとって最も望ましい情況を形成している，あるいは (x,y) においてすべての消費者は選好に関する最大限の総体的外部経済（または最小限の総体的外部不経済）を享受している，ことを意味する。

次に

$$E^2=\{(x,y)\in D:\quad A\subseteq\Pi_{i\in I}X_i(x_{)i(},y)\times\Pi_{j\in J}Y_j(x,y_{)j(})\},$$

$$E^3=\{(x,y)\in D:\quad \text{For every } i\in I,\ X_i(x_{)i(},y)\supseteq X_i(x_{)i(}',y') \text{ for every } (x_{)i(}',y')\in B_i, \text{ and, for every } j\in J,\ Y_j(x,y_{)j(})\supseteq Y_j(x',y_{)j(}') \text{ for every } (x',y_{)j(}')\in C_j\}$$

とおこう。次の2つの事実に注意しておく。

注意 1 $E^1\cap E^2\subseteq E.$

証明 $(x,y)\in E^1\cap E^2$ とし，更に $(x',y')\in P(x,y)\cap A$ とする。その場合，すべての $i\in I$ に対して $(x',y')\succsim_i(x,y)$ となり，少なくとも1人の消費者 $k\in I$ に対しては $(x',y')\succ_k(x,y)$ が成立する。仮定により $(x,y)\in E^2$ だから $(x',y')\in\Pi_{i\in I}X_i(x_{)i(},y)\times\Pi_{j\in J}Y_j(x,y_{)j(})$ である。更に $(x,y)\in E^1$ だから，すべての $i\in I$ に対して $((x_i',x_{)i(}),y)\succsim_i(x',y')\succsim_i(x,y)$ すなわち $x_i'\in X_i^+(x,y)$ となる。他

方，$((x_k', x_{)k(}), y) \succsim_k (x', y')$ だから，もし $(x, y) \succsim_k ((x_k', x_{)k(}), y)$ ならば $(x, y) \succsim_k (x', y')$ となり矛盾である。従って $x_k' \in X_k^0(x, y)$ となり，結局 $(x, y) \in E$ が証明された。

注意 2　$E^3 \subseteq E^2$.

証明　$(x, y) \in E^3$ とし，更に $(x', y') \in A$ とする。その場合，すべての $i \in I$ に対して $x_i' \in X_i(x_{)i(}, y')$ また $(x_{)i(}', y') \in B_i$ 従って $x_i' \in X_i(x_{)i(}, y)$ となる。同様にすべての $j \in J$ に対して $y_j' \in Y_j(x, y_{)j(})$ となるから，$(x, y) \in E^2$ が証明された。

第１節で解説されたように，(x, y) が E^3 に属するということは，各経済主体が (x, y) において技術的な総体的外部経済を最大限に享受している，あるいは総体的外部不経済を最小限に受けていることを意味する。注意１と注意２より $E^1 \cap E^3 \subseteq E$ だから，結局次の結論が得られる。局所的非飽和の条件を満足する競争均衡状態が Pareto 最適となるための十分条件は，その状態において各経済主体が選好および技術に関して最大の総体的外部経済（あるいは最小の総体的外部不経済）を享受することである。あらゆる種類の外部効果が存在しない古典的な経済環境に対して，この十分条件は trivial に成立するから，従来の厚生経済学の基本定理（例えば Arrow〔1〕あるいは Debreu〔2〕）の中に，この条件は陽表的には述べられていない。しかし，第１節の簡単なモデルからも想像できるように，実はこの条件はかなり制限的なものである。つまり競争均衡状態において，あらゆる種類の外部経済の量が最大化されている，あるいは外部不経済の量が最小化されている蓋然性は小さいであろう。Ledyard〔6〕や Osana〔9, 10〕のモデルにおけるように不完全情報の世界を考えても，この条件が満たされるように情報を制御することは容易ではない。

4.　Pareto 最適は競争均衡であるか？

競争均衡状態は Pareto 最適であるという命題の逆が成立するための十分条件を求めることが本節の課題である。先ずいくつかの記号を定義しよう。定理１の証明で用いたように，各 $(x, y) \in D$ に対して，

$$G(x, y) = \sum_{i \in I} X_i^+(x, y) - \sum_{j \in J} Y_j(x, y_{)j(})$$

とおき，更に各 $i \in I$ に対して，

$$G_i^0(x, y) = X_i^0(x, y) + \sum_{k \in I - \{i\}} X_k^+(x, y) - \sum_{j \in J} Y_j(x, y_{)j(})$$

