Title	効用函数の論理的基礎
Sub Title	The logical foundations of utility function
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1973
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.66, No.9 (1973. 9) ,p.681(69)- 693(81)
JaLC DOI	10.14991/001.19730901-0069
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19730901-0069

効用函数の論理的基礎

丸　山　　徹

I

近年，ドブリュー〔4〕〔5〕〔6〕，レイダー〔12〕らの業績を中心として，いわゆる「効用函数」の存在を保証するさまざまな十分条件が明らかにされつつある。このテーマは，ひとり経済理論にとって有用であるのみならず，広く「測定理論」の一環としても，また数学的な興味の対象としても有意義であるように思われる。

本稿を通じて筆者は完全な擬順序を与えられた位相空間を設定し，まず効用函数が存在するための必要十分条件（カントールの条件）を示す。（II）

つづいて，効用函数の存在を保証するいくつかの興味ある十分条件を呈示する。その際それらの条件と「カントールの条件」との関係にとりわけ注意が払われるであろう。（III）

最後に，効用函数の存在を前提として，その連続性を保証する必要十分条件を示す。これにはドブリュー〔6〕のレンマを援用しているが，レンマそのものの証明は一層簡略になされている。その他，この節では，連続性に関するいくつかの主題が取り扱われるであろう。（IV）

II[1]

諸定理の証明に先立って，最小限必要な数学上の概念に定義を与えておく。

半順序構造：集合 P とその上で定義された二項関係 $\leqq$ が次の条件を満たすとき $\boldsymbol{P}=\langle P, \leqq\rangle$ を半順序構造と呼ぶ。すなわち，すべての $p, q, r \in P$ について，[2]

1)　$p \leqq p$

注(1)　本節に関してはとりわけ Birkhoff〔1〕Chapter 3 を参照されたい。

(2)　以下，記号「$\wedge$」は連言を示す論理番号，「$\rightarrow$」は含意関係を示す論理記号である。

2) $(p \oleq q) \wedge (q \oleq p) \rightarrow p=q$

3) $(p \oleq q) \wedge (q \oleq r) \rightarrow p \oleq r$

鎖：$P=\langle P, \oleq \rangle$ が半順序構造であるとき，P の部分集合 Q が P の鎖であるとは，[3]

$$^{\forall} p,\ q \in Q(p \oleq q \vee q \oleq p)$$

が成立することを言う。またこのとき二項関係 $\oleq$ は Q の上での全順序あるいは線形順序と呼ばれる。[4]

$p \oleq q \wedge p \neq q$ のとき $p \olessthan q$ と書くことにする。

order-dense：P を鎖とし，$Q \subset P$ とするとき，$p \olessthan q$ となるような任意の $p,\ q \in P-Q$ に対して，

$$^{\exists} r \in Q(p \olessthan r \olessthan q)$$

が成立するとき，Q は P において order-dense であると言う。

順序同形：2つの半順序構造 $\langle P, \oleq \rangle$，$\langle P', \oleq \rangle$ が順序同形であるというのは，次の条件を満たす1:1写像 φ が存在することである。

$$^{\forall} p,\ q \in P(p \oleq q \longleftrightarrow \varphi(p) \oleq \varphi(q))$$

またこの φ を順序同形写像と呼ぶ。

以上の準備の下に，定理の叙述にうつる。

レンマ 1　任意の可算鎖 D は有理数の鎖の部分鎖と順序同形である。

証明）　有理数と D の元をそれぞれ

$$\{r_1,\ r_2,\ \cdots\cdots\},\ \{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}$$

とする。任意の n について，次の3つの関係のうち必ず1つ，そしてただ1つのみがあてはまることが容易に知られる。

(1)　$x_n \ogreaterthan x_i$　for all $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$

