Title	短期中期長期貸出をもつ現物経済における「一時的均衡」の存在
Sub Title	On the existence of temporary equilibrium in the spot economy with short and long lendings
Author	瀬古, 美喜
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1973
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.66, No.9 (1973. 9) ,p.648(36)- 680(68)
JaLC DOI	10.14991/001.19730901-0036
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19730901-0036

短期中期長期貸出をもつ現物経済における「一時的均衡」の存在

瀬　古　美　喜

Ⅰ　はじめに

Ⅰ－1

静学的な一般均衡モデルを，「時」の概念を導入することによって動学的なモデルに拡張する場合，まず，現在時点において将来にわたる完全な「先物市場」が存在する体系を想定することができる。この場合には，各主体の側の全期間を通じての「完全予見」が前提とされ，あらゆる経済的決定が現在時点においてなされる。よって，将来のかなりの期間にわたって万事が前以って取決められ，しかもその決定は将来のどの期日においても市場均衡を満たす。つまり，「時間をつうじての均衡」が成立すると考えられる。

しかし実際には，人々が自己の欲望を正確に予見したり生産の技術的工程の結果について正確な見積りをすることは不可能である。そこで，このような欲望及び資源の予期しない変化が生じた場合，人々は先になされた先物契約に基づいて，実際に取引をすることができなくなる。よって，結局，現在時点において存在する「先物市場」の数は，著しく限定されることになる。

そこで，以上の推論から明らかなように，完全な「先物市場」の存在を想定しないような動学的モデルが要請される。

ヒックスが，〔8, 3・4 部〕の中で，「一時的均衡」の理論として定式化し，〔9, 6 章〕で，「一時的均衡の方法」と名づけているものがこれにあたる。この場合には，経済の変動過程が「週」を単位

とする期間に分割され，各週の初め（つまり各月曜日ごと）に「現物市場」が開かれて，各財のその週の均衡価格が定まるとともに，各主体の価格予想に基づいて彼等の将来の需給計画が編成され，それが月曜日ごとに改訂されていく。このように，計画や均衡が各週ごとに改訂されていくと想定することによって，「先物市場」の存在しない予想の不確実な経済における変動過程を，「一時的均衡」の時間をつうじての系列としてとらえることができる。

この方法を用いることによって，貨幣や利子率などの問題を，従来の伝統的な一般均衡分析的手法で扱うことが可能となる。

I－2

本稿の目的は，「一時的均衡の方法」を用いた１つの動学的モデルを提示し，ある月曜日の市場における「一時的均衡」の存在証明を考察することにある。

叙述の順序として，まず第Ⅱ節では，予備的考察として，基本的な仮定と定義を説明し，短期中期長期貸出をもつ現物経済モデルを設定する。第Ⅲ節では，ある月曜日の各企業の行動を定式化し，ついで第Ⅳ節で，各家計の行動を定式化する。第Ｖ節では，第Ⅱ～Ⅳ節で設定したモデルが論理的な整合性を持っていることを示す意味で，ある月曜日の市場における「一時的均衡」の存在を証明する。最後に，第Ⅵ節で，若干の補足をして終る。

本稿で設定するモデルは，アロー＝ハーン〔1, 6 章 3 節〕の各主体の経済的視野が２期間[(1)]である モデルを，経済的視野が多期間に及ぶように一般化したものである。特に，経済的視野を多期間に拡張することによって，債券市場における貸手と借手の行動が明確になったことは，注目に値するものと思われる（後出，仮定 2 (ii)，4 (ii)，13，注意 2，3，13 を参照)。

なお，彼等の推論過程で明らかに誤っていると考えられる箇所は，筆者の見解によって解決している。それらについては，筆者が全面的に責任を負うべきものであることは，いうまでもない[(2)]。

Ⅱ 予備的考察

Ⅱ－1

想定する経済モデルの基本的枠組と仮定は以下のとおりである。

仮定１

(i) すべての主体は同じ経済的視野を持っており，それは T 期間に及ぶものとする。

注(1) 以下，本稿における「期間」とは，ヒックス〔8〕の意味での「週」(week) をさすものとする。

(2) 本稿の執筆にあたり，本塾福岡正夫教授から貴重な御教示を頂いた。また，同じく本塾川又邦雄，長名寛明の両助教授，宇佐美泰生助手からも，有益なコメントを頂いた。ここに，心から感謝の意を表する次第である。

$(t=1, 2, 3, \cdots\cdots, T)$

(ii) 短期，中期，長期貸出が許されている純粋現物経済を想定する。そこでは，財および用役の先物取引は少しも行われない。最短期貸附は1期間（最短期間）に対して行われ，最長期貸附は$T-1$期間（最長期間）に対して行われる。全貸附は，すべて，一括して取引の終に利子が支払われるものとする。

(iii) 今期取引きされる財は，今期の財と今期発行される債券のみとする。今期の財はn種類存在するものとする $(i=1, 2, \cdots, n)$。また，債券は$T-1$ 種類存在するものとし，今期発行された債券は今期のうちに売買されるものとする。

(iv) (ii)から明らかなように，いかなる先物市場も存在しない。また，(iii)から明らかなように，n種類の財市場と，$T-1$ 種類の債券市場が，各月曜日に開かれる。

(v) 簡単化のために，各期に利用可能な財の数nは，時間をつうじて一定であるとする。

定義1

(i) 債券は添字 b^t で表わすものとする $(t=1, 2, \cdots, T-1)$。添字 b^t で表わされた1単位の債券は，$t+1$ 期に，発行者が保有者に計算貨幣の1単位を支払うという約束手形である。添字 b^t で表わされた債券の満期はt期である。(3)

(ii) 家計は添字hで表わすものとする $(h=1, 2, \cdots, H)$。家計群によって今期取引きされる財のベクトルを，$x=(x^1, x_b^1, \cdots, x_b^{T-1})$ で表わす。また，家計群のT期間の消費ベクトルを，$x^{12\cdots T}=(x^1, x^2, \cdots, x^T)$ で表わす。

(iii) 企業は添字fで表わすものとする $(f=1, 2, \cdots, F)$。企業群によって今期取引きされる財のベクトルを，$y=(y^1, y_b^1, \cdots, y_b^{T-1})$ で表わす。また，企業群のT期間の生産ベクトルを，$y^{12\cdots T}=(y^1, y^2, \cdots, y^T)$ で表わす。

(iv) 現在取引きされる財の価格ベクトルを $p=(p^1, p_b^1, \cdots, p_b^{T-1})$ で表わす。満期がt期の債券の現在価格 p_b^t は，定義1(i)より，現在のt期長期利率を R^t とすれば，$p_b^t=\dfrac{1}{(1+R^t)^t}$ となる。

(v) 家計hによる（企業fによる）t期の財の予想価格ベクトルを，$p_h^t(p_f^t)(t=2, 3, \cdots, T)$ で表わす。また，t期の短期債券の予想価格を $\hat{p}_b^t(t=2, 3, \cdots, T-1)$ で表わす。t期に成立を予想される短期利率を $\hat{r}^t$ とすれば，$\hat{p}_b^t=\dfrac{1}{1+\hat{r}^t}$ となる。(4)

注意1

債券を導入したため，各主体は各期に貸借を行ない，各自の所得の流れとは異なる支出の流れ

注(3) 仮定1(iii)における債券の数 $T-1$ とは満期が1期の債券から満期が $T-1$ 期の債券までを合計した数である。

(4) n次元ユークリッド空間を E^n で表わすと，$x^t, y^t \in E^n$ $(t=1, 2, \cdots, T)$，$p^1, p_f^t, p_h^t \in E^n$ $(t=2, 3, \cdots, T)$，$x_b^t, y_b^t, p_b^t, R^t, \hat{p}_b^t, \hat{r}^t \in E$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ である。

を計画することが可能となっている。

II-2

「一時的均衡の方法」を用いたモデルにおいては，単一期間内の均衡の決定に際して，予想が独立変数としてはっきりと導入され重要な役割を果たす。本稿では，価格予想に関して以下のような仮定をおく。

仮定2

(i) 異なる企業(家計)は，財の価格に関して異なる予想を抱いている。

(ii) すべての主体は，債券の価格に関して同じ予想を抱いている。特に，彼等の債券の価格に対する予想は，$p_b{}^t < p_b{}^1 \cdot \hat{p}_b{}^2 \cdots \hat{p}_b{}^t \ (t=2, 3, \cdots, T-1)$ のようなものであるとする。

(iii) すべての価格予想は非弾力的であるとする。すなわち，$p_f{}^t(p_h{}^t, \hat{p}_b{}^t)$ は，現在価格とは独立な家計や企業にとってのデーターである。

注意2

仮定2(ii)は，利子率を用いて言いかえることができる。

今便宜上，ヒックス〔8, 第1巻 p. 207〕に見られるように，満期のいろいろ違う諸利率の体系を単一の利率(短期利率)に還元する方法を用いる。

r^t を t 期の先物短期利率とすると，現在の t 期長期利率 R^t との間に，第1次近似として単利を仮定すれば，次のような関係が成立する。

$$(1+R^t)^t=(1+r^1)(1+r^2)\cdots(1+r^t) \fallingdotseq 1+r^1+r^2+\cdots+r^t$$

また，t 期に成立を予想される短期利率 $\hat{r}^t$ に対しては，

$$(1+r^1)(1+\hat{r}^2)\cdots(1+\hat{r}^t) \fallingdotseq 1+r^1+\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t$$

となる。

そこで，$p_b{}^t=\dfrac{1}{(1+R^t)^t}$，$\hat{p}_b{}^t=\dfrac{1}{1+\hat{r}^t}$，$p_b{}^1=\dfrac{1}{1+r^1}$ であることより，仮定2(ii)は，

$$\begin{aligned} p_b{}^t<p_b{}^1\cdot\hat{p}_b{}^2\cdots\hat{p}_b{}^t &\longleftrightarrow 1+r^1+r^2+\cdots+r^t>1+r^1+\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t \\ &\longleftrightarrow r^2+\cdots+r^t>\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t \\ &\qquad (t=2, 3, \cdots, T-1) \end{aligned}$$

となる。

これは，各主体が現在時点において t 期間の長期貸附を行なう場合の利子率の方が，1期間の短期貸附を t 回行なう場合の利子率よりも高いと予想していることを意味する。

III 企業

III－1

各企業のT期の生産可能性集合と，今期の生産可能性集合に対する定義と仮定は以下のとおりである。

定義 2

(i) 企業 f の可能な T 期生産ベクトルの集合を $Y_f^{12\cdots T}$ で表わす。集合 $Y_f^{12\cdots T}$ に属する元は，企業 f の T 期間の生産ベクトル $y_f^{12\cdots T}=(y_f^1, y_f^2, \cdots, y_f^T)$ である。

(ii) 経済全体での可能なT期生産配分の集合を $Y^{12\cdots T}=\underset{f}{\times} Y_f^{12\cdots T}$ で表わす。

仮定 3

(i) $0 \in Y_f^{12\cdots T}$

(ii) $Y_f^{12\cdots T}$ は閉集合である。

(iii) $Y_f^{12\cdots T}$ は凸集合である。

(iv) $(y_f^1, y_f^2, \cdots, y_f^T) \in Y_f^{12\cdots T}$ ならば $(y_f^1, y_f^2, \cdots, y_f^{t'}, \cdots, y_f^T) \in Y_f^{12\cdots T}$ となる $y_f^{t'} \geqq 0$ $(t=2, 3, \cdots, T)$ が存在する。

仮定 4

(i) $T-1$ 種類の債券市場は完全であり，不確実性はないものとする。

(ii) 各企業は長い将来期間にわたってどうしても貸附資本を必要とせざるをえないような立場にすでに置かれているものとする（例えば彼等は実を結ぶまでに相当の時日を要する作業に着手しているのかもしれない。あるいは，長い一連の計画投入量と計画産出量との形で，いかなる一時点でも中止困難な継続的生産の計画を設定しているにすぎないのかもしれない）。よって，彼等は将来での貸附資本供給量の借繋ぎを欲する。つまり，短期借入れよりも長期借入れの方を好む。

(iii) 長期借入れをする際に，各企業は，実際に添字 b^t で表わされた債券を，$t+1$ 期の予想所得に等しい範囲迄売ることができるものとする（仮定 4 (i) の下では，企業が限界迄債券を発行しない場合には，限界迄発行して，差額を株主に分配すると考えればよい）。

注意 3

仮定 2 (ii)（注意 2）より，各企業は利子率に関して，$1+r^1+r^2+\cdots+r^t>1+r^1+\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t$ という予想を抱いている。明らかにこれは，附加的な仮定がなければ，借手の立場からすると，現在時点において長期の借入れをするよりも，将来にわたって短期の借入れをする方が有利であることを示している。ところが今，仮定 4 (ii)より，各企業は長期借入れの方を好む。そこで，$(r^2+\cdots r^t)-(\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t)$ $(t=2, 3, \cdots, T-1)$ は，借手（繋ぎ手）が貸手（投機家）に引渡すべき金額（費用）にあたるものと考えられる。

定義 3

(i) $y_{fb}^t=p_f^{t+1}\cdot y_f^{t+1}\,(t=1, 2, \cdots, T-1)$ で，満期が t 期の債券の企業 f による発行量を表わす。