とおく。各 $(x, y) \in D$ に対して，

$$Z^0(x, y) = \{z \in R^l:\ \text{There is } (x', y') \in D \text{ such that } \sum_{i \in I} x_i' - \sum_{j \in J} y_j' = z,$$
$$(x', y') \succsim_i (x, y) \text{ for every } i \in I, \text{ and } (x', y') \succ_i (x, y) \text{ for some } i \in I\}$$

と書く。Pareto 最適が競争均衡状態になるための十分条件は，次の３つの集合によって与えられる。

$$V = \{(x, y) \in D:\ G(x, y) \text{ is convex}\}.$$

各 $i \in \mathrm{I}$ に対して,

$$\mathrm{L}_i=\{(x, y) \in \mathrm{D}:\quad \mathrm{G}_i{}^0(x, y) \subseteq \mathrm{Z}^0(x, y)\},$$

$$\mathrm{S}_i=\{(x, y) \in \mathrm{D}:\quad \mathrm{X}_i{}^+(x, y) \subseteq \mathrm{cl}\, \mathrm{X}_i{}^0(x, y)\}.$$

ここで $\mathrm{cl}\, \mathrm{X}_i{}^0(x, y)$ は, 集合 $\mathrm{X}_i{}^0(x, y)$ の R^l における閉包を表わす。以下でも一般に閉包を記号 cl で表わすことにする。これらの集合の意味は後に考察することとして, 本節の基本定理を証明しよう。

定理 2 すべての $i \in \mathrm{I}$ に対して $\mathrm{P} \cap \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_i \cap \mathrm{S}_i \subseteq \mathrm{C}'$.