注（3）　記号「$\vee$」は選言を示す論理記号である。

（4）　半順序構造ではあるが，全順序構造でない例として，次のようなものが考えられる。

例 1. 区間 $[\alpha, \beta]$ 上のすべての連続函数から成る集合 M を考える。$f,\ g \in$ M について，$f \leqq g$ はすべての $t \in [\alpha, \beta]$ に対して $f(t) \leqq g(t)$（この $\leqq$ は通常の意味）の意味であるとすれば，明らかに $\langle$M, $\leqq \rangle$ は半順序構造であるが全順序構造でない。

例 2. 1つの集合の部分集合の全体 M を考える。M_1, $M_2 \in M$ について $M_1 \subset M_2$ のとき $M_1 \leqq M_2$ を書けば $\langle M, \leqq \rangle$ は半順序構造であるが全順序構造でない。

例 3. 自然数の全体から成る集合 N において，$a \leqq b$ は 'b が a で割りきれる' ことであるとすれば，$\langle$N, $\leqq \rangle$ は半順序構造であるが全順序構造でない。

(2) $x_n \otimes x_i$ for all $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$

(3) $x_i \otimes x_n \otimes x_j$ for some greatest x_i and least x_j where $i, j<n$

次に写像 φ を次の仕方で構成する。まず $\varphi(x_1)=0$ とし，

$$\varphi(x_n)=\begin{cases} n & \text{in case (1)} \\ -n & \text{in case (2)} \\ r_k & \text{in case (3)} \end{cases}$$

ここで r_k は $\{r_1, r_2, \cdots\cdots\}$ のうち，x_n が $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ に対してもつ順序関係と同一の順序関係を $\varphi(x_1), \varphi(x_2)\cdots\cdots\varphi(x_{n-1})$ に対してもつ最初の有理数をとる。2つの相異る有理数の間には必ず有理数が存在するから，このような r_k の存在は常に保証されている。以上のように構成された φ は明らかに D と有理数の部分鎖とを順序同形に対応せしめている。（証了）

定理 1 (Cantor)[(5)] 鎖 D が実数の部分鎖と順序同形であるための必要十分条件は，D が order-dense な可算部分集合をもつことである。

証明）（十分性）D が order-dense な可算部分集合 S をもつとする。もし D に全順序$\otimes$に関する極大元，極小元があるとすれば，一般性を失うことなく，それらは S に属するものと仮定することができる。レンマ1により，S から有理数の部分鎖への順序同形写像 φ が存在する。次に φ を D に拡張する。$D-S$ から任意の1点 x をとれば S が D で order-dense であることから，集合

$$A_x=\{s \in S/s \otimes x\}$$

$$B_x=\{s \in S/x \otimes s)$$

が存在する。そして

$$A_x \cup B_x=S, \quad A_x \cap B_x=\phi$$

また x はこの切断によって一意に定まる。いま，

$$a=\sup_{s \in A_x} \varphi(s)$$

$$b=\inf_{s \in B_x} \varphi(s)$$

とし，φ による x の値を

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(a+b)$$

と定義する。このようにして構成された φ は明らかに D と実数の部分鎖とを順序同形に対応させる。

（必要性）鎖 D と実数の部分鎖とを順序同形に対応せしめる写像 φ が存在すると仮定する。$I=$

注(5) この定理の原型については Cantor〔3〕pp. 133-136 および Huntington〔9〕Chapter V とりわけ pp. 49-52 を参照することが有益である。

$\{I_1, I_2, \cdots\cdots\}$ を数直線上で異る有理数を端点としてもち，φ による D の像を少なくとも1つ含むようなすべての閉区間の族とする。各 I_i から $\varphi(x_i) \in \varphi(D)$ を選び，$A = \bigcup_i x_i$ とすれば A は可算である。次に，

$$K = \{(x', x'')/x', x'' \in D - A;\ x' \otimes x'' \text{ and } x' \otimes x \otimes x'' \text{ for no } x \in A\}$$