(ii) $p^1 \cdot y_f^1 + p_b^1(p_f^2 \cdot y_f^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_f^T \cdot y_f^T) = p^1 \cdot y_f^1 + p_b^1 \cdot y_{fb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot y_{fb}^{T-1}$ が，ある生産計画より考えられる企業 f の現在の収入 (予想利潤) を表わす。

仮定 5

企業はすべての生産計画 $y_f^{12\cdots T} \in Y_f^{12\cdots T}$ の中で，定義 3 (ii)を極大にするような計画を選ぶ。

注意 4

仮定 2 (iii)より，定義 3 (i) $(y_{fb}^t = p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} (t=1, 2, \cdots, T-1))$ は，集合 $Y_f^{12\cdots T}$ の元の，$(n+T-1)$ 次元ベクトルの集合 Y_f への写像である。

定義 4

(i) 企業 f の可能な今期生産ベクトルの集合を Y_f で表わす。Y_f は線型写像 (定義 3 (i)) の下での $Y_f^{12\cdots T}$ の像である。

すなわち，

$$Y_f = \{y_f = (y_f^1, y_{fb}^1, \cdots, y_{fb}^{T-1}) \mid \text{for some } (y_f^1, y_f^2, \cdots, y_f^t) \in Y_f^{12\cdots T}:$$
$$y_{fb}^t = p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} \ (t=1, 2, \cdots, T-1)\}.$$

(ii) 経済全体での可能な今期生産配分の集合を $Y = \underset{f}{\times} Y_f$ で表わす。

注意 5

定義 3 (ii)，4 (i)，仮定 5 より，企業は $p \cdot y_f$ の極大化をはかる。

補助定理 1

$p_b^t > 0 \ (t=1, 2, \cdots, T-1)$ かつ仮定 3 (iv)が満たされているなら，利潤極大計画においては，$p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} = y_{fb}^t \geqq 0 \ (t=1, 2, \cdots, T-1)$ が成立する。

証明) 今企業が $y_f^{12\cdots T}$ を選ぶと $p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} < 0$ となるとする。

一方利潤極大行動より

$p \cdot y_f = p^1 \cdot y_f^1 + p_b^1(p_f^2 \cdot y_f^2) + \cdots + p_b^t(p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1}) + \cdots + p_b^{T-1}(p_f^T \cdot y_f^T) \geqq 0$ が成立している。

そこで，$p^1 \cdot y_f^1 \geqq 0$, $p_f^t \cdot y_f^t \geqq 0$ for $t \neq t+1$, $p_b^t > 0$ for $t=1, 2, \cdots, T-1$ のとき，$p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} < 0$ ならば，仮定 3 (iv)より，$t \neq t+1$ の部分は固定しておいて $p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1\prime} \geqq 0$ となるような $y_f^{t+1\prime} \geqq 0$ を選べる。よって，$p^1 \cdot y_f^1 \geqq 0$, $p_f^t \cdot y_f^t \geqq 0$ for $t \neq t+1$, $p_b^t > 0$ for $t=1, 2, \cdots, T-1$ ならば，利潤極大計画においては，$y_{fb}^t \geqq 0$ でなければならない。 Q. E. D.

III-2

「一時的均衡」の存在を証明するための準備として，以下で 2，3 の主張を述べる。

仮定 6

(i) (自由生産の不可能性，非可逆性)

$\sum_f y_f^1 \geqq 0$ ならば，すべての f に対して $y_f^1 = 0$

(ii) どんな企業(や家計)にとっても，その価格予想は $[Y_f^{23\cdots T}\cap\{y_f^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } t=2,3,\cdots,T\}]$ という集合が有界になるようなものである。

定義5

経済全体での準-実現可能なT期生産配分の集合を $\hat{Y}^{12\cdots T}$ で表わす。

すなわち

$$\hat{Y}^{12\cdots T}=Y^{12\cdots T}\cap\{y^{12\cdots T}|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}$$

定理1

仮定1～6が満たされているなら，$\hat{Y}^{12\cdots T}$ はコンパクトかつ凸な集合である。

証明) ①閉かつ凸な集合であることの証明

仮定3(ii)(iii)より $Y^{12\cdots T}$ は閉かつ凸。

今 $\{y^{12\cdots T}|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}=\{y^1|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0\}$ $\times\{y^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}$ と書き直す。

$\{y^1|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0\}$ は連続写像 $\sum_f y_f^1$ によって定義されており閉，また明らかに凸でもある。

$\{y^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}$ も明らかに閉かつ凸な集合である。

定義5より，$\hat{Y}^{12\cdots T}$ は，閉かつ凸な集合の積集合であり，閉かつ凸。

②有界な集合であることの証明

定義5より

$$\begin{aligned}\hat{Y}^{12\cdots T}&=Y^{12\cdots T}\cap\{y^{12\cdots T}|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\}\\&=[Y^1\times Y^{23\cdots T}]\cap[\{y^1|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0\}\times\{y^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\}]\\&=[Y^1\cap\{y^1|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0\}]\times[Y^{23\cdots T}\cap\{y^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\}]\end{aligned}$$

と書き直す。

仮定6(i)が満たされているので，アロー＝ハーン〔1, pp. 66～68〕と全く同様にして，$[Y^1\cap\{y^1|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0\}]$ が有界な集合であることが示される。

また，仮定6(ii)より $[Y^{23\cdots T}\cap\{y^{23\cdots T}|p_f^t\cdot y_f^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\}]$ は明らかに有界である。Q.E.D.

系1

定理1の仮定が満たされているなら，定義4の下で $[Y_f\cap\{y_f|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ y_{fb}^t\geqq 0 \text{ for } t=1,2,\cdots,T-1\}]$ は，コンパクト集合となる。

証明) $[Y_f\cap\{y_f|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ y_{fb}^t\geqq 0 \text{ for } t=1,2,\cdots,T-1\}]$ は連続線型写像の下での $[Y_f^{12\cdots T}\cap\{y_f^{12\cdots T}|\sum_f y_f^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ p_f^{t+1}\cdot y_f^{t+1}\geqq 0 \text{ for all } t=1,2,\cdots T-1\}]$ の像である。

定理1より，今期集合は，連続写像の下でのコンパクト集合の像であるからコンパクトとなる。

Q. E. D.

定理2

仮定3(i)(iii)が満たされているなら，定義4の下で

(i) $0 \in Y_f$

(ii) Y_f は凸集合である。

証明) (i)$0 \in Y_f$ の証明

仮定3(i)より，$y_f^{12\cdots T}=(y_f^1, y_f^2, \cdots, y_f^T)=0$ が存在する。よって，定義3(i)より $y_{fb}^t=0$ for $t=1, 2, \cdots, T-1$。よって，$y_f=(y_f^1, y_{fb}^1, \cdots, y_{fb}^{T-1})=0$ が存在する。

(ii)Y_f が凸集合であることの証明

定義4より $Y_f=Y_f^1 \times Y_{fb}^1 \times \cdots \times Y_{fb}^{T-1}$ である。

Y_f^1 は明らかに凸集合である。

よって，$Y_{fb}^t=\{y_{fb}^t | y_{fb}^t=p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1} \text{ for some } y_f^{t+1} \in Y_f^{t+1}\}$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ が凸集合であることを示せばよい。ところが，仮定3(iii)より，$Y_f^{t+1}(t=2, \cdots, T)$ は凸集合であり，$y_{fb}^t=p_f^{t+1} \cdot y_f^{t+1}$ は線型写像であるから，明らかに Y_{fb}^t は凸集合となる。(5)　Q. E. D.

注意6

アロー＝ハーン〔1, pp. 139～140〕では，Y_f が閉集合となるということを用いて，本稿仮定6(ii)よりも緩い仮定より本稿定理1を示そうとしている。しかし，彼等の Y_f の閉性を示す推論過程は明らかに誤っており，これを定理1の証明に用いることができないので，本稿では仮定6(ii)というより強い仮定を設定した。

Ⅳ 家計

Ⅳ-1

各家計の T 期の消費可能性集合と債券の初期保有量に対する定義と仮定は以下のとおりである。

定義6

(i) 家計 h の可能な T 期消費ベクトルの集合を $X_h^{12\cdots T}$ で表わす。集合 $X_h^{12\cdots T}$ に属する元は，家計 h の T 期間の消費ベクトル $x_h^{12\cdots T}=(x_h^1, x_h^2, \cdots, x_h^T)$ である。

(ii) 経済全体での可能な T 期消費配分の集合を $X^{12\cdots T}=\underset{h}{\times} X_h^{12\cdots T}$ で表わす。

仮定7

(i) $X_h^{12\cdots T}$ は閉かつ凸な集合である。

$x_h^{12\cdots T} \geqq 0$ for $x_h^{12\cdots T} \in X_h^{12\cdots T}$

(ii) 家計 h の初期保有量を $\bar{x}_h^{12\cdots T}$ とするとき，

$$\bar{x}_{hi}^t \leqq \bar{x}_{hi}^t \quad \text{all } i \text{ and all } t(=1, 2, \cdots, T)$$

注(5) ベルジュ〔3, p. 143, Theorem 5〕などを参照。

$$\bar{x}_{hi}{}^{t} < \bar{\bar{x}}_{hi}{}^{t} \quad \text{if } \bar{\bar{x}}_{hi}{}^{t} > 0 \text{ for all } t\ (=1, 2, \cdots, T)$$

となるような消費可能ベクトル $\bar{x}_h{}^{12\cdots T} \in X_h{}^{12\cdots T}$ が存在する。

(iii) 各家計に対して以下の (a)～(e) の性質を満たすような，消費可能集合 $X_h{}^{12\cdots T}$ 上で定義された選好関係 $\succsim_h$ が存在する。

(a)（推移性）

$x_h{}^{12\cdots T} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T'}$ かつ $x_h{}^{12\cdots T'} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T''}$ ならば $x_h{}^{12\cdots T} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T''}$

(b)（連結性）

すべての $x_h{}^{12\cdots T}$, $x_h{}^{12\cdots T'} \in X_h{}^{12\cdots T}$ に対して，$x_h{}^{12\cdots T} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T'}$ かつ $x_h{}^{12\cdots T'} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T}$ であること。

(c)（連続性）

任意に与えられた $x_h{}^{12\cdots T'} \in X_h{}^{12\cdots T}$ に対して $\{x_h{}^{12\cdots T} | x_h{}^{12\cdots T} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T'}\}$ と $\{x_h{}^{12\cdots T} | x_h{}^{12\cdots T'} \succsim_h x^{12\cdots T}\}$ はともに閉集合である。

(d)（半狭義の凸性）

もし $x_h{}^{12\cdots T} \succ_h x_h{}^{12\cdots T'}$ ならば，すべての $0 \leqq \alpha < 1$ に対して，$(1-\alpha) \cdot x_h{}^{12\cdots T} + \alpha \cdot x_h{}^{12\cdots T'} \succ_h x_h{}^{12\cdots T'}$ となる。

(e)（非飽和性）

すべての $x_h{}^{12\cdots T} \in X_h{}^{12\cdots T}$ に対して，$x_h{}^{12\cdots T'} \succsim_h x_h{}^{12\cdots T}$ となるような $x_h{}^{12\cdots T'} \in X_h{}^{12\cdots T}$ は存在しない。

補助定理 2

仮定 7 (i)(iii)の下で，すべての家計 h に対して，以下の (a) (b) の性質を満たすような $X_h{}^{12\cdots T}$ 上で定義された連続な半狭義擬凹[(6)]の効用関数 $U_h{}^{12\cdots T}(x_h{}^{12\cdots T})$ が存在する。

(a) すべての $x_h{}^{12\cdots T} \in X_h{}^{12\cdots T}$ に対して，その近傍に $U_h{}^{12\cdots T}(x_h{}^{12\cdots T'}) > U_h{}^{12\cdots T}(x_h{}^{12\cdots T})$ となるような $x_h{}^{12\cdots T'}$ が存在する。

(b) $\bar{x}_{hi}{}^{t} \leqq \bar{\bar{x}}_{hi}{}^{t}$ all i and t $(=1, 2, \cdots, T)$, $\bar{x}_{hi}{}^{t} < \bar{\bar{x}}_{hi}{}^{t}$ if $\bar{\bar{x}}_{hi}{}^{t} > 0$ for all t $(=1, 2, \cdots, T)$ となるような消費ベクトル $\bar{x}_h{}^{12\cdots T} \in X_h{}^{12\cdots T}$ に対して，$U_h{}^{12\cdots T}(\bar{x}_h{}^{12\cdots T}) = 0$ である。

証明） アロー＝ハーン〔1, pp. 82～87〕参照。

仮定 8

任意の $\hat{x}_h{}^{1} \in X_h{}^{1}$ に対して，$U_h{}^{12\cdots T}(x_h{}^{1}, x_h{}^{2}, \cdots, x_h{}^{T})$ は，$(x_h{}^{2}, \cdots, x_h{}^{T})$ に関して非飽和である。すなわち，任意の $\hat{x}_h{}^{1} \in X_h{}^{1}$ に対し，$U_h{}^{12\cdots T}(\hat{x}_h{}^{1}, \hat{\hat{x}}_h{}^{2}, \cdots, \hat{\hat{x}}_h{}^{T}) > U_h{}^{12\cdots T}(\hat{x}_h{}^{1}, \hat{x}_h{}^{2}, \cdots, \hat{x}_h{}^{T})$ となるような $(\hat{x}_h{}^{1}, \hat{\hat{x}}_h{}^{2}, \cdots, \hat{\hat{x}}_h{}^{T})$ が存在する。