証明 $i \in \mathrm{I}$ かつ $(x^*, y^*) \in \mathrm{P} \cap \mathrm{V} \cap \mathrm{L}_i \cap \mathrm{S}_i$ とする。先ず集合 $\mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*)-\{\omega\}$ が R^l の非正象限と共通部分を持たないことを証明する。仮に, ある $z \in \mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*)-\{\omega\}$ に対して $z \leqq 0$ になったとしよう。仮定により $(x^*, y^*) \in \mathrm{L}_i$ だから, $z+\omega \in \mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*) \subseteq \mathrm{Z}^0(x^*, y^*)$ 従って $\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j=z+\omega$, すべての $k \in \mathrm{I}$ に対して $(x, y) \succsim_k (x^*, y^*)$, ある $k \in \mathrm{I}$ に対して $(x, y) \succ_k (x^*, y^*)$ となるような $(x, y) \in \mathrm{D}$ が存在する。ところが $\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j=\omega+z \leqq \omega$ だから, $(x, y) \in \mathrm{P}(x^*, y^*) \cap \mathrm{A}$ となり $(x^*, y^*) \in \mathrm{P}$ であることに矛盾する。故に集合 $\mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*)-\{\omega\}$ は R^l の非正象限 $\{z \in \mathrm{R}^l:\ z \leqq 0\}$ と共通部分を持たない。従って閉包 $\mathrm{cl}(\mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*)-\{\omega\})$ は R^l の負象限 $\{z \in \mathrm{R}^l:\ z<0\}$ と共通部分を持たない。他方, 仮定により $(x^*, y^*) \in \mathrm{S}_i$ だから, $\mathrm{G}(x^*, y^*)-\{\omega\} \subseteq \mathrm{cl}\, \mathrm{X}_i{}^0(x^*, y^*)+\sum_{k \in \mathrm{I}-\{i\}} \mathrm{X}_k{}^+(x^*, y^*)-\sum_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{Y}_j(x^*, y^*_{)j(})-\{\omega\} \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{G}_i{}^0(x^*, y^*)-\{\omega\})$ 従って $\mathrm{G}(x^*, y^*)-\{\omega\}$ は R^l の負象限と共通部分を持たない。しかも $(x^*, y^*) \in \mathrm{V}$ だから $\mathrm{G}(x^*, y^*)-\{\omega\}$ は凸集合である。故に凸集合の分離定理により, すべての $z \in \mathrm{G}(x^*, y^*)-\{\omega\}$ に対して $p \cdot z \geqq 0$ となるような価格ベクトル $p \in \mathrm{R}^l$ で $p \geqq 0$ となるものが存在する。従ってすべての $z \in \mathrm{G}(x^*, y^*)$ に対して $p \cdot \omega \leqq p \cdot z$ が成立する。特に $p \cdot \omega \leqq p \cdot (\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k{}^*-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j{}^*)$ である。他方, $(x^*, y^*) \in \mathrm{A}$ だから $\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k{}^*-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j{}^* \leqq \omega$ 故に $p \geqq 0$ より $p \cdot (\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k{}^*-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j{}^*) \leqq p \cdot \omega$ となる。結局 $p \cdot (\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k{}^*-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j{}^*)=p \cdot \omega$ が成立する。故にすべての $k \in \mathrm{I}$ に対して $x_k \in \mathrm{X}_k{}^+(x^*, y^*)$ であり, すべての $j \in \mathrm{J}$ に対して $y_j \in \mathrm{Y}_j(x^*, y_{)j(}{}^*)$ であるならば, $p \cdot (\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j) \geqq p \cdot (\sum_{k \in \mathrm{I}} x_k{}^*-\sum_{j \in \mathrm{J}} y_j{}^*)$ となる。ところが, すべての $k \in \mathrm{I}$ に対して $x_k{}^* \in \mathrm{X}_k{}^+(x^*, y^*)$ またすべての $j \in \mathrm{J}$ に対して $y_j{}^* \in \mathrm{Y}_j(x^*, y_{)j(}{}^*)$ であるから, すべての $k \in \mathrm{I}$ に対して $x_k \in \mathrm{X}_k{}^+(x^*, y^*)$ は $p \cdot x_k{}^* \leqq p \cdot x_k$ を意味し, すべての $j \in \mathrm{J}$ に対して $y_j \in \mathrm{Y}_j(x^*, y_{)j(}{}^*)$ は $p \cdot y_j{}^* \geqq p \cdot y_j$ を意味する。かくして $(x^*, y^*) \in \mathrm{C}'$ であることが証明された。 Q. E. D.

集合 V に表現される条件は選好, 技術の凸性に関するものである。各消費者 $i \in \mathrm{I}$ に対して,

$$\mathrm{V}_i=\{(x, y) \in \mathrm{D}:\quad \mathrm{X}_i(x_{)i(}, y) \text{ is convex}\},$$

$$\mathrm{V}_i{}'=\{(x, y) \in \mathrm{D}:\quad ((tx_i{}^2+(1-t)x_i{}^1, x_{)i(}), y) \succ_i ((x_i{}^1, x_{)i(}), y)$$

$$\text{for every } t \in]0, 1[, \text{ every } x_i{}^1 \in \mathrm{X}_i(x_{)i(}, y), \text{ and every } x_i{}^2 \in \mathrm{X}_i(x_{)i(}, y)$$

$$\text{such that } ((x_i{}^2, x_{)i(}), y) \succ_i ((x_i{}^1, x_{)i(}), y)\},$$

$$\mathrm{U}_i=\{(x, y) \in \mathrm{D}:\quad \mathrm{X}_i{}^+((x_i{}', x_{)i(}), y) \text{ is closed in } \mathrm{X}_i(x_{)i(}, y) \text{ for every } x_i{}' \in X_i(x_{)i(}, y)\}$$

とおき，各生産者 $j \in J$ に対して，

$$V_j'' = \{(x, y) \in D: \quad Y_j(x, y_{)j(}) \text{ is convex}\}$$

とおく。V_i および V_j'' はそれぞれ消費および生産の可能性が凸性の仮定を満たしているような状態の集合である。V_i' はそこにおいて選好関係の凸性が成立っているような状態の集合，U_i は選好の上半連続性とも言うべき性質が成立っているような状態の集合である。ここで次の点に注意しておこう。

注意 3　$(\bigcap_{i \in I}(V_i \cap V_i' \cap U_i)) \cap (\bigcap_{j \in J} V_j'') \subseteq V$.