とする。$(x', x'') \in K$ とすれば，

$$x' \otimes x \otimes x'' \quad \text{for no } x \in D$$

なぜなら，もしある $x \in D$ について，$x' \otimes x \otimes x''$ が成り立つとすれば，$\boldsymbol{I}$ のつくり方から，$\varphi(x)$ を含む閉区間 $I_j \in \boldsymbol{I}$ が存在して，$I_j \subset (\varphi(x'), \varphi(x''))$ とすることができ，よって必ず $x' \otimes x^0 \otimes x''$ を満たす $x^0 \in A$ が存在することとなって矛盾を生ずるからである。従って，いかなる開区間 $(\varphi(x'), \varphi(x''))$, $(x', x'') \in K$ も互いに共通点を持たない。ゆえに K は可算である。さらに

$$B = \{x \in D/^{\exists}x' \in D((x, x') \in K \vee (x', x) \in K)\}$$

とすればこれも可算であり，従って $A \cup B$ は可算。最後に $A \cup B$ が D で order-dense となることを示そう。いま $x, x' \in D - (A \cup B)$ で，かつ $x \otimes x'$ とする。このとき，ある $x'' \in A \cup B$ が存在して $x \otimes x'' \otimes x'$ となる。（証了）

さて次に，集合X上で定義される二項関係が半順序より一般な擬順序の場合を考える。まずその定義を与えておこう。

擬順序構造：集合Xとその上で定義された二項関係$\precsim$が次の条件を満たすとき $X = \langle X, \precsim \rangle$ を擬順序構造と呼ぶ。すなわち，すべての $x, y, z \in X$ について，

1) $x \precsim x$

2) $(x \precsim y) \wedge (y \precsim z) \longrightarrow x \precsim z$

この関係から，新たに次の2つの関係が導かれる。(6)

$$x \sim y \quad \text{iff} \quad (x \precsim y) \wedge (y \precsim x)$$

$$x \prec y \quad \text{iff} \quad (x \precsim y) \wedge \rceil (y \precsim x)$$

また，

$$^{\forall}x, y \in X((x \precsim y) \vee (y \precsim x))$$

が成り立つとき，擬順序構造 $\langle X, \precsim \rangle$ は完全であると言う。以下，完全な擬順序構造を，P. P. S. (perfectly pre-ordered structure) と略称する。

あるP. P. S. X の無差別クラスの集合を $X/\sim$ であらわし，これに次の仕方で二項関係 $\circledcirc$ を定義する。すなわち，$a, b \in X/\sim$ について，

注(6) 'iff' は 'if and only if' の略号，「$\rceil$」は否定をあらわす論理記号である。

$$^{\forall}x \in a,\ ^{\forall}x' \in b(x' \precsim x'') \longleftrightarrow a \circledS b$$

このとき，次のレンマが成り立つのは自明である。

レンマ 2　X が P.P.S. であるとき $\langle X/\sim, \circledS \rangle$ は全順序構造である。

すると，レンマ1の容易な応用によって，次のレンマを得る。

レンマ 3　X が P.P.S. で，$X/\sim$ が可算であれば，

$$x \prec y \longleftrightarrow u(x) < u(y) \quad \text{for all} \quad x,\ y \in X$$

となるような実数値函数 u が存在する。

証明）$X/\sim$ は可算鎖を形成するから，レンマ1より，$X/\sim$ と有理数の部分鎖とを順序同形に対応せしめる写像 φ が存在する。いま，$X/\sim=\{X_1, X_2, \cdots\cdots\}$ とすれば，X は $X/\sim$ によって分割されており，

$$u(x)=\varphi(X_i) \quad \text{whenever} \quad x \in X_i$$

とすることによって u を定義すると，これは所望の条件を満足する。（証了）

同様に定理1の適用を通じて定理2を得る。

定理 2　X を P.P.S. とするとき，

$$x \prec y \longleftrightarrow u(x) < u(y) \quad \text{for all} \quad x,\ y \in X$$