定義 7

注(6) 半狭義擬凹性については，アロー＝ハーン〔1, p. 87〕参照。

家計 h の $t+1$ 期の予想収益を $\bar{x}_{hb}{}^t(t=1, 2, \cdots, T-1)$ と表わす。$\bar{x}_{hb}{}^t(t=1, 2, \cdots, T-1)$ は，家計 h の $T-1$ 種類の債券の初期保有量である。

注意7

初期には過去からの債務は存在しないものとする。すなわち，$\bar{x}_{hb}{}^t(t=1, 2, \cdots, T-1)$ は，初期の債務を含まない。

Ⅳ-2、

仮定2(i)より，異なる家計は財の価格に関して異なる予想をするので，ある特定の企業の利潤に関して異なる予想を抱くことになる。そこで，株式市場が存在する。

まず株式市場の定式化を行ない，次に，家計の T 期間の予算制約式と，各債券市場のメカニズムを明確にする。

仮定9

(i) 株式市場が開かれるときには，すべての家計はすべての企業の選んだ生産計画 $y_f{}^{12\cdots T}$ と債券発行計画 $y_{fb}{}^t(t=1, 2, \cdots, T-1)$ を知っている。

(ii) 株式市場は，財，債券市場よりも前に開かれる。

定義8

家計 h による企業 f の資本価値を，

$K_{hf}(p, y_f{}^{12\cdots T})=p^1\cdot y_f{}^1+p_b{}^1(p_h{}^2\cdot y_f{}^2)+\cdots+p_b{}^{T-1}(p_h{}^T\cdot y_f{}^T)$ とする。

定義9

企業 f の市場資本価値を，

$$\begin{aligned}K_f(p, y_f{}^{12\cdots T}) &= \max_h K_{hf}(p, y_f{}^{12\cdots T})\\ &= p^1\cdot y_f{}^1+\max_h\{p_b{}^1(p_h{}^2\cdot y_f{}^2)+\cdots+p_b{}^{T-1}(p_h{}^T\cdot y_f{}^T)\}\end{aligned}$$

とする。

仮定10

企業の市場資本価値はその企業自身が予想する極大利潤と少なくとも等しい。

すなわち，$K_f(p, y_f{}^{12\cdots T})\geqq p\cdot y_f$ for all p and all $y_f{}^{12\cdots T}\in Y_f{}^{12\cdots T}$

定義10

(i) 企業 f を最も高く評価し，その所有権を得る家計(群)を，h^* とする。

(ii) $$\left.\begin{aligned}K_f{}^{2\cdots T}(p, y_f{}^{2\cdots T}) &= p_b{}^1(p_{h*}{}^2\cdot y_f{}^2)+\cdots+p_b{}^{T-1}(p_{h*}{}^T\cdot y_f{}^T)\\ K_f{}^t(y_f{}^t) &= p_{h*}{}^t\cdot y_f{}^t\ (t=2, 3, \cdots, T)\\ p_f{}^{2\cdots T}\cdot y_f{}^{2\cdots T} &= p_b{}^1(p_f{}^2\cdot y_f{}^2)+\cdots+p_b{}^{T-1}(p_f{}^T\cdot y_f{}^T)\end{aligned}\right\}\text{とおく。}$$

注意8

(i) 定義 3, 9, 10 より，仮定 10 は，

$K_f - p\cdot y_f = K_f^{2\cdots T}(p, y_f^{2\cdots T}) - p_f^{2\cdots T}\cdot y_f^{2\cdots T} \geqq 0$

を意味する。

しかし，仮定10は，

$K_f^t(y_f^t) - p_f^t\cdot y_f^t < 0$ for some t $(=2, 3, \cdots, T)$ を排除していないことに注意すべきである。

(ii) 仮定10は，企業の経営者が家計の家長自身であると考えることによって正当化される。

定義11

(i) 家計 h が初期に保有している企業 f の株式を $\bar{d}_{hf}$ で表わす。

(ii) 株式市場が開かれた後で家計 h が保有する企業 f の株式を d_{hf} で表わす。

注意 9

(i) すべての家計は市場価格 (K_f) で株式を売る。仮定10より，家計は，他のすべての家計と少なくとも同じ評価を下した企業の株式のみを買う。すなわち，$K_{hf} \neq K_f \Rightarrow d_{hf} = 0$

(ii) 家計 h の株式の販売から購入を引いた純収入は $\sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf}) K_f$ で表わされる（これは負になりうる）。

仮定11

企業 f の現在の収入はすべて新株主に分配される。よって家計 h は，$\sum_f d_{hf}(p\cdot y_f)$ うけとる。

注意10

注意 9(ii)と仮定11より，1 期に利用できる購買力は，$p^1\cdot \bar{x}_h^1 + \sum_f d_{hf}(p\cdot y_f) + \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf}) K_f$ となる。

仮定12

(i) 株式に対する先物市場は存在しない。そこで，先物価格と予想価格の乖離によって生じる投機は排除される。

(ii) 更に他の家計の予想に基づく株式市場における投機も排除する。

そこで，各家計は株式市場があたかも 1 期にしか開かれず，企業の所有権が 2 期以降他の家計の手に渡ることはないかのように考えるものとする。

よって各家計は，t 期 $(t=2, 3, \cdots, T)$ の企業 f からの収入を，d_{hf} で評価する。

注意11

t 期 $(t=2, 3, \cdots, T)$ には，家計は，企業 f の発行した債券（総計 $p_f^t\cdot y_f^t$）への出資分に対して責任がある。

注意 9(i)と定義10より，$d_{hf}(=d_{h*f}) > 0$ であるどんな企業も，家計 $h(=h^*)$ によって，t 期 $(t=2, 3, \cdots, T)$ の収入が K_f^t であると評価される。

そこで，仮定12(ii)より，家計 h による t 期 $(t=2, 3, \cdots, T)$ の企業群からの予想総収入は，

$\sum_f d_{hf}(K_f{}^t-p_f{}^t\cdot y_f{}^t)\ (t=2,3,\cdots,T)$ で表わされることになる。

注意8(i)で述べたように，この2期以降の利潤所得が負になる期間が存在しうる。

注意12

(i) 定義7と注意11より

$$\bar{x}_{hb}{}^t=p_h{}^{t+1}\cdot\bar{x}_h{}^{t+1}+\sum_f d_{hf}(K_f{}^{t+1}-p_f{}^{t+1}\cdot y_f{}^{t+1})\ (t=1,2,\cdots,T-1)$$

ただし，$\bar{x}_h=(\bar{x}_h{}^1,\ \bar{x}_{hb}{}^1,\cdots,\bar{x}_{hb}{}^{T-1})$

(ii) $\bar{x}_b{}^t=\sum_h\bar{x}_{hb}{}^t=\sum_h(p_h{}^{t+1}\cdot\bar{x}_h{}^{t+1})+\sum_f(K_f{}^{t+1}-p_f{}^{t+1}\cdot y_f{}^{t+1})\ (t=1,2,\cdots,T-1)$

$\bar{x}_b{}^t$ は y^{t+1} の関数である。$(t=1,2,\cdots,T-1)$

仮定13

各家計は，短期貸出し（借入れ）よりも，長期貸出し（借入れ）の方を好む。

注意13

仮定13は，仮定2(ii)の必然的な結果を表わしているにすぎない。なぜなら，注意2より，各家計は利子率に関して

$$1+r^1+r^2+\cdots+r^t>1+r^1+\hat{r}^2+\cdots+\hat{r}^t\quad(t=2,3,\cdots,T-1)$$

という予想を抱いており，これは貸手として長期貸附市場に参加すればそれによって生じる危険を相殺するに充分な利益が得られると期待しているに他ならないため。例えば $t=2$ のときには，仮定2(ii)は $r^2>\hat{r}^2$ ということを意味する。この場合，$r^2-\hat{r}^2$ が，家計（貸手）の蒙りつつある危険に対する代償にあたる。明らかに，各家計の長期貸附市場における貸手としての行動は投機的なものである。

本稿モデルにおいては，債券の需要者（貸手）は家計のみだが，債券の供給者（借手）は企業と家計から成っていると考えられる。ただし，貸附の大部分は生産のためのものであり，消費のための貸附，よって，債券の供給者としての家計は，ほとんど無視しえるものと考える。なお，家計が借手である場合には，注意3の企業の場合と同様に，繋ぎ手と考えられる。

注意14

定義7，注意10，仮定12(ii)，注意11，注意12，仮定13，注意13より，1期の予算制約式と2期以降の予算制約式（$t=2,3,\cdots,T$）は以下のようになる。

$$(1)\begin{cases}p^1\cdot x_h{}^1+p_b{}^1(x_{hb}{}^1-\bar{x}_{hb}{}^1)+\cdots+p_b{}^{T-1}(x_{hb}{}^{T-1}-\bar{x}_{hb}{}^{T-1}) & \\ \qquad\leqq p^1\cdot\bar{x}_h{}^1+\sum_f d_{hf}(p\cdot y_f)+\sum_f(\bar{d}_{hf}-d_{hf})K_f & \\ p_h{}^2\cdot x_h{}^2\leqq p_h{}^2\cdot\bar{x}_h{}^2+\sum_f d_{hf}(K_f{}^2-p_f{}^2\cdot y_f{}^2)+(x_{hb}{}^1-\bar{x}_{hb}{}^1)=\bar{x}_{hb}{}^1+(x_{hb}{}^1-\bar{x}_{hb}{}^1)=x_{hb}{}^1 & \\ \quad\vdots & \\ p_h{}^T\cdot x_h{}^T\leqq p_h{}^T\cdot\bar{x}_h{}^T+\sum_f d_{hf}(K_f{}^T-p_f{}^T\cdot y_f{}^T)+(x_{hb}{}^{T-1}-\bar{x}_{hb}{}^{T-1})=\bar{x}_{hb}{}^{T-1}+(x_{hb}{}^{T-1}-\bar{x}_{hb}{}^{T-1}) & \\ \qquad =x_{hb}{}^{T-1} & \end{cases}$$

注意15

(i) (1)式について簡単な説明を加える。

1期には，財と債券の初期保有額からの収益，利潤所得，株式の売買による収益が購買力となる。2期以降は，財の初期保有額からの収益，利潤所得，利子所得が購買力となる。仮定13より各家計は短期貸出し(借入れ)よりも長期貸出し(借入れ)の方を好むので，2期以降の短期債券に対す需要は存在しない。すなわち，$p_b^t(x_{hb}^t-\bar{x}_{hb}^t)=0\,(t=2, 3, \cdots, T-1)$。なお，$x_{hb}^t-\bar{x}_{hb}^t>0$ ならば，家計 h は添字 b^t という債券市場で net lender であり，$x_{hb}^t-\bar{x}_{hb}^t<0$ ならば，net borrower であると考えられる。その際定義7より，$\bar{x}_{hb}^t$ は家計 h が $t+1$ 期に返済可能だと考えている最高額を表わす。

(ii) 仮定4(iii)，定義3(i)，注意14，注意15(i)より，各主体が1期に計画する T 期間の支出の流れは明確である。その中で，特に，各主体が1期に予想している T 期間の債券のメカニズムを図で示すと以下のようになる。

		各企業の発行額			
$T-1$ 種類の市場が存在する	$t=1$	$p_b^1\cdot y_{fb}^1=p_b^1\cdot(p_f^2\cdot y_f^2)$ $\downarrow$ $\boxed{b^1\ \text{市場}}$ $\uparrow$ $p_b^1(x_{hb}^1-\bar{x}_{hb}^1)$	$p_b^2\cdot y_{fb}^2=p_b^2(p_f^2\cdot y_f^2)$ $\downarrow$ $\boxed{b^2\ \text{市場}}$ $\uparrow$ $p_b^2(x_{hb}^2-\bar{x}_{hb}^2)$	$\cdots$	$p_b^{T-1}\cdot y_{fb}^{T-1}=p_b^{T-1}(p_f^T\cdot y_f^T)$ $\downarrow$ $\boxed{b^{T-1}\ \text{市場}}$ $\uparrow$ $p_b^{T-1}(x_{hb}^{T-1}-\bar{x}_{hb}^{T-1})$
		各家計の純購入額			
		各企業の返済額			
2期以降債券を売買する誘因が存在しない	$t=2$	$y_{fb}^1=p_f^2\cdot y_f^2$ $\downarrow$ 〔b^1 債券〕 $\uparrow$ $x_{hb}^1-\bar{x}_{hb}^1$			
		各家計の純購入に対する返済額			
			$\vdots$		
			$\vdots$		
	$t=T$				$y_{fb}^{T-1}=p_f^T\cdot y_f^T$ $\downarrow$ 〔b^{T-1} 債券〕 $\uparrow$ $x_{hb}^{T-1}-\bar{x}_{hb}^{T-1}$