証明　$(x, y) \in (\bigcap_{i \in I}(V_i \cap V_i' \cap U_i)) \cap (\bigcap_{j \in J} V_j'')$ とする。$(x, y) \in V$ を証明するためには集合 $X_i^+(x, y)$ がすべての $i \in I$ に対して凸であることを示せば十分である。そこで $i \in I$ とする。任意の $x_i^1, x_i^2 \in X_i^+(x, y)$ を選び，集合 $T = \{x_i' \in [x_i^1, x_i^2]: \ ((x_i', x_{)i(}), y) \prec_i (x, y)\}$ を定義する。$(x, y) \in U_i$ だからTは $[x_i^1, x_i^2]$ における開集合である。従ってTが空集合でないとすれば，Tは少なくとも2つの相異なる元 x_i', x_i'' をもつ。その場合 $x_i' \in [x_i^1, x_i'']$ あるいは $x_i'' \in [x_i^1, x_i']$ の少なくとも一方が成立する。$x_i' \in [x_i^1, x_i'']$ としよう。この時，$x_i'' \in [x_i', x_i^2]$ であることに注意する。$((x_i'', x_{)i(}), y) \prec_i (x, y) \precsim_i ((x_i^1, x_{)i(}), y)$ しかも $(x, y) \in V_i'$ だから $((x_i'', x_{)i(}), y) \prec_i ((x_i', x_{)i(}), y)$ となるが，他方 $((x_i', x_{)i(}), y) \prec_i (x, y) \precsim_i ((x_i^2, x_{)i(}), y)$ より $((x_i', x_{)i(}), y) \prec_i ((x_i'', x_{)i(}), y)$ となるから矛盾である。$x_i'' \in [x_i^1, x_i']$ の場合も同様の矛盾が生ずる。従ってTは空集合である。故に $X_i^+(x, y)$ は凸集合である。　Q. E. D.

次に集合 L_i に表現される条件の意味を考えよう。これは定理1に現れる集合Eが要求する条件と逆の性質を含んでいることがわかる。実際，

$$L^1 = \{(x, y) \in D: \quad \text{For every } i \in I, \ ((x_i', x_{)i(}), y) \precsim_i (x', y') \text{ for every } (x', y') \in D \text{ such that } x_i' \in X_i(x_{)i(}, y)\},$$

$$L^2 = \{(x, y) \in D: \quad \Pi_{i \in I} X_i(x_{)i(}, y) \times \Pi_{j \in J} Y_j(x, y_{)j(}) \subseteq D\},$$

$$L^3 = \{(x, y) \in D: \quad \text{For every } i \in I, \ X_i(x_{)i(}, y) \subseteq X_i(x_{)i(}', y') \text{ for every } (x_{)i(}', y') \in B_i, \text{ and, for every } j \in J, \ Y_j(x, y_{)j(}) \subseteq Y_j(x', y_{)j(}') \text{ for every } (x', y_{)j(}') \in C_j\}$$

とおけば，E^1 と L^1 また E^3 と L^3 は全く逆の性質をもっており，E^2 と L^2 も逆の性質をもっていると言うことができる。しかも注意1と注意2に対応する関係が次に証明されるように成立するのである。

注意 4　すべての $i \in I$ に対して $L^1 \cap L^2 \subseteq L_i$.

証明　$i \in I$ かつ $(x, y) \in L^1 \cap L^2$ としよう。$(x, y) \in L_i$ を示すために $z \in G_i^0(x, y)$ とする。定義により $\sum_{k \in I} x_k' - \sum_{j \in J} y_j' = z$, $x_i' \in X_i^0(x, y)$, すべての $k \in I - \{i\}$ に対して $x_k' \in X_k^+(x, y)$, すべての $j \in J$ に対して $y_j' \in Y_j(x, y_{)j(})$ が成立つような $(x, y) \in R^{l(m+n)}$ が存在する。$(x, y) \in L^2$ だから $(x', y') \in D$ であることに注意しておこう。他方，$(x, y) \in L^1$ だから $(x', y') \succsim_k ((x_k', x_{)k(}), y) \succsim_k (x, y)$ がす

べての $k\in I$ に対して成立する。もし $(x,y)\succsim_i(x',y')$ であれば，$(x',y')\succsim_i((x_i',x_{)i(}),y)$ より $(x,y)\succsim_i((x_i',x_{)i(}),y)$ となり $x_i'\in X_i^0(x,y)$ に矛盾するから，$(x',y')\succ_i(x,y)$ である。従って $z\in Z^0(x,y)$，結局 $(x,y)\in L_i$ が証明された。

注意 5 $L^3\subseteq L^2$.