となるような実数値函数 u が存在するための必要十分条件は，$X/\sim$ が order-dense な可算部分集合をもつことである。

証明）（十分性）$X/\sim$ が order-dense な可算部分集合をもつと仮定する。$X/\sim$ は鎖を形成するから，定理1によって，$X/\sim$ と実数の部分鎖とを同形に対応せしめる写像 φ が存在する。ここで $X/\sim=\{X_i\}$ とすれば，これは X を分割しており，

$$u(x)=\varphi(X_i) \quad \text{whenever} \quad x \in X_i$$

として u を定義すれば，これは所望の条件を満たしている。

（必要性）$x \prec y \longleftrightarrow u(x) < u(y)$ for all $x,\ y \in X$ を満たす実数値函数 u が存在するものと仮定する。$X/\sim$ は鎖を形成し，また $\varphi(X_i)=u(x)$ whenever $x \in X_i$ とすれば，

$$X_i \circledS X_j \longleftrightarrow \varphi(X_i) < \varphi(X_j)$$

すると再び定理1から，$X/\sim$ は order-dense な可算部分集合をもたねばならない。(証了)

Ⅲ

本節では，アイレンベルク〔7〕=ドブリュー〔4〕，レイダー〔12〕そして筆者自身による3組の条件群をかかげ，それらがいずれも，

$$x \prec y \longleftrightarrow u(x) < u(y) \text{ for all } x, y \in X$$

なる実数値函数 u の存在を保証するに十分であることを示す。また，このような実数値函数を，経済学の慣例に従って効用函数と呼ぶことにする。また証明に際してはとくに，さまざまな条件群と「カントールの条件」との関連に注意が払われるであろう。

定理 3 (Eilenberg=Debreu)[(7)] X を P. P. S. で，可分かつ連結[(8)]な位相空間とする。さらに任意の $y \in X$ について，集合 $\{x \in X/x \precsim y\}$, $\{x \in X/y \precsim x\}$ が閉集合であれば，効用函数が存在する[(9)]。

証明) Xの中で稠密な可算部分集合を $M=\{m_1, m_2, \cdots\cdots\}$ とし，$x \prec y$ となるような任意の x, $y \in X$ を考える。集合 $\{z \in X/z \precsim x\}$ $\{z \in X/y \precsim z\}$ は互いに素で非空な閉集合である。ところでXは連結であるから，開集合

$$\{z \in X/x \prec z \prec y\} \neq \phi$$

再びXが可分であることから，

$$^{\exists}m_i \in M(x \prec m_i \prec y)$$

M のそれぞれの元が生成する無差別クラス[(10)]を $\{I_{m1}, I_{m2}, \cdots\cdots\}$ とすれば，これはもちろん可算で，上の証明より，$X/\sim$ の中で order-dense になっていることが知られた。ゆえに定理2によって，効用函数が存在する。(証了)

次に同定理に一層 constructive に，つまり具体的に効用函数を構成する仕方で別証を与えておくことにしよう。

別証) 先に示したところから，$x \prec y$ となるような任意の x, $y \in X$ について，

注(7) Eilenberg〔7〕, Debreu〔4〕

(8) 「可分」「連結」の定義については，それぞれ Kelley〔10〕p. 49 および p. 53, あるいはコルモゴロフ=フォミーン〔11〕p. 51 および p. 82 などを参照のこと。

(9) しかも後に示すように連続な効用函数が存在する。Ⅳ節参照。

(10) $\mathrm{I}m_i=\{z \in X/m_i \sim z\}$'

$^{\exists}m_i \in M\ (x \prec m_i \prec y)$

そこで,

$N(x)=\{i/m_i \prec x\}$

とし,実数値函数

$u(x)=\sum_{i\in N(x)} \frac{1}{2^i},\quad u(x)=0 \ \text{ if } N(x)=\phi$

を定義する。明らかに

$N(x)\subsetneqq N(y)$

であるから,$u(x)<u(y)$。よって効用函数が存在する。(証了)