IV-3

まず各家計の今期の消費可能性集合と今期の効用関数を定義し，次に，「一時的均衡」の存在を証明するための準備として，それらに関する2，3の主張を述べる。

定義12

(i) 家計 h の可能な今期消費ベクトルの集合を X_h で表わす。すなわち，

$X_h=\{x_h=(x_h^1,\ x_{hb}^1,\ \cdots,\ x_{hb}^{T-1})\mid \text{for some } (x_h^1,\ x_h^2,\ \cdots,\ x_h^T)\in X_h^{12\cdots T}:$

$p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1}\leqq x_{hb}^t\ (t=1,2,\cdots,T-1)\}$

(ii) 経済全体での可能な今期消費配分の集合を，$X=\underset{h}{\times}X_h$ で表わす。

定理 3

注意14，仮定 7(i)(ii)が満たされているなら，定義7 (注意12)，注意 8，定義12の下で，

(i) X_h は凸集合である。 $x_h\geqq 0$ for $x_h\in X_h$

(ii) 家計 h の初期保有量を $\bar{x}_h$ で表わすとき，

$$\begin{cases}\bar{x}_{hi}^1\leqq \bar{x}_{hi}^1 & \text{all } i\ (=1,2,\cdots,n)\\ \bar{x}_{hi}^1<\bar{x}_{hi}^1 & \text{if } \bar{x}_{hi}^1>0 \quad \text{for some } i\in\{1,2,\cdots,n\}\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}\leqq p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}\\ p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}<p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1} \quad \text{if } p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}>0\end{cases}$$

となるような消費可能ベクトル $\bar{x}_h=(\bar{x}_h^1,\ \bar{x}_{hb}^1,\ \cdots,\ \bar{x}_{hb}^{T-1})=(\bar{x}_h^1,\ p_h^2\cdot\bar{x}_h^2,\ \cdots,\ p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)\in X_h$ が存在する。

証明) (i) ① X_h が凸集合であることの証明

定義12より $X_h=X_h^1\times X_{hb}^1\times\cdots\times X_{hb}^{T-1}$ である。

仮定 7(i)より X_h^1 は凸集合である。

よって，$X_{hb}^t=\{x_{hb}^t\mid p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1}\leqq x_{hb}^t \text{ for some } x_h^{t+1}\in X_h^{t+1}\}$ $(t=1,2,\cdots,T-1)$ が凸集合であることを示せばよい。

今，$p_h^{t+1}\cdot\hat{x}_h^{t+1}\leqq\hat{x}_{hb}^t$，$p_h^{t+1}\cdot\hat{\hat{x}}_h^{t+1}\leqq\hat{\hat{x}}_{hb}^t$ for some $\hat{x}_h^{t+1}, \hat{\hat{x}}_h^{t+1}\in X_h^{t+1}$ かつ $x_h^{t+1'}=t\cdot\hat{x}_h^{t+1}+(1-t)\cdot\hat{\hat{x}}_h^{t+1}$ $(0<t<1)$ とすれば，明らかに $\hat{x}_{hb}^t, \hat{\hat{x}}_{hb}^t\in X_{hb}^t$ であり，仮定 7(i)より $x_h^{t+1'}\in X_h^{t+1}$ である。そして，

$$\begin{aligned}p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1'}&=p_h^{t+1}[t\cdot\hat{x}_h^{t+1}+(1-t)\cdot\hat{\hat{x}}_h^{t+1}]\\&=t\cdot p^{t+1}\cdot\hat{x}_h^{t+1}+(1-t)\cdot p_h^{t+1}\cdot\hat{\hat{x}}_h^{t+1}\leqq t\cdot\hat{x}_{hb}^t+(1-t)\cdot\hat{\hat{x}}_{hb}^t\end{aligned}$$

が成り立つ。よって，$x_{hb}^{t'}=t\cdot\hat{x}_{hb}^t+(1-t)\cdot\hat{\hat{x}}_{hb}^t\in X_{hb}^t$ となり，X_{hb}^t は凸集合である。

② $x_h\geqq 0$ for $x_h\in X_h$ の証明

仮定 7(i)より $x_h^1\geqq 0$ for $x_h^1\in X_h^1$

よって，$x_{hb}^t\geqq 0$ for $x_{hb}^t\in X_{hb}^t$ $(t=1,2,\cdots,T-1)$ を示せばよい。

今，$p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1}\leqq x_{hb}^t$ が成り立っており，$p_h^{t+1}\geqq 0$ かつ仮定 7(i)より $x_h^{t+1}\geqq 0$ for $x_h^{t+1}\in X_h^{t+1}$ であるから，明らかに $x_{hb}^t\geqq 0$ となる。

(ii) 最小現在消費ベクトルの存在証明

仮定 7(ii)より

$\bar{x}_{hi}^1\leqq\bar{x}_{hi}^1$ all $i\ (=1,2,\cdots,n)$

$\bar{x}_{hi}^1 < \bar{x}_{hi}^1$ if $\bar{x}_{hi}^1 > 0$ for some $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

となるような消費ベクトル $\bar{x}_h^1 \in X_h^1$ が存在する。

よって後は条件を満たすような債券の消費ベクトル $\bar{x}_{hb}^t \in X_{hb}^t$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ の存在を示せばよい。

今，$\bar{x}_h = (\bar{x}_h^1, \bar{x}_{hb}^1, \cdots, \bar{x}_{hb}^{T-1})$，$\bar{x}_{hb}^t = p_h^{t+1} \cdot \bar{x}_h^{t+1}$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ とする。

仮定 7 (ii)より $\bar{x}_h^{t+1} \leqq \bar{x}_h^{t+1}$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ が成り立っている。両辺に $p_b^t \geqq 0$, $p_h^{t+1} \geqq 0$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ をかけてすべての期について合計すると，

$$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} = p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) \leqq p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$$

となる。

一方，注意 8，12より

$$\begin{aligned} p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} &= p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + p_b^1 \cdot \sum_f d_{hf} (K_f^2 - p_f^2 \cdot y_f^2) + \cdots + \\ &\quad p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) + p_b^{T-1} \cdot \sum_f d_{hf} (K_f^T - p_f^T \cdot y_f^T) \\ &= p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) + \sum_f d_{hf} \{ p_b^1 (K_f^2 - p_f^2 \cdot y_f^2) \\ &\quad + \cdots + p_b^{T-1} (K_f^T - p_f^T \cdot y_f^T) \} \\ &= p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) + \sum_f d_{hf} \{ K_f^{2 \cdots T} (p, y_f^{2 \cdots T}) - p_f^{2 \cdots T} \cdot y_f^{2 \cdots T} \} \\ &\geqq p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) \qquad (2) \end{aligned}$$

となる。

よって $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} \leqq p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1}$。

次に $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} > 0$ ならば

$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} < p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1}$ を示す。今，$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T+1} > 0$ と仮定すると，

(2)より $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} > p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ かまたは $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} = p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ が成り立つ。

$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} > p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ の場合には $\bar{x}_{hb}^t = p_h^{t+1} \cdot \bar{x}_h^{t+1}$ $(t=1, 2, \cdots, T-1)$ なので $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} = p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ $\leqq p_b^1 (p_h^2 \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$

より，確かに $p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} < p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1}$

$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} = p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1} (p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ の場合には，$p_b^t > 0$ となる期に $p_h^{t+1} \geqq 0$, $\bar{x}_h^{t+1} \geqq 0$ は少なくとも 1 つ共通の正の要素を持たなければならない。しかも，仮定 7 (ii)より $\bar{x}_h^{t+1}$ のどんな正の要素もまた $\bar{x}_h^{t+1} - \bar{x}_h^{t+1}$ の正の要素でなければならない。よって，$p_b^t \cdot \{ p_h^{t+1} (\bar{x}_h^{t+1} - \bar{x}_h^{t+1}) \} > 0$ となる。そこで，$p_b^1 \cdot \bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1} \cdot \bar{x}_{hb}^{T-1} = p_b^1 (p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots$

$+p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)$ と，$p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}=p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)$ という仮定より，確かに $p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}<p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1+\cdots+p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}$ となる。

最後に $p_h^{t+1}\cdot\bar{x}_h^{t+1}\leqq\bar{x}_{hb}^t$ for $\bar{x}_h^{t+1}\in X_h^{t+1}$ $(t=1,2,\cdots,T-1)$ が成り立つので，明らかに，

$\bar{x}_h=(\bar{x}_h^1,\bar{x}_{hb}^1,\cdots,\bar{x}_{hb}^{T-1})=(\bar{x}_h^1,p_h^2\cdot\bar{x}_h^2,\cdots,p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)\in X_h$。 Q.E.D.

注意16

注意8(i)でふれたように $K_f^t(y_f^t)-p_f^t\cdot y_f^t<0$ for some t $(=2,3,\cdots,T)$ という可能性があるので，注意12(i)のように定義された $\bar{x}_{hb}^t(t=1,2,\cdots,T-1)$ が非負であるという保証はない。そこで，定理3(ii)のように債券の最小消費ベクトルの満たすべき条件が2期モデルの場合と比べて緩いものとなる（アロー＝ハーン〔1, pp. 143～144〕参照）。

定理4

$p_h^{t+1}\gg0$(7) for all h and all t $(=1,2,\cdots,T-1)$ と仮定7(i)，定理1，系1が満たされているならば，

$$\hat{X}^{23\cdots T}(x_b)=X^{23\cdots T}\cap\{x^{23\cdots T}\,|\,p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1}\leqq x_{hb}^t \text{ for all } h \text{ and all } t,\ \text{for some } y^{23\cdots T}\in Y^{23\cdots T}:\ \sum_h x_{hb}^t\leqq\sum_f y_{fb}^t+\bar{x}_b^t(y^{23\cdots T})\ (t=1,2,\cdots,T-1),\ p_f^{t+1}y_f^{t+1}\geqq0 \text{ for all } f \text{ and all } t\}$$

はコンパクト集合である。

証明）$$\hat{X}^{t+1}(x_{bt})=X^{t+1}\cap\{x^{t+1}\,|\,p_h^{t+1}\cdot x_h^{t+1}\leqq x_{hb}^t \text{ for all } h,\ \text{for some } y^{t+1}\in Y^{t+1}:\ \sum_h x_{hb}^t\leqq\sum_f y_{fb}^t+\bar{x}_b^t(y^{t+1}),\ p_f^{t+1}\cdot y_f^{t+1}\geqq0 \text{ for all } f\}$$

が有界になることを示せばよい。

今，$\sum_i p_{h_i}^{t+1}\cdot x_{h_i}^{t+1}\leqq x_{hb}^t$ より，$\min_i p_{h_i}^{t+1}=p_{h_i}^{*t+1}$ とすると，$p_{h_i}^{*t+1}\cdot\sum_i x_{h_i}^{t+1}\leqq\sum_i p_{h_i}^{t+1}\cdot x_{h_i}^{t+1}\leqq x_{hb}^t$ が成り立つ。$p_h^{t+1}\gg0$ なので，$\sum_i x_{h_i}^{t+1}\leqq\dfrac{x_{hb}^t}{p_{h_i}^{*t+1}}$ となる。

そこですべての家計について合計し，

$\min_h p_{h_i}^{*t+1}=p_{h^*i}^{*t+1}$ とおき，$\sum_h x_{hb}^t\leqq\sum_f y_{fb}^t+\bar{x}_b^t(y^{t+1})$ を用いると，

$\sum_h\sum_i x_{h_i}^{t+1}\leqq\sum_h\dfrac{x_{hb}^t}{p_{h_i}^{*t+1}}\leqq\dfrac{1}{p_{h^*i}^{*t+1}}\cdot\sum_h x_{hb}^t\leqq\dfrac{1}{p_{h^*i}^{*t+1}}(\sum_f y_{fb}^t+\bar{x}_b^t(y^{t+1}))$ となる。

明らかに仮定7(i)より $\sum_h\sum_i x_{h_i}^{t+1}=\sum_i x_i^{t+1}\geqq0$ だから，これは下から有界である。

また定理1より，$\hat{Y}^{t+1}=Y^{t+1}\cap\{y^{t+1}\,|\,p_f^{t+1}\cdot y_f^{t+1}\geqq0 \text{ for all } f\}$ はコンパクト集合であり，$\bar{x}_b^t$ は y^{t+1} の連続関数だからコンパクトになる。

さらに $\sum_f y_{fb}^t=\sum_f(p_f^{t+1}\cdot y_f^{t+1})$ も有界である。

注(7) $p_h^{t+1},0\in E^n$ のとき，$p_h^{t+1}\gg0$ とは，$p_{hi}^{t+1}>0$ for all i，$(p_{hi}^{t+1},0\in E)$ を意味する。

ゆえに $\hat{X}^{t+1}(x_b^t)$ は有界集合となる。

また仮定7(i)と $\hat{X}^{t+1}$ の定義より $\hat{X}^{t+1}(x_b^t)$ は，閉集合でもある。 Q.E.D.