証明　$(x,y)\in L^3$ とする。$(x,y)\in L^2$ を証明するために $(x',y')\in\Pi_{i\in I}X_i(x_{)i(},y)\times\Pi_{j\in J}Y_j(x,y_{)j(})$ とすれば，先ず $x_1'\in X_1(x_{)1(},y)$ すなわち $((x_1',x_{)1(}),y)\in D$ となる。従って $(x_1',x_3,\cdots,x_m,y)\in B_2$ である。仮定により $(x,y)\in L^3$ だから，$x_2'\in X_2(x_{)2(},y)\subseteq X_2(x_1',x_3,\cdots,x_m,y)$ 従って $(x_1',x_2',x_3,\cdots,x_m,y)\in D$ 故に $(x_1',x_2',x_4,\cdots,x_m,y)\in B_3$ となる。$(x,y)\in L^3$ だから，$x_3'\in X_3(x_{)3(},y)\subseteq X_3(x_1',x_2',x_4,\cdots,x_m,y)$ 従って $(x_1',x_2',x_3',x_4,\cdots,x_m,y)\in D$ となる。この手続を繰返すことにより最後に $(x',y')\in D$ が得られる。故に $(x,y)\in L^2$ である。　Q. E. D.

最後に集合 S_i が要求する条件の意味を考えよう。各消費者 $i\in I$ に対して非飽和状態の集合を，

$$S_i'=\{(x,y)\in D:\quad((x_i',x_{)i(}),y)\succ_i(x,y)\ \text{for some}\ x_i'\in X_i(x_{)i(},y)\}$$

によって定義すれば，次の関係が成立する。

注意 6 すべての $i\in I$ に対して $V_i\cap V_i'\cap S_i'\subseteq S_i$.

証明　$i\in I$ また $(x,y)\in V_i\cap V_i'\cap S_i'$ とする。$(x,y)\in S_i$ を示すために $x_i'\in X_i^+(x,y)$ としよう。定義により $x_i'\in X_i(x_{)i(},y)$ であり，また $((x_i',x_{)i(}),y)\succsim_i(x,y)$ である。もし $((x_i',x_{)i(}),y)\succ_i(x,y)$ ならば $x_i'\in X_i^0(x,y)\subseteq \mathrm{cl}\,X_i^0(x,y)$ である。そこで $((x_i',x_{)i(}),y)\sim_i(x,y)$ と仮定しよう。$(x,y)\in S_i'$ だから $((x_i'',x_{)i(}),y)\succ_i(x,y)$ であるような $x_i''\in X_i(x_{)i(},y)$ が存在する。故に $((x_i'',x_{)i(}),y)\succ_i((x_i',x_{)i(}),y)$ である。すべての $t\in]0,1[$ に対して $x_i(t)=(1-t)x_i'+tx_i''$ とおこう。$(x,y)\in V_i'$ だから $((x_i(t),x_{)i(}),y)\succ_i((x_i',x_{)i(}),y)\sim_i(x,y)$ がすべての $t\in]0,1[$ に対して成立する。他方 $(x,y)\in V_i$ だから，すべての $t\in]0,1[$ に対して $x_i(t)\in X_i(x_{)i(},y)$，従ってすべての $t\in]0,1[$ に対して $x_i(t)\in X_i^0(x,y)$ である。t を限りなく 0 に近づければ，極限において $x_i'\in\mathrm{cl}\,X_i^0(x,y)$ となる。かくして，いずれの場合にも $x_i'\in\mathrm{cl}\,X_i^0(x,y)$ だから $X_i^+(x,y)\subseteq\mathrm{cl}\,X_i^0(x,y)$ が示された。　Q. E. D.