定理3における連結性の仮定は次のような形で置き換えることができる。

定理4 X を P. P. S. で可分な位相空間とする。任意の $y\in X$ について,集合 $\{x\in X/x\precsim y\}$, $\{x\in X/y\precsim x\}$ は閉集合,しかも $\{x\in X/x\prec y\}\neq\phi$ であれば $y\in \mathrm{cl}\{x\in X/x\prec y\}$ が満たされるとする。[11] これらの条件の下に効用函数が存在する。

証明) $x\prec y$ となるような任意の $x, y\in X$ を考える。すると,

$y\in\{z\in X/x\prec z\}\cap \mathrm{cl}\{z\in X/z\prec y\}$

ここで集合 $\{z\in X/x\prec z\}$ は開集合であるから,開集合

$\{z\in X/x\prec z\prec y\}\neq\phi$

よって,X の可算稠密な部分集合を $M=\{m_1, m_2, \cdots\cdots\}$ とすれば,

$^{\exists}m_i\in M\ (x\prec m_i\prec y)$

以下,定理3と同様。(証了)

定理5 (Rader)[12] X を P. P. S. で,第2可算公理[13]を満たす位相空間とする。さらに,すべての $y\in X$ について集合 $\{x\in X/y\precsim x\}$ が閉集合であれば効用函数が存在する。[14]

証明) 与えられた位相空間の可算基を $\{O_1, O_2, \cdots\cdots\}$ とする。任意の $y\in X$ について集合

$\{x\in X/x\prec y\}$

は開集合。従ってこれは可算基のうち,

注(11) 記号「cl」は closure operation を示す。
(12) Rader〔12〕
(13) 「第2可算公理」については,Kelley〔10〕p. 48 あるいはコルモゴロフ＝フォーミン〔11〕p. 81 を参照。
(14) しかも,後に示すように上半連続な効用函数が存在する。IV 節参照。

$O_i \subset \{x \in X / x \prec y\}$

となるような開集合の和として表わされる。

$N(y) = \{i / O_i \subset \{x \in X / x \prec y\}\}$

とおき,

$$u(y) = \sum_{i \in N(y)} \frac{1}{2^i}, \quad u(y) = 0 \quad \text{if } N(y) = \phi$$

と定義する。次にこの u が実際に効用函数になっていることを示す。$x \prec y$ とすれば, $x \in \{z \in X / z \prec y\}$ 従って,

$\exists i \in N(y) \ (x \in O_i)$

その i については

$i \notin N(x)$

ゆえに,

$N(x) \subsetneqq N(y)$

従って,

$u(x) < u(y)$ (証了)

Ⅳ

この最後の節では, 効用函数の存在を仮定した場合, その連続性を保証する条件を吟味することが目的である。[15]

最初に1つだけ数学上の用語を定義しておく。

gap: 集合 X から実軸 R への写像 f について, R の非空な区間 I が $f(X)$ の gap であるとは, I が次の条件を満足することである。

1) $\forall \alpha \in f(X) \ (\alpha \notin I)$

2) $a \in I$ とするとき,

$I = \{b / \alpha < b < \beta;$

for all $\alpha \in \{f(x) \in f(X) / f(x) < a\}$

and all $\beta \in \{f(x) \in f(X) / f(x) > a\}$

注(15) 連続函数の数学的性質については, Kelley〔10〕pp. 84–87 を参照のこと。また特にことわらないが以下の議論において実軸 R において定義される位相は, いわゆる "usual topology" である。

レンマ 4 (Debreu)[16] $S \subset \bar{R}$ とするとき[17], S から $\bar{R}$ への増加函数で，そのすべての gap が開区間となるようなものが存在する。