系2

定理4の仮定と，定理3(i)が満たされているなら，

$$\hat{X}=X\cap\{x|\text{ for some } y^{12\cdots T}\in Y^{12\cdots T}:\ \sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),$$
$$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t(=2,3,\cdots,T)\}$$

はコンパクト集合となる。

証明)

$$\hat{X}=\{x|\text{for some } x^{23\cdots T}\in X^{23\cdots T}:\ p_h{}^{t+1}\cdot x_h{}^{t+1}\leqq x_{hb}{}^t \text{ for all } h \text{ and all } t\ (=1,2,\cdots,T-1)$$
$$\text{for some } y^{12\cdots T}\in Y^{12\cdots T}:\ \sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),$$
$$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t(=2,3,\cdots,T)\}$$

である。

$$y^{12\cdots T}\in\hat{Y}^{12\cdots T'}=Y^{12\cdots T}\cap\{y^{12\cdots T}|\text{for some } x\in X:\ \sum_h x_h{}^1\leqq\sum_f y_f{}^1+\bar{x}^1,$$
$$p_f{}^{t+1}\cdot y_f{}^{t+1}\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\ (=1,2,\cdots,T-1)\}$$

は，仮定7(i)より $\sum_h x_h{}^1\geqq 0$ だから，確かに $\sum_f y_f{}^1+\bar{x}^1\geqq 0$, $p_f{}^{t+1}\cdot y_f{}^{t+1}\geqq 0$ for all f and t $(=1,2,\cdots,T-1)$ を満たす。そこで，$y^{12\cdots T}\in\hat{Y}^{12\cdots T}=Y^{12\cdots T}\cap\{y^{12\cdots T}|\sum_f y_f{}^1+\bar{x}^1\geqq 0,\ p_f{}^{t+1}\cdot y_f{}^{t+1}\geqq 0$ for all f and all t $(=1,2,\cdots,T-1)\}$ となる。つまり，$\hat{Y}^{12\cdots T'}\subset\hat{Y}^{12\cdots T}$。

定理1より $\hat{Y}^{12\cdots T}$ はコンパクトであり，$\hat{Y}^{12\cdots T'}$ は明らかに閉集合であるから，やはりコンパクトである。よって，$\bar{x}(y^{23\cdots T})$ もコンパクトとなり，$\sum_h x_h$ は上から有界となる。

また，定理3(i)より $\sum_h x_h\geqq 0$ だから，下からも有界となる。

よって $\hat{X}$ は有界な集合である。

今 $\hat{X}=\hat{X}^1\times\hat{X}_b{}^1\times\cdots\times\hat{X}_b{}^{T-1}$ とする。

仮定7(i)より $\hat{X}^1$ は明らかに閉となる。

また，定理4より $\hat{X}^{23\cdots T}$ がコンパクトであるから，$\hat{X}_b{}^t$ $(t=1,2,\cdots,T-1)$ もコンパクトになる。 Q.E.D.

注意17

アロー＝ハーン〔1, p. 144〕の X_h の閉性を示す推論過程は明らかに誤っているので，本稿では家計のすべての予想価格 $p_h{}^t(t=2,3,\cdots,T)$ が厳密に正であるということを仮定して，より強い系2を示した。

仮定14

家計 h は予算制約式（注意14(1)）の下で，$U_h{}^{12\cdots T}(x_h{}^{12\cdots T})$ の極大化をはかる。

注意18

予算制約式（注意14(1)）の下での $U_h^{12\cdots T}(x_h^{12\cdots T})$ の極大化は，2段階に分けて行なわれる。

（第1段階）

任意に与えられた $\hat{x}_h=(\hat{x}_h^1, \hat{x}_{hb}^1, \cdots, \hat{x}_{hb}^{T-1})$ に対して，2期以降の予想予算制約式（$t=2, 3, \cdots, T$）の下で $(x_h^2, \cdots, x_h^T)$ に関して $U_h^{12\cdots T}(x_h^{12\cdots T})$ の極大化をはかる。すなわち，

$\max U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1, x_h^2, \cdots, x_h^T)$ subject to $p_h^t\cdot x_h^t \leqq \hat{x}_{hb}^{t-1}$ for $t=2, 3, \cdots, T$

より $x_h^{2\cdots T*}=x_h^{2\cdots T*}(\hat{x}_h)$ が決まる。そして，$x_h^{2\cdots T*}(\hat{x}_h)$ の効用は，$U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1, x_h^{2\cdots T*}(\hat{x}_h))$ $=U_h(\hat{x}_h)$ となる。

（第2段階）

1期の予算制約式の下で $x_h=(x_h^1, x_{hb}^1, \cdots, x_{hb}^{T-1})$ に関して第1段階で得られた極大効用関数 $U_h(x_h)$ の極大化をはかる。すなわち，

$\max U_h(x_h)=\max\{\max U_h^{12\cdots T}(x_h^{12\cdots T})$ subject to $p_h^t\cdot x_h^t\leqq x_{hb}^{t-1}$ for $t=2, \cdots, T\}$

subject to $p^1\cdot x_h^1+p_h^1(x_{hb}^1-\bar{x}_{hb}^1)+\cdots+p_b^{T-1}(x_{hb}^{T-1}-\bar{x}_{hb}^{T-1})$

$$\leqq p^1\cdot\bar{x}_h^1+\sum_f d_{hf}(p\cdot y_f)+\sum_f(\bar{d}_{hf}-d_{hf})K_f$$

より $x_h^*=(x_h^{1*}, x_{hb}^{1*}, \cdots, x_{hb}^{T-1*})$ が決まる。

定義13

$U_h(x_h)=\max U_h^{12\cdots T}(x_h^{12\cdots T})$ subject to $p_h^t\cdot x_h^t\leqq x_{hb}^{t-1}$ for $t=2, 3, \cdots, T$ を，1期の誘導された効用関数と名づける。

注意19

アロー＝ハーン〔1, p. 144〕では，$U_h(x_h)$ の存在を仮定しているが，本稿では定理4が証明されているので，明らかに $U_h(x_h)$ が存在し，あらためてその存在を仮定する必要はない。

定理5

仮定7，8，補助定理2，定理3，4，系2，定義13が満たされているなら，

(i) $U_h(x_h)$ は連続関数である。

(ii) $U_h(x_h)$ は半狭義擬凹の関数である。

(iii) （局所的非飽和性）

すべての $x_h^b\in X_h$ に対して，その近傍に $U_h(x_h)>U_h(x_h^b)$ となるような $x_h\in X_h$ が存在する。

(iv) $U_h(\bar{x}_h)=0$

(v) 任意の $\hat{x}_h^1\in X_h^1$ に対し，$U_h(x_h^1, x_{hb}^1, \cdots, x_{hb}^{T-1})$ は，$(x_{hb}^1, \cdots, x_{hb}^{T-1})$ に関して狭義の増加関数である。すなわち，

$(\hat{x}_{hb}^1, \cdots, \hat{x}_{hb}^{T-1})<(\hat{\hat{x}}_{hb}^1, \cdots, \hat{\hat{x}}_{hb}^{T-1})$ ならば，

$U_h(\hat{x}_h^1, \hat{x}_{hb}^1, \cdots, \hat{x}_{hb}^{T-1})<U_h(\hat{x}_h^1, \hat{\hat{x}}_{hb}^1, \cdots, \hat{\hat{x}}_{hb}^{T-1})$ for any $\hat{x}_h^1\in X_h^1$

証明）（i）連続性の証明

補助定理2より，$U_h^{12\cdots T'}:(X_h^1\times X_{hb}^1\times\cdots\times X_{hb}^{T-1})\times X_h^{23\cdots T}\to E$

は連続関数である。今，

$\Gamma_h: X_{hb}^1\times\cdots\times X_{hb}^{T-1}\to X_h^{23\cdots T}$

$$\Gamma_h(x_{hb}^1,\cdots,x_{hb}^{T-1})=\{(x_h^2,\cdots,x_h^T)\in X_h^{23\cdots T}|p_h^2\cdot x_h^2+p_b^1(p_h^3\cdot x_h^3)+\cdots+ p_b^{T-2}(p_h^T\cdot x_h^T)\leqq x_{hb}^1+p_b^1\cdot x_{hb}^2+\cdots+p_b^{T-2}\cdot x_{hb}^{T-1}\}$$

という対応を定義すると，定理 4，系2が成り立っているので，どんな $(x_{hb}^1,\cdots,x_{hb}^{T-1})$ に対しても $\Gamma_h(x_{hb}^1,\cdots,x_{hb}^{T-1})$ は非空，かつ，コンパクトとなる。また，対応 Γ_h は，$p_h^t\gg 0$ for all t $(=2,3,\cdots,T)$ なので，明らかに連続である。

よって，$U_h: X_h^1\times X_{hb}^1\times\cdots\times X_{hb}^{T-1}\to E$

$$U_h(x_h^1,x_{hb}^1,\cdots,x_{hb}^{T-1})=\max\{U_h^{12\cdots T}(x_h^1,x_h^2,\cdots,x_h^T)| (x_h^2,\cdots,x_h^T)\in\Gamma_h(x_{hb}^1,\cdots,x_{hb}^{T-1})\}$$

は，ベルジュ〔3, p. 116 maximum theorem〕より連続となる。

（ii）半狭義擬凹性の証明

$U_h(x_h^a)>U_h(x_h^b)$，$x_h=\alpha\cdot x_h^a+(1-\alpha)\cdot x_h^b$，$0<\alpha<1$ と仮定する。

$(x_h^{a2},\cdots,x_h^{aT})$ を，$\max U_h^{12\cdots T}(x_h^{a1},x_h^2,\cdots,x_h^T)$ with respect to $(x_h^2,\cdots,x_h^T)$ subject to $p_h^t\cdot x_h^t\leqq x_{hb}^{at-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ で決める。

$(x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$ も同様にして決める。

定義13より $U_h(x_h^a)=U_h^{12\cdots T}(x_h^{a1},x_h^{a2},\cdots,x_h^{aT})$

$U_h(x_h^b)=U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$ となる。

$x_h^t=\alpha\cdot x_h^{at}+(1-\alpha)\cdot x_h^{bt}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ と定義する。補助定理2より $U_h^{12\cdots T}$ は半狭義擬凹の関数である。

今，$U_h^{12\cdots T}(x_h^{a1},x_h^{a2},\cdots,x_h^{aT})>U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$ が成り立っているので，$U_h^{12\cdots T}$ の半狭義擬凹性より，$U_h^{12\cdots T}(x_h^1,x_h^2,\cdots,x_h^T)>U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$

しかし明らかに $p_h^t\cdot x_h^{at}\leqq x_{hb}^{at-1}$，$p_h^t\cdot x_h^{bt}\leqq x_{hb}^{bt-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ より $p_h^t\cdot x_h^t\leqq x_{hb}^{t-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ が成り立つ。

極大値の定義より

$$U_h(x_h)\geqq U_h^{12\cdots T}(x_h^1,x_h^2,\cdots,x_h^T)>U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})=U_h(x_h^b)$$

よって $U_h(x_h^a)>U_h(x_h^b)$ $x_h=\alpha\cdot x_h^a+(1-\alpha)\cdot x_h^b$，$0<\alpha<1$ ならば，確かに，$U_h(x_h)>U_h(x_h^b)$ が成り立つ。

（iii）局所的非飽和性の証明

仮定7（iii）(e) と補助定理2より，すべての $x_h^{b12\cdots T}\in X_h^{12\cdots T}$ に対して

$U_h^{12\cdots T}(x_h^{a12\cdots T})>U_h^{12\cdots T}(x_h^{b12\cdots T})$

となるような $x_h^{a12\cdots T}\in X_h^{12\cdots T}$ が存在する。

今，$(x_h^{b2*},\cdots,x_h^{bT*})$ を

$\max U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$ with respect to $(x_h^{b2},\cdots,x_h^{bT})$ subject to

$p_h^t\cdot x_h^{bt}\leqq x_{hb}^{bt-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ で決める。

同様にして $(x_h^{a2*},\cdots,x_h^{aT*})$ を決める。

すると，任意に与えられた $x_h^b=(x_h^{b1},x_{hb}^{b1},\cdots,x_{hb}^{bT-1})\in X_h$ に対して，定義 13 より，

$U_h(x_h^b)=U_h^{12\cdots T}(x_h^{b1},x_h^{b2*},\cdots,x_h^{bT*})$

$U_h(x_h^a)=U_h^{12\cdots T}(x_h^{a1},x_h^{a2*},\cdots,x_h^{aT*})$ となる。

そこで結局，すべての $x_h^b\in X_h$ に対して，

$U_h(x_h^a)>U_h(x_h^b)$

となるような $x_h^a\in X_h$ が存在する。

本定理(ii)より $x_h=(1-\alpha)\cdot x_h^a+\alpha\cdot x_h^b$, $0\leqq\alpha<1$ とすると，U_h の半狭義擬凹性より

$U_h(x_h)>U_h(x_h^b)$ が成り立つ。

α を 1 に近づけると，x_h は x_h^b へ近づく。よってすべての $x_h^b\in X_h$ に対して，その近傍に，$U_h(x_h)>U_h(x_h^b)$ となるような $x_h\in X_h$ が存在する。

(iv) $U_h(\bar{x}_h)=0$ の証明

$U_h^{12\cdots T}(\bar{x}_h^{12\cdots T})=0$ と，$\bar{x}_h=(\bar{x}_h^1,p_h^2\cdot\bar{x}_h^2,\cdots,p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)$ より，あきらか。