以上で，通常の凸性の仮定および非飽和の仮定が満たされているような状態は集合 $V\cap S_i$ に属することがわかった。従って定理 2 が主張する重要な点は，そのような性質をもった Pareto 最適が補整的均衡状態となるための十分条件が集合 L_i の性質，更に注意 4 と注意 5 によれば，集合 L^1, L^2, および L^3 の性質によって与えられる，ということである。注意 4 と注意 5 より $L^1\cap L^3\subseteq L_i$ であることがわかるから，次のように主張することができる。凸性および非飽和の条件を満足する Pareto 最適が補整的均衡状態となるための十分条件は，その状態において各経済主体が選好および技術に関して最小の総体的外部経済（あるいは最大の総体的外部不経済）を享受することである。あらゆる種類の外部効果が存在しない古典的な経済環境に対して，この十分条件は再び trivial に成立するから，従来の厚生経済学の基本定理の中にこの条件が陽表的に述べられることはなかった。

5. むすび

この論文でわれわれは，外部性が存在する場合の競争均衡の Pareto 最適性を吟味した。外部性が存在しない場合，競争均衡がPareto最適となるための十分条件は局所的非飽和性であり，Pareto最適が補整的均衡となるための十分条件が非飽和性と凸性であることは，よく知られているが，外部性が存在する場合に同種の命題を証明するために，われわれは更に外部性を特徴づける別の条件を必要とした。すなわち，前者の命題が真であるためには総体的外部経済の最大化が十分であり，後者の命題が真であるためには総体的外部経済の最小化が十分であることを示した。第1節の議論を参照すれば，これらの条件が限界的外部効果が零となる，あるいは伝統的な表現を用いれば，私的限界費用と社会的限界費用の一致という条件に対応していることがわかる。

外部効果が存在しない場合，総体的外部経済の最大化および最小化という2条件は同時に満足されるから，厚生経済学の2つの基本定理は同時に成立するが，外部効果が存在する場合には，この2つの定理を真ならしめる条件は互いに相容れないものであるから，一方の定理が成立する情況においては，他方の定理の成立は保証されないという不都合に直面せざるを得ない。しかも，両条件とも満たされる蓋然性は極めて小さいものと思われるので，外部性が存在する場合に厚生経済学の基本定理は成立しないであろうという伝統的な通念は否定し得ない。もっともわれわれは，十分条件の非現実性を基礎にしてこの通念を支持してはならないのであり，基本定理の必要条件を詳しく吟味してはじめて，この通念を積極的に支持することができる，という点に注意しておく必要があろう。その意味で集合Eに表現される条件の含意を追及するという課題が残されている。

更に，外部性が存在する場合に厚生経済学の基本定理が成立し得ないとなれば，適当な租税・補助金制度を伴った競争均衡が Pareto 最適になり得る可能性が問われ，これについても伝統的な議論が存在するが，現代的な分析手法に基づく一般化された理論の展開は興味深く，機会をあらためて論じようと思う。

引用文献

〔1〕 Arrow, K. J., "An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics," in J. Neyman, ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1951.

〔2〕 Debreu, G., *Theory of Value*, Wiley, 1959.

〔3〕 Debreu, G., "Economic Equilibrium," in H. W. Kuhn and G. P. Szegö, eds., *Mathematical Systems Theory and Economics* I, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics 11, Springer-Verlag, 1969.

〔4〕 Graaff, J. de V., *Theoretical Welfare Economics*, Cambridge University Press, 1957.

〔5〕 Lange, O., "The Foundations of Welfare Economics," *Econometrica*, 1942.

〔6〕 Ledyard, J. O., "The Relation of Optima and Market Equilibria with Externalities," *Journal of Economic Theory*, 1971.

〔7〕 Meade, J. E., "External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation," *Economic Journal*, 1952.

〔8〕 二階堂副包「現代経済学の数学的方法」岩波書店, 1960年。

〔9〕 Osana, H., "Externalities and the Basic Theorems of Welfare Economics," *Journal of Economic Theory*, 1972.

〔10〕 Osana, H., "Externalities and the Basic Theorems of Welfare Economics: A Supplementary Note," *Journal of Economic Theory*, 1973.

〔11〕 Pigou, A. C., *The Economics of Welfare*, 4th ed., Macmillan, 1932.

(経済学部助教授)