証明) 閉区間〔0, 1〕は $\bar{R}$ と順序同形であるから，一般性を失うことなく，$S \subset$〔0, 1〕として議論をすすめてさしつかえない。S の開区間でない gap の和を T とする。$\bar{R}$ 上で通常のルベーグ測度 m が定義されているものとすれば，T は〔0, 1〕上の区間の可算和としてあらわすことができるから可測であり，もちろん，$m(T) \leqq 1$ である。〔0, 1〕上で函数

$$f(x)=x-m(T \cap [0, x]),\ x \in [0, 1]$$

を定義すれば，これは明らかに連続。しかも $y \geqq x$ ならば，

$$f(y)-f(x)=(y-x)-m(T \cap [x, y]) \geqq 0$$

であることから，f は非減少函数である。H を $f^{-1}(t) \cap S$, $t \in [0, 1]$ なる形をもつすべての非退化集合の族とする。f は非減少函数であるから，集合 $f^{-1}(t)$ は互いに素な区間から成り，H は高々可算個の元をもつにすぎない。それを $\{H_1, H_2, \cdots\cdots\}$ としよう。いま，$a<b$ となるような任意の $a, b \in H_k$ をとると，必ずある $c \in H_k$ が存在して，$a<c<b$ とすることができる。なぜなら，仮に

$$S \cap (a, b)=H_k \cap (a, b)=\phi$$

とすれば，$T \cap (a, b)=\phi$, 従って，$f(b)-f(a) \neq 0$ とならねばならず，矛盾を生ずるためである。D_k を H_k の可算稠密な部分集合（このような D_k は必ず存在する）とし，また g_k は D_k から $(0, 2^{-k})$ の有理数の上への増加函数とする。(ただし，D_k に端点があれば，それらは 0 と 2^{-k} に写像されるものとする。) この g_k を，

$$g_k(x)=0 \quad \text{for} \quad x \leqq H_k$$

$$g_k(x)=\sup \{g_k(z)/z \in D_k,\ z \leqq x\} \quad \text{otherwise}$$

と定義することによって〔0, 1〕上に拡張する。このように構成された g_k は非減少で，しかも値域に gap が存在しないことから連続である。次に，

$$r(x)=\sum_k g_k(x)$$

とおけば，これは一様収束して，連続である。

$x<y$ なる $x, y \in H_k$ を考える。$H_k \cap (x, y) \neq \phi$, また D_k は H_k で稠密であるから，$z_1 \in D_k \cap (x, y)$ なる z_1 が存在する。同様にして，$z_2 \in D_k \cap (z_1, y)$ なる z_2 が存在する。すると，

$$g_k(x) \leqq g_k(z_1) < g_k(z_2) \leqq g_k(y)$$

注(16) Debreu〔6〕。このレンマの証明の簡略化は Bowen〔2〕の証明に従う。また証明に用いられるルベーグ測度の概念については，たとえば Royden〔13〕Chapter 3 を参照。

(17) $\bar{R}$ は extended real line.

従って，$r(x)<r(y)$　かくして，

$$g(x)=f(x)+r(x)$$

とおけば，g は S の上での増加函数であり，〔0, 1〕上で連続，非減少である。

最後にこの g が所望の性質を満たしていることを示そう。意に反して $g(S)$ のある gap が最大元 b をもっているとする。このとき，b は $g(S)$ の集積点で，$[a, b]\cap g(S)=\phi$ となるような $a<b$ が存在する。次に，

$$c\in g^{-1}(a),\quad d=\max\, g^{-1}(b)$$

とする。d は S の元でないが S の集積点であり，かつ $[c, d]\cap S=\phi$ ゆえに，$[c, d]\subset T$ であるから $f(c)=f(d)$ 他方，すべての k について，

$$[c, d]\cap H_k\subset[c, d]\cap S=\phi$$

であるから，$g_k(c)=g_k(d)$ ゆえに $r(c)=r(d)$ よって $g(c)=g(d)$ となって矛盾。同様にして $g(S)$ のどの gap も最小元をもたないことが示されて証明が完結する。(証了)

定理 6　P.P.S. の位相空間 X で定義された効用函数 u の存在を仮定する。そして任意の $y\in X$ について，$\{x\in X/y\precsim x\}$ が閉集合であるならば，やはり X で定義された効用函数で上半連続なものが存在する。[18]