(v) 狭義の単調増加性の証明

$(\hat{x}_{hb}^1,\cdots,\hat{x}_{hb}^{T-1})<(\hat{\hat{x}}_{hb}^1,\cdots,\hat{\hat{x}}_{hb}^{T-1})$ と仮定する。

今，$\hat{x}_h=(\hat{x}_h^1,\hat{x}_{hb}^1,\cdots,\hat{x}_{hb}^{T-1})$，$\hat{\hat{x}}_h=(\hat{x}_h^1,\hat{\hat{x}}_{hb}^1,\cdots,\hat{\hat{x}}_{hb}^{T-1})$ とする。

$(\hat{x}_h^2,\cdots,\hat{x}_h^T)$ を $\max U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1,x_h^2,\cdots,x_h^T)$ with respect to $(x_h^2,\cdots,x_h^T)$

subject to $p_h^t\cdot x_h^t\leqq\hat{x}_{hb}^{t-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ で決める。

同様に $(\hat{\hat{x}}_h^2,\cdots,\hat{\hat{x}}_h^T)$ を決める。

定義13より $U_h(\hat{x}_h)=U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1,\hat{x}_h^2,\cdots,\hat{x}_h^T)$

$U_h(\hat{\hat{x}}_h)=U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1,\hat{\hat{x}}_h^2,\cdots,\hat{\hat{x}}_h^T)$ となる。

仮定 8 より，任意の $\hat{x}_h^1\in X_h^1$ に対して，

$U_h^{12\cdots T}(\hat{x}_h^1,x_h^2,\cdots,x_h^T)$ は $(x_h^2,\cdots,x_h^T)$ に関して非飽和である。

よって，仮定 7 (iii)(d) が成り立っているので，デブリュー〔4, p. 71(2′)〕によって，

$p_h^t\cdot\hat{x}_h^t=\hat{x}_{hb}^{t-1}$, $p_h^t\cdot\hat{\hat{x}}_h^t=\hat{\hat{x}}_{hb}^{t-1}$ $(t=2,3,\cdots,T)$ が成り立つ。

そこで今，$(\hat{x}_{hb}^1,\cdots,\hat{x}_{hb}^{T-1})<(\hat{\hat{x}}_{hb}^1,\cdots,\hat{\hat{x}}_{hb}^{T-1})$ だから，明らかに $U_h(\hat{x}_h)<U_h(\hat{\hat{x}}_h)$ となる。

Q. E. D.

IV－4

まず1期の購買力を書きかえることによって，結局，株式市場が消去されることを示す。その後で，「一時的均衡」の存在を証明するための準備として，補助定理を証明する。

注意20

(i) 仮定14，注意18，定義13より

家計 h の目的は

$$p\cdot x_h \leqq M_h(p,\ y^{23\cdots T})$$

$$M_h = p\cdot\bar{x}_h + \sum_f d_{hf}(p\cdot y_f) + \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf}) K_f(p, y_f^{12\cdots T}) \qquad (3)$$

の下で，U_h の極大化をはかることである。

(ii) 注意8(i)と注意12(i)より，(3)は，

$$M_h(p, y^{23\cdots T}) = p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T) + \sum_f \bar{d}_{hf}\cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T}) \qquad (4)$$

と書き直せる。

よって結局，実際の最終的な株式配分 (d_{hf}) は，現在市場における主体の均衡の決定に影響を及ぼさないことになる。

((4)式の導出)

注意8(i)より

$$K_f - p\cdot y_f = K_f^{2\cdots T}(p, y_f^{2\cdots T}) - p_f^{2\cdots T}\cdot y_f^{2\cdots T}$$
$$= p_b^1(K_f^2 - p_f^2\cdot y_f^2) + \cdots + p_b^{T-1}(K_f^T - p_f^T\cdot y_f^T)$$

注意12(i)と上記の関係より

$$p\cdot\bar{x}_h = p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1}$$
$$= p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1[p_h^2\cdot\bar{x}_h^2 + \sum_f d_{hf}(K_f^2 - p_f^2\cdot y_f^2)] + \cdots +$$
$$p_b^{T-1}[p_h^T\cdot\bar{x}_h^T + \sum_f d_{hf}(K_f^T - p_f^T\cdot y_f^T)]$$
$$= p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T) + \sum_f d_{hf}(K_f - p\cdot y_f)$$

(3)式と以上の関係より

$$M_h = p\cdot\bar{x}_h + \sum_f \bar{d}_{hf}(p\cdot y_f) + \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf})(K_f - p\cdot y_f)$$
$$= p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1\cdot\bar{x}_{hb}^1 + \cdots + p_b^{T-1}\cdot\bar{x}_{hb}^{T-1} + \sum_f \bar{d}_{hf}(p\cdot y_f) + \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf})(K_f - p\cdot y_f)$$
$$= p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T) + \sum_f \bar{d}_{hf}(p\cdot y_f) + \sum_f \bar{d}_{hf}(K_f - p\cdot y_f)$$
$$= p^1\cdot\bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T) + \sum_f \bar{d}_{hf}\cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T})$$

補助定理3

$p > 0$[8], $p_h^t \gg 0$ for all $t\,(=2, 3, \cdots, T)$, $p\cdot y_f \geqq 0$ for all f, 仮定7(ii)，仮定10，定理3(ii)が満たさ

注(8) $p,\ 0 \in E^{n+T-1}$ のとき，$p > 0$ とは，$p_i \geqq 0$ all i かつ $p_i > 0$ for at least one i $(p_i, 0 \in E)$ を意味する。

れているなら，

(i) $M_h \geqq 0$

(ii) $M_h > 0 \longleftrightarrow M_h > p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) = p \cdot \bar{x}_h$

が成り立つ。

証明) (i)$M_h \geqq 0$ の証明

(4)式より $M_h = p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) + \sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T})$。

今，$p > 0$, $p \cdot y_f \geqq 0$ と仮定されている。

仮定10より $K_f - p \cdot y_f = K_f^{2\cdots T}(p, y_f^{2\cdots T}) - p_f^{2\cdots T} \cdot y_f^{2\cdots T} \geqq 0$。

そこで $M_h \geqq p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ となり，明らかに，$M_h \geqq 0$.

(ii)$M_h > 0 \longleftrightarrow M_h > p \cdot \bar{x}_h$ の証明

仮定7(ii)より，$\bar{x}_h^t$ は $\bar{x}_h^t - \bar{x}_h^t$ と，どの期においても ($t = 1, 2, \cdots, T$) 同じ正の要素を持つ。

今，$p > 0$, $p_h^t \gg 0$ for all t ($= 2, 3, \cdots, T$) なので，

$p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) > 0$

$\leftrightarrow p_i^1 > 0$ かつ $\bar{x}_{hi}^1 > 0$ となる i が少なくとも1つ存在するか，または，$p_b^t > 0$ かつ $\bar{x}_{hi}^{t+1} > 0$ となる i, $t \in \{1, 2, \cdots, T-1\}$ が少なくとも1つ存在する。

$p^1(\bar{x}_h^1 - \bar{x}_h^1) + p_b^1\{p_h^2(\bar{x}_h^2 - \bar{x}_h^2)\} + \cdots + p_b^{T-1}\{p_h^T(\bar{x}_h^T - \bar{x}_h^T)\} > 0$

$\leftrightarrow p_i^1 > 0$ かつ $\bar{x}_{hi}^1 - \bar{x}_{hi}^1 > 0$ となる iが少なくとも1つ存在するか，または，$p_b^t > 0$ かつ $\bar{x}_{hi}^{t+1} - \bar{x}_{hi}^{t+1} > 0$ となる i, $t \in \{1, 2, \cdots, T-1\}$ が少なくとも1つ存在する。

そこで $p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) > 0$

$\leftrightarrow p^1(\bar{x}_h^1 - \bar{x}_h^1) + p_b^1\{p_h^2(\bar{x}_h^2 - \bar{x}_h^2)\} + \cdots + p_b^{T-1}\{p_h^T(\bar{x}_h^T - \bar{x}_h^T)\} > 0$。

(4)式より $M_h > 0 \longleftrightarrow p^1 \cdot \bar{x}_h^1 + p_b^1(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2) + \cdots + p_b^{T-1}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T) > 0$

あるいは $\sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T}) > 0$

定理3(ii)より $\bar{x}_h = (\bar{x}_h^1, p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2, \cdots, p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)$ だから $M_h - p \cdot \bar{x}_h > 0$

$\leftrightarrow p^1 \cdot (\bar{x}_h^1 - \bar{x}_h^1) + p_b^1 \cdot \{p_h^2(\bar{x}_h^2 - \bar{x}_h^2)\} + \cdots + p_h^{T-1}\{p_h^T(\bar{x}_h^T - \bar{x}_h^T)\} > 0$

あるいは，$\sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T}) > 0$。 Q.E.D.

V 市 場

V-1

「一時的均衡」の存在を証明するために必要な基本的定義，定理や仮定を述べる。

基本的には静学的競争均衡モデルの場合と同じであるが，1期の家計の購買力と債券の初期保有量が2期以降の生産配分に依存するため，多少の修正が必要となる。すなわち，$M_h = M_h(y^{23\cdots T})$,

$\bar{x}=\bar{x}(y^{23\cdots T})$ となっているのである。

定義14

(i) T期配分の集合を $W^{12\cdots T}=X\times Y^{12\cdots T}$ とする。

(ii) 今期配分の集合を $W=X\times Y$ とする。

(iii) 実現可能な今期配分の集合を

$\hat{W}(y^{23\cdots T})=W\cap\{(x,\ y)|\sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T})\}$ とする。

(iv) 準-実現可能なT期配分の集合を

$\hat{W}^{12\cdots T}=W^{12\cdots T}\cap\{(x,\ y^{12\cdots T})|\sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),\ p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t(=2,3,\cdots,T)\}$

とする。

定理6

仮定3(iii), 定理1, 系1, 定理3(i), 系2が成り立っているなら, $\hat{W}^{12\cdots T}$ は, コンパクトかつ凸な集合である。

証明) ①コンパクト性の証明

定理1, 系1, 2より,

$$\hat{X}\times\hat{Y}^{12\cdots T'}=[X\cap\{x|\text{for some } y^{12\cdots T}\in Y^{12\cdots T}:\ \sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),$$
$$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}]$$
$$\times[Y^{12\cdots T}\cap\{y^{12\cdots T}|\text{ for some } x\in X:\ \sum_h x_h{}^1\leqq\sum_f y_f{}^1+\bar{x}^1,$$
$$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2,3,\cdots,T)\}]=\hat{W}^{12\cdots T}$$

はコンパクトである。

②凸性の証明

仮定3(iii), 定理3(i)より $W^{12\cdots T}=X\times Y^{12\cdots T}$ は凸集合である。

また, $\{x|\text{ for some } y^{12\cdots T}\in Y^{12\cdots T}:\ \sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),$

$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{ and } t\}$

$\times\{y^{12\cdots T}|\text{ for some } x\in X:\ \sum_h x_h{}^1\leqq\sum_f y_f{}^1+\bar{x}^1,$

$p_f{}^t\cdot y_f{}^t\geqq 0 \text{ for all } f \text{and } t\}$

も明らかに凸集合である。

よって, $\hat{W}^{12\cdots T}$ は凸集合である。　Q. E. D.

定義15

(i) u-可能なT期配分の集合を

$W^{12\cdots T}(u)=X(u)\times Y^{12\cdots T}$ とする。

u-可能なT期配分は u-可能な今期消費配分と可能なT期生産配分から成る。

u-可能な今期消費配分の集合は

$X(u)=\underset{h}{\times} X_h(u_h)$、$X_h(u_h)=\{x_h=(x_h^1, x_{hb}^1, \cdots, x_{hb}^{T-1}) \mid U_h(x_h) \geqq u_h\}$ である。

(ii) u-可能な今期配分の集合を

$W(u)=X(u)\times Y$ とする。

ここで，$y_{fb}^{t-1}=p_f^t \cdot y_f^t$ for all f and all t $(=2, 3, \cdots, T)$

(iii) u-実現可能な今期配分の集合を

$$\hat{W}(u,\ y^{23\cdots T})=W(u)\cap\{(x,\ y) \mid \sum_h x_h \leqq \sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T})\}$$

とする。これは，実現可能な u-可能今期配分の集合である。

(iv) 準 u-実現可能な T 期配分の集合を

$$\hat{W}^{12\cdots T}(u,\ y^{23\cdots T})=\{(x, y^{12\cdots T'}) \mid (x, y) \in \hat{W}'(u, y^{23\cdots T}),$$

$$y_{fb}^{t-1}=p_f^t \cdot y_f^{t'} \geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2, 3, \cdots, T)\}$$

$$=W^{12\cdots T}(u)\cap\{(x, y^{12\cdots T'}) \mid \sum_h x_h \leqq \sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T}),$$

$$y_{fb}^{t-1}=p_f^t \cdot y_f^{t'} \geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2, 3, \cdots, T)\}$$

とする。ここで，$y^{23\cdots T'}$ は，必ずしも，もとの $\bar{x}$ を決める $y^{23\cdots T}$ と一致する必要がないことに注意。

定義16

(i) 競争的一時均衡点とは $(a)\sim(d)$ の条件をことごとく満足する $(p^*, x^*, y^*) \in E^{(H+F+1)(n+T-1)}$ の組合わせである。

ここに $p^*=(p^{1*},\ p_b^{1*}, \cdots, p_b^{T-1*}) \in E^{n+T-1}$

$x^*=(x^{1*},\ x_b^{1*}, \cdots, x_b^{T-1*}) \in E^{H(n+T-1)}$

$y^*=(y^{1*},\ y_b^{1*}, \cdots, y_b^{T-1*}) \in E^{F(n+T-1)}$

である。

(a) $p^*>0$ (脚注(8)参照)

(b) (実現可能性) $\sum_h x_h^* \leqq \sum_f y_f^*+\bar{x}(y^{23\cdots T*})$

(c) (利潤極大化) $y_f \in Y_f$ のようなすべての y_f に対して $p^* y_f^* \geqq p^* \cdot y_f$

(d) (効用極大化) $\{x_h \in X_h,\ p^* \cdot x_h \leqq M_h^*(p^*,\ y^{12\cdots T*})$

$$=p^{1*} \cdot \bar{x}_h^1+p_b^{1*}(p_h^2 \cdot \bar{x}_h^2)+\cdots+$$

$$p_b^{T-1*}(p_h^T \cdot \bar{x}_h^T)+\sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f(p^*,\ y_f^{12\cdots T*})\}$$

のようなすべての x_h に対して

$U_h(x_h^*) \geqq U_h(x_h)$

(ii) 補償的一時均衡点とは $(a)\sim(e)$ の条件をことごとく満足する

$(p^*, u^*, x^*, y^*) \in E^{(H+F+1)(n+T-1)+H}$

の組合わせである。

ここに，$u^*=((u_h^*))\in E^H$ である。

(a)　$p^*>0$

(b)　（実現可能性）　$\sum_h x_h^*\leqq\sum_f y_f^*+\bar{x}(y^{23\cdots T*})$

(c)　（利潤極大化）　$y_f\in Y_f$ のようなすべての y_f に対して，$p^*\cdot y_f^*\geqq p^*\cdot y_f$

(d)　（支出の最小化）　$\{x_h\in X_h,\ U_h(x_h)\geqq u_h^*\}$ のようなすべての x_h に対して $p^*\cdot x_h\geqq p^*\cdot x_h^*$

(e)　$p^*\cdot x_h^*=M_h^*(p^*,\ y^{12\cdots T*})$.

(i)(ii)において $y^{12\cdots T*}$ は，異時的利潤極大化と整合的であることを意味する。

定義17

(i)　価格の基本単体を $S_{n+T-1}=\{p=(p^1,p_b^1,\cdots,p_b^{T-1})\mid\sum_{i=1}^{n+T-1}p_i=1,\ p>0\}$ とする。

(ii)　任意に与えられた $y^{23\cdots T}$ に対して，非負のパレート－効率的(9)現在効用配分の集合を $U(y^{23\cdots T})$ とする。また，相対効用ベクトルの集合を $S_H=\{v|v\geqq0,\ \sum_{h=1}^{H}v_h=1\}$ とする。

(iii)　任意に与えられた $y^{23\cdots T}$ に対して，効用の基本単体 S_H から $U(y^{23\cdots T})$ への関数を，$u(v,y^{23\cdots T})$ とする。

(iv)　任意に与えられた $y^{23\cdots T}$ に対して，$U(y^{23\cdots T})$ から S_{n+T-1} への対応を $P(u,\ y^{23\cdots T})$ とする。

(v)　価格が p で配分が $w^{12\cdots T}=(x,\ y^{12\cdots T})$ であるときの家計 h の予算上の余剰を，$s_h(p,\ w^{12\cdots T})=M_h(p,\ y^{12\cdots T})-p\cdot x_h$ で表わす。また，予算が赤字である家計を罰する意味で，$V(p,\ w^{12\cdots T})=S_H\cap\{v|v_h=0 \text{ if } s_h(p,\ w^{12\cdots T})<0\}$ とする。

仮定15

$\sum_f\bar{y}_f+\bar{x}(\bar{y}^{2\cdots T})\gg0$ となるような $\bar{y}\in Y$ が存在する。

注意21

アロー＝ハーン〔1，6章3節〕においては，仮定15が設定されていない。

V－2

角谷の不動点定理を用いて，ある月曜日の市場における「補償的一時均衡点」の存在を証明する。

ある月曜日に開かれるのは，今期取引きされる財と債券に対する市場のみであり，そこでの「補償的一時均衡」が問題とされるわけだが，存在証明に用いる定義14，15，17は，明らかに将来の生産配分 $y^{23\cdots T}$ に依存している。一方，現在生産配分 y は，T 期生産配分 $y^{12\cdots T}$ の連続線型写像（定義3(i)参照）の下での像と考えられる。そこで，角谷の不動点定理を適用する際に，$S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}\to S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}$ という写像のかわりに，$S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}\to S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}$ という写像を考え，この写像が不動点を持つことを示せばよい。

基本的には，アロー＝ハーン〔1，3章～5章〕の静学的競争均衡モデルにおける証明方法と同じ

注(9)　パレート－効率的な効用配分の定義については，アロー＝ハーン〔1，p.91〕参照。

である。

注意22 （証明は概略にとどめる）

(i) 固定された u と $y^{23\cdots T}$ に対して，準 u-実現可能な T 期配分の集合 $\hat{W}^{12\cdots T}(u, y^{23\cdots T})$ は，コンパクトかつ凸である。

証明） X_h を $X_h(u_h)$ で置き換えれば，後は定理6の証明と全く同様。

(ii) 固定された $u^\circ \in U(y^{23\cdots T\circ})$ と $y^{23\cdots T\circ}$ に対して，(a)～(d) の性質を満たす価格ベクトル p が存在する。

(a) $p>0$

(b) $p\cdot z\geqq 0$ all $z\in Z(u^\circ, y^{23\cdots T\circ})$

(c) $p\cdot z=0$, all $z\in \hat{Z}(u^\circ, y^{23\cdots T\circ})$

(d) $(x^\circ, y^\circ)\in \hat{W}(u^\circ, y^{23\cdots T\circ})$ であり，よって，

$U_h(x_h^\circ)\geqq u_h^\circ$, $y_f^\circ\in Y_f$, $\sum_h x_h^\circ \leqq \sum_f y_f^\circ+\sum_h \bar{x}_h(y^{23\cdots T\circ})$ が満たされているならば，

(i) $x_h\in X_h(u_h^\circ)$ のようなすべての x_h に対して，$p\cdot x_h\geqq p\cdot x_h^\circ$

(ii) $y_f\in Y_f$ のようなすべての y_f に対して，$p\cdot y_f^\circ\geqq p\cdot y_f$

(iii) 社会的予算制約式

$$\sum_h p\cdot x_h^\circ=\sum_h \{p^1\cdot\bar{x}_h^1+p_b^1(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)+\sum_f \bar{d}_{hf}\cdot K_f(p, y_f^{12\cdots T\circ})\}$$

が満たされる。

ただし，$Z(u, y^{23\cdots T})$ は，$z(w)=\sum_h x_h-\sum_f y_f-\bar{x}$ という線型写像の下での $W(u, y^{23\cdots T})$ の像。

証明） 定理2(ii)，定理3(i)より $W(u)=X(u)\times Y$ は凸である。よって，$Z(u)$ も凸となり，アロー＝ハーン〔1, pp. 91～94〕と全く同様に証明される。

(iii) 対応 $X_h(u_h)$ は，与えられた u_h に対して凸であり，u_h に関して連続である。

証明） アロー＝ハーン〔1, p. 98. Lemma 11〕参照。

(iv) 対応 $W^{12\cdots T}(u)$ は，与えられた u に対して凸であり，u に関して連続である。

証明） アロー＝ハーン〔1, p. 98. Theorem 5〕の証明において Y を $Y^{12\cdots T}$ で置き換えればよい。

(v) 関数 $u(v, y^{23\cdots T})$ は $(v, y^{23\cdots T})$ に関して連続であり，$v_h=0$ であるとき，そしてそのときにのみ $u_h(v, y^{23\cdots T})=0$ となる。

証明） 任意に与えられた $y^{23\cdots T}$ に対して，関数 $u(v, y^{23\cdots T})$ は v に関して連続である。（アロー＝ハーン〔1, pp. 112～114〕参照）。

パレート-効率的な現在効用 u は，債券の初期保有ベクトル $\bar{x}_b(y^{23\cdots T})$ を通じて $y^{23\cdots T}$ に依存し，明らかに $y^{23\cdots T}$ に関して連続となる。よって，明らかに，$u(v, y^{23\cdots T})$ は $(v, y^{23\cdots T})$ に関して連続となる。

(vi) 準 u-実現可能な T 期配分の集合 $\hat{W}^{12\cdots T}(u, y^{23\cdots T})$ は，$(u, y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続である。

証明）　$\hat{W}^{12\cdots T}(u,\ y^{23\cdots T})$ は，定義15(iv)より，2つの集合の積集合であり，その1つである $W^{12\cdots T}(u)$ は(iv)より u に関して上部半連続である。また，もう1つの集合は u とは独立であり $y^{23\cdots T}$ に関して上部半連続である。よって，$\hat{W}^{12\cdots T}(u,\ y^{23\cdots T})$ は，$(u,\ y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続となる。

(vii)　u-可能な T 期超過需要の集合 $Z^{12\cdots T}(u)=\{z^{12\cdots T}|z^{12\cdots T}=z^{12\cdots T}(w^{12\cdots T})$ for some $w^{12\cdots T}=(x,\ y^{12\cdots T})\in W^{12\cdots T}(u)\}$ は，u に関して下部半連続である。

証明）　アロー＝ハーン〔1, p. 99, Corollary 5′〕において，y を $y^{12\cdots T}$ とすればよい。

(viii)　集合 $P(u,\ y^{23\cdots T})=\{p|p>0,\ p\cdot e=1,\ p\cdot z^{12\cdots T}\geqq 0$ for $z^{12\cdots T}\in Z^{12\cdots T}(u),\ u\in U(y^{23\cdots T})\}$ は，$(u,\ y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続であり，任意に与えられた $(u,\ y^{23\cdots T})$ に対してコンパクトかつ凸である。また，$u\in U(y^{23\cdots T})$ なので，非空。

証明）　アロー＝ハーン〔1, p. 99. Theorem 6〕において，Z を $Z^{12\cdots T}$ で置き換えれば，u に関して上部半連続である。u は，(v)より $y^{23\cdots T}$ に関して連続だから，$P(u,\ y^{23\cdots T})$ は，$(u,\ y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続となる。他は，アロー＝ハーンと全く同様。

(ix)　$S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}$ はコンパクトかつ凸。

(x)　$P[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]$, $\hat{W}^{12\cdots T}[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]$ は，固定された $v,\ y^{23\cdots T}$ に対して，コンパクトかつ凸であり，$(v,\ y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続である。また，

$P[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]\subset S_{n+T-1}$, $\hat{W}^{12\cdots T}[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]\subset\hat{W}^{12\cdots T}$ である。

証明）　(i)(v)(vi)(viii)より，固定された $v,\ y^{23\cdots T}$ に対してコンパクトかつ凸であり，$(v,\ y^{23\cdots T})$ に関して上部半連続であることは明らか。また，定義より $P[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]\subset S_{n+T-1}$, $\hat{W}^{12\cdots T}[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]\subset\hat{W}^{12\cdots T}$ も明らか。

(xi)　固定された p と $w^{12\cdots T}$ に対して，$V(p,\ w^{12\cdots T})$ はコンパクトかつ凸である。$V(p,\ w^{12\cdots T})$ は，$(p,\ w^{12\cdots T})$ に関して上部半連続である。また，$V(p,\ w^{12\cdots T})\subset S_H$

証明）　アロー＝ハーン〔1, p. 115〕において，w を $w^{12\cdots T}$ で置き換えればよい，　Q. E. D.