証明)　レンマ4によって，$u(X)$ から $\bar{R}$ への増加函数 g が存在して，そのすべての gap を開区間とすることができる。そこで，

$$v(x)=g(u(x)),\ x\in X$$

とおけば v もまた効用函数である。

次に v の上半連続性を証明するのであるが，そのためには，任意の実数 $\gamma\in\bar{R}$ について，$v^{-1}([\gamma, \infty])$ が与えられた位相の中で閉じていることを示せば十分である。場合を3つに分けて証明する。

(i)　$\gamma\in v(X)$; すなわちある $y\in X$ について $v(y)=\gamma$ となる場合:　$v^{-1}([\gamma, \infty])=\{x\in X/y\precsim x\}$ これは条件より閉集合。

(ii)　$\gamma\notin v(X)$ で，γ が $v(X)$ の gap の中に存在する場合: この gap はある $\lambda, \mu\in v(X)$ について (λ, μ) なる形態をとる。従って，$v^{-1}([\gamma, \infty])=v^{-1}([\mu, \infty])$ となり，これは条件より閉集合。

(iii)　$\gamma\notin v(X)$ で，γ が $v(X)$ のどの gap にも属さない場合: これにはさらに次の3つの場合がありうる。

1. $\gamma\leqq\inf v(X)$: $v^{-1}([\gamma, \infty])=X$
2. $\sup v(X)\leqq\gamma$: $v^{-1}([\gamma, \infty])=\phi$

注(18)　この定理によって，定理5の条件の下に上半連続な効用函数の存在が含意されることがわかる。

3. $[\gamma, \infty] = \bigcap_{\alpha \in u(X), \alpha \leqq \gamma} [\alpha, \infty]$: $v^{-}([\gamma, \infty]) = \bigcap_{\alpha \in u(X), \alpha \leqq \gamma} v^{-1}([\alpha, \infty])$

これらの帰結から 1, 2 および 3 いずれの場合も $v^{-1}([\gamma, \infty])$ は閉集合。

(i), (ii) および (iii) から，任意の実数 $\gamma \in \bar{R}$ について，$v^{-1}([\gamma, \infty])$ は閉集合であり，従って v は上半連続であることが示された。(証了)

定理 5 と全く同じ仕方で次の定理 6 が得られる。

定理 6 P. P. S. の位相空間 X で定義された効用函数 u の存在を仮定する。そして任意の $y \in X$ について，$\{x \in X / x \precsim y\}$ が閉集合であるならば，やはり X で定義された効用函数で下半連続なものが存在する。

定理 7 P. P. S. の位相空間 X で定義された効用函数 u の存在を仮定する。このとき，やはり X で定義された連続な効用函数が存在するための必要十分条件は，次の 2 つの条件のうち少なくとも一方が成り立つことである。

1. 任意の $y \in X$ について，集合 $\{x \in X / x \precsim y\}$ および $\{x \in X / y \precsim x\}$ はいずれも閉集合である。
2. $x, y \in X$ かつ $x \prec y$ とすれば，x, y のある開近傍 T_x, T_y が存在して，

$$\forall x' \in T_x (x' \prec y) \quad \forall y' \in T_y (x \prec y')$$

証明) (十分性) まず条件 2 が条件 1 を含意することを示し，次に条件 1 が満たされれば，与えられた位相に関して連続な効用函数 u が存在することを示す。

任意の $y \in X$ を考える。まず，

$$\forall x \in X \ (y \precsim x)$$

とすれば，

$$\{x \in X / x \prec y\} = \phi$$

となり，これはもちろん開集合である。次に $x \prec y$ とすれば，条件 2 から x のある開近傍 T_x が存在して，

$$\forall x' \in T_x (x' \prec y)$$

このようなすべての T_x の和が $\{x \in X / x \prec y\}$ であるから，これは開集合である。$\{x \in X / y \prec x\}$ が開集合であることも同様にして証明できる。以下で条件 2 が条件 1 を含意することが知られた。

つづいて，条件 1 が満たされれば連続な効用函数が存在することを証明する。レンマ 4 から，u の増加函数 g が存在して，そのすべての gap を $\bar{R}$ 上の開区間とすることができる。写像の合成，$v = g \circ u$，によって得られる $v: X \to \bar{R}$ はやはり効用函数である。ところでこのように構成された

v は，任意の y について集合 $\{x \in X/y \precsim x\}$ が閉じていることと定理5から上半連続である。また任意の $y \in X$ について $\{x \in X/x \precsim y\}$ が閉じていることと定理6から，v は下半連続でもある。従って v は与えられた位相において連続である。

（必要性）効用函数 u が与えられた位相に関して連続であると仮定する。任意の $y \in X$ について集合 $\{b \in R/b \leqq u(y)\}$，$\{a \in R/u(y) \leqq a\}$ は閉集合である。従って，任意の $y \in X$ について，$\{x \in X/x \precsim y\}$，$\{x \in X/y \precsim x\}$ はいずれも X の閉集合である。

再び，効用函数 u が連続であることを仮定する。さらに，$x \prec y$，従って $u(x) < u(y)$ であるとすれば，$u(x)$，$u(y)$ それぞれのある開近傍 A_x，A_y が存在して，

$$^{\forall}a \in A_x\,(a < u(y))$$

$$^{\forall}b \in A_y\,(u(x) < b)$$

とすることができる。それゆえ，x，y の開近傍 $T_x \equiv \{z \in X/u(z) \in A_x\}$，$T_y \equiv \{z \in X/u(z) \in A_y\}$ が存在して，

$$^{\forall}x' \in T_x\ (x' \prec y)$$

$$^{\forall}y' \in T_y\ (x \prec y')$$

とすることができる。（証了）

参　考　文　献

〔1〕 Birkhoff, G., *Lattice Theory* rev. ed., American Mathematical Society, New York, 1948.

〔2〕 Bowen, R., "A New Proof of a Theorem in Utility Theory" *International Economic Review*, 9, 374; 1968.

〔3〕 Cantor, G., *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (tr. by P. E. B. Jourdain) Dover Publications, New York, 1955.（原論文は „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" の題名の下に *Mathematische Annalen* xlvi, 481–512; 1895 および xlix, 207–246; 1897 に発表された。）

〔4〕 Debreu, G., "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function" in R. M. Thrall, C. H. Coombs and R. L. Davis (eds.), *Decision Processes*, Wiley, New York, 1954.

〔5〕 —— *Theory of Value* Wiley, New York, 1959.

〔6〕 —— "Continuity Properties of Paretian Utility" *International Economic Review*, 5, 285–293; 1964.

〔7〕 Eilenberg, S., "Ordered Topological Spaces" *American Journal of Mathematics*, 63, 39–45; 1941.

〔8〕 Fishburn, P. C., *Utility Theory for Decision Making* Wiley, New York, 1970.

〔9〕 Huntington, E. V., *The Continuum and Other Types of Serial Order*, Dover Publications, 1955（これは1917年 Howard University Press から出版された原著第2版の復刻版である。）

〔10〕 Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

〔11〕 コルモゴロフ＝フォミーン『函数解析の基礎』第2版（山崎三郎訳）岩波書店，東京，1971年。

〔12〕 Rader, J. T., "The Existence of a Utility Function to Represent Preferences" *Review of Economic*

Studies, 30, 229-232; 1963.

〔13〕 Royden, H. L., *Real Analysis*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1968.

〔付　記〕 筆者が慶應義塾に学んだ長い間，つねに懇切なご指導を賜った河田龍夫教授，千種義人教授，福岡正夫教授，また本稿の執筆に際して直接に多くの貴重な示唆を与えられた G. Debreu 教授，川又邦雄助教授および A. Mas-Cole l 氏に深く謝意を表したい。さらに現在遠地にある筆者に代わって，めんどうな校正の仕事を快くひきうけて下さった飛鳥田里美さんにも心からお礼を申し上げたい。

（慶應義塾大学大学院修士課程一現在カリフォルニア大学留学中）