定理 7

仮定1～15，定理1～6，定義1～17，補助定理1，2(除3)，系1，2，注意 1～22 が満たされるなら，「補償的一時均衡点」が存在する。

証明）　$S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}\rightarrow S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}$ という対応は，定義域 $S_{n+T-1}\times S_H\times\hat{W}^{12\cdots T}$ をその部分集合 $P[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]\times V(p,\ w^{12\cdots T})\times\hat{W}^{12\cdots T}[u(v,\ y^{23\cdots T}),\ y^{23\cdots T}]$ へ写像すると考えられる。

(i)　写像の考えを簡単に述べる。

まず任意に $w^{12\cdots T}=(x,\ y^{12\cdots T})\in\hat{W}^{12\cdots T}$ が選ばれると，効用 $u(y^{23\cdots T})$ がそれに応じて決まり，その $(u,\ y^{23\cdots T})$ に対して，対応 $P(u,\ y^{23\cdots T})$, $\hat{W}(u,\ y^{23\cdots T})$ が存在することになる。

今 $p \in P(u, y^{23\cdots T})$ に注目すると，定理 5 (v) が成り立っているので，$p_b{}^t > 0$ for all $t(=1, 2, \cdots, T-1)$ となる。そこで，補助定理 1 より $y_{fb}{}^{t-1} = p_f{}^t \cdot y_f{}^{t'} \geqq 0$ for all f and $t(=2, 3, \cdots, T)$ が成り立つ。

つまり，$p \in P(u, y^{23\cdots T})$，$w = (x, y) \in \hat{W}(u, y^{23\cdots T})$ が決まると，それに応じて，$w^{12\cdots T'} = (x, y^{12\cdots T'}) \in \hat{W}^{12\cdots T}(u, y^{23\cdots T})$ が決まると考えられる。最後に $p \in P(u, y^{23\cdots T})$，$w^{12\cdots T'} \in \hat{W}^{12\cdots T}(u, y^{23\cdots T})$ より，$s_h(p, w^{12\cdots T})$ を通じて $V(p, w^{12\cdots T})$ が決まる。

(ii) 注意22(i)(vi)(ix)(x)(xi)より

対応 $P[u(v, y^{23\cdots T}), y^{23\cdots T}] \times V(p, w^{12\cdots T}) \times \hat{W}^{12\cdots T}[u(v, y^{23\cdots T}), y^{23\cdots T}]$ は，角谷の不動点定理(10)によって，

$$(p^*, v^*, w^{12\cdots T*}) \in P[u(v^*, y^{23\cdots T*}), y^{23\cdots T*}] \times V(p^*, w^{12\cdots T*}) \times \hat{W}^{12\cdots T}[u(v^*, y^{23\cdots T*}), y^{23\cdots T*}]$$

というような不動点 $(p^*, v^*, w^{12\cdots T*}) \in S_{n+T-1} \times S_H \times \hat{W}^{12\cdots T}$ を持つ。

(iii) この不動点が，実際「補償的一時均衡点」の条件（定義16(ii) (a)～(e)）を満たしていることを示す。

まず，$w^{12\cdots T*} = (x^*, y^{1*}, \cdots, y^{T*})$ より決まった $y^{23\cdots T*}$ を用いて，$u^* = u(v^*, y^{23\cdots T*})$ とおく。

$\hat{W}^{12\cdots T}(u^*, y^{23\cdots T*})$ の定義（定義15(iv)）より，

$$\hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*}) = \{(x^*, y^*) \mid (x^*, y^{12\cdots T*}) \in \hat{W}^{12\cdots T}(u^*, y^{23\cdots T*}),$$
$$y_{fb}{}^{t-1*} = p_f{}^t \cdot y_f{}^{t*} \geqq 0 \text{ for all } f \text{ and all } t\ (=2, 3, \cdots, T)\}$$

とおくと，明らかに $\hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*}) \subset \hat{W}(u^*, y^{23\cdots T*})$ であり，また $(x^*, y^{12\cdots T*}) \in \hat{W}^{12\cdots T}(u^*, y^{23\cdots T*})$ ならば，それに対応する (x^*, y^*) については $(x^*, y^*) \in \hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*})$ が成り立つ。よって，注意22(ii)が，$\hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*})$，$\hat{Z}'(u^*, y^{23\cdots T*})$，$Z'(u^*, y^{23\cdots T*})$ に関して成り立っていると考えられる。

定義16(ii)(a) の証明：

$p^* \in P(u^*, y^{23\cdots T*})$ よりあきらか。

(b) の証明：

$w^* = (x^*, y^*) \in \hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*})$ なので，$\hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*})$ の定義より明らか。

(c) (d) の証明：

$p^* \in P(u^*, y^{23\cdots T*})$，$w^* \in \hat{W}'(u^*, y^{23\cdots T*})$ なので，注意22(ii)(d)(i)(ii)より明らか。

(e) の証明：

注意22(ii)(d)(iii)より

$$\sum_h p^* \cdot x_h^* = \sum_h \{p^{1*} \cdot \bar{x}_h{}^1 + p_b{}^{1*}(p_h{}^2 \cdot \bar{x}_h{}^2) + \cdots + p_b{}^{T-1*}(p_h{}^T \cdot \bar{x}_h{}^T) + \sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f(p^*, y_f{}^{12\cdots T*})\}$$ が成り立つている。

注(10) 角谷の不動点定理については，例えば，アロー＝ハーン〔1, p. 423, Theorem 4〕など参照。

これは，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})=M_h^*(p^*, y^{12\cdots T*})-p^*\cdot x_h^*$ より，$\sum_h s_h(p^*, w^{12\cdots T*})=0$ を意味する。そこで今，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})=0$ for all h を示せばよい。

$\sum_h s_h(p^*, w^{12\cdots T*})=0$ が成り立っているので，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})\geqq 0$ for all h を示せば充分である。

$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})<0$ for some h と仮定する。すると，$v^*\in V(p^*, w^{12\cdots T*})$ であり，$V(p^*, w^{12\cdots T*})$ の定義より $v_h^*=0$ となる。よって注意22(v)より $u_h^*=0$ となる。

一方，定理5(iv)より $\bar{x}_h\in X_h(0)$ である。$x_h\in X_h(u_h^*)=X_h(0)$ のようなすべての x_h に対して $p^*\cdot x_h\geqq p^*\cdot x_h^*$ なので，

$p^*\cdot x_h^*\leqq p^*\cdot\bar{x}_h\leqq p^{1*}\bar{x}_h^1+p_b^{1*}(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1*}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)\leqq M_h^*(p^*, y^{12\cdots T*})$ となる。

$p^{1*}\cdot\bar{x}_h^1+p_b^{1*}(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1*}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)\leqq p^{1*}\cdot\bar{x}_h^1+p_b^{1*}(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1*}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)$ は $\bar{x}_h^t\leqq\bar{x}_h^t$ for $t=1, 2, \cdots, T$ より。

$p^{1*}\cdot\bar{x}_h^1+p_b^{1*}(p_h^2\cdot\bar{x}_h^2)+\cdots+p_b^{T-1*}(p_h^T\cdot\bar{x}_h^T)\leqq M_h^*(p^*, y^{12\cdots T*})$ は，利潤極大化によって $K_f(p^*, y_f^{12\cdots T*})\geqq p^*\cdot y_f^*\geqq p^*\cdot 0\geqq 0$ が成り立っていることから明らか。

よって，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})<0$ for some h という仮定より，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})\geqq 0$ for some h となりこれは矛盾。

よって，$s_h(p^*, w^{12\cdots T*})=0$ for all h。　　Q. E. D.

注意23

注意6，注意17でふれたように，本稿では，定理1，系1，定理4，系2というアロー＝ハーン〔1, 6章3節〕とは若干異なる命題を提示しているため，「補償的一時均衡点」の存在証明も，アロー＝ハーン〔1, pp. 147～149〕とは，多少異なっている。

V-3

V-2では，「補償的一時均衡点」の存在が証明された。そこで次に，家計間の "indirectly resource-related" (定義18参照) を仮定することによって，V-2 の結果を用いて，「競争的一時均衡点」の存在を証明する。

定義18

(i) y_f や U_h が，一定のその時に与えられている $p_f^2, \cdots, p_f^T, p_h^2, \cdots, p_h^T, \hat{p}_b^1, \cdots, \hat{p}_b^{T-1}$ で評価され，$\bar{x}_b(y^{23\cdots T})$ が与えられたものとみなされ，また，$p_f^2, \cdots, p_f^T, p_h^2, \cdots, p_h^T, \hat{p}_b^1, \cdots, \hat{p}_b^{T-1}$ に対する他の配分の影響が無視される時，すべての実現可能な配分 $(x, y)\in\hat{W}(y^{23\cdots T})$: $x_h\in X_h$ for all h, $y_f\in Y_f$ for all f, $\sum_h x_h\leqq\sum_f y_f+\bar{x}(y^{23\cdots T})$ に対して，以下の $(a)\sim(e)$ の条件を満たす配分 (x', y') とベクトル $\bar{x}'(y^{23\cdots T'})$ が存在するならば，

ある与えられた $\bar{x}_b(y^{23\cdots T})$ について，家計 h' は家計 h'' に対して "resource-related" である

という。

(初期保有量が $\bar{x}'(y^{23\cdots T'})$ ならば，(x', y') は実現可能である) すなわち

(a) $\sum_h x_h' \leqq \sum_f y_f' + \bar{x}'(y^{23\cdots T'})$, $x_h' \in X_h$ for all h, $y_f' \in Y_f$ for all f

(何びとの効用も (x, y) から (x', y') になることによって損われず家計 h'' の効用は高められる) すなわち

(b) $U_h(x'_h) \geqq U_h(x_h)$ for all h

(c) $U_{h''}(x'_{h''}) > U_{h''}(x_{h''})$ for some h''

($\bar{x}'(y^{23\cdots T'})$ は家計 h' が正の初期保有量を持っている財に対する初期保有量のみが増加したものである) すなわち

(d) $\bar{x}'(y^{23\cdots T'}) \geqq \bar{x}(y^{23\cdots T})$

(e) $\bar{x}'_i > \bar{x}_i$ only if $\bar{x}_{h'i} > 0$

(ii) どんな一定の $\bar{x}_b(y^{23\cdots T})$ についても，家計 h' が家計 h'' に対して "resource-related" ならば，家計 h' は家計 h'' に対して "resource-related" であるという。

(iii) $h_0 = h'$, $h_n = h''$ とするとき，$h_i (i=0, \cdots, n-1)$ が h_{i+1} に対して "resource-related" であるような家計 $h_i (i=0, \cdots, n)$ の列が存在するならば，家計 h' は家計 h'' に対して "indirectly resource-related" であるという。

補助定理 4

(p^*, u^*, x^*, y^*) が「補償的一時均衡点」であり，仮定15が満たされているならば，ある家計 h にとって，$M_h^* > 0$ である。

証明) $\sum_h M_h^* > 0$ を証明すれば充分である。

定義より

$$\begin{aligned}
\sum_h M_h^* &= \sum_h \{p^* \cdot \bar{x}_h + \sum_f d_{hf}(p^* \cdot y_f^*) + \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf}) K_f^*\} \\
&= \sum_h p^* \cdot \bar{x}_h + \sum_h \sum_f d_{hf}(p^* \cdot y_f^*) + \sum_h \sum_f (\bar{d}_{hf} - d_{hf}) K_f^* \\
&= \sum_h p^* \cdot \bar{x}_h + \sum_h \sum_f d_{hf}(p^* \cdot y_f^*) + \sum_h \sum_f \bar{d}_{hf} \cdot K_f^* - \sum_h \sum_f d_{hf} \cdot K_f^* \\
&\qquad (\textstyle\sum_h d_{hf} = 1 \text{ for all } f,\ \sum_h \bar{d}_{hf} = 1 \text{ for all } f) \\
&= \sum_h p^* \cdot \bar{x}_h + \sum_f p^* \cdot y_f^* = p^* \cdot \bar{x}(y^{23\cdots T*}) + \sum_f p^* \cdot y_f^*
\end{aligned}$$

仮定14より $\bar{x}(\bar{y}^{23\cdots T}) + \bar{y} \gg 0$ となるような $\bar{y} \in Y$ が存在する。

定義16(ii)(a) より $p^* > 0$ なので，

$p^* \cdot \bar{x}(\bar{y}^{23\cdots T}) + p^* \cdot \bar{y} = p^*(\bar{x} + \bar{y}) > 0$

定義16(ii)(c) より y_f^* はすべての f について Y_f 上の利潤極大化計画なので

$y^* = \sum_f y_f^*$ は，$Y = \sum_f Y_f$ 上の利潤極大化計画である。

よって，$\sum_f p^* \cdot y_f^* = p^* \cdot y^* \geqq p^* \cdot \bar{y}$

また同様にして $y^{23\cdots T*}$ は異時的利潤極大化計画なので，$\bar{x}(y^{23\cdots T*})\geqq\bar{x}(\bar{y}^{23\cdots T})$。

よって，$\sum_h M_h^*=p^*\cdot\bar{x}(y^{23\cdots T*})+\sum_f p^*\cdot y_f^*>0$ Q. E. D.

注意24

$\{x_h\in X_h,\ U_h(x_h)\geqq u_h^\circ=U_h(x_h^\circ)\}$ のようなすべての x_h に対して $p\cdot x_h\geqq p\cdot x_h^*$ であり，かつある $x_h'\in X_h$ に対して，$p\cdot x_h^*>p\cdot x_h'$ ならば，$\{x_h\in X_h,\ p\cdot x_h\leqq p\cdot x_h^*\}$ のようなすべての x_h に対して，$U_h(x_h^*)\geqq U_h(x_h)$ である。

証明）アロー＝ハーン〔1, p. 81 Lemma 3〕参照。

補助定理 5

M_h^* を，ある「補償的一時均衡点」における家計 h の所得とする。家計 h' が家計 h'' に対して "resource-related" であり，$M^*_{h''}>0$, かつ，注意 24，補助定理 3 が満たされているならば，$M^*_{h'}>0$ である。

証明）「補償的一時均衡点」を (p^*, u^*, x^*, y^*) とする。

"resource-related" の仮定より $(x,\ y)$ を $(x^*,\ y^*)$ で置き換えれば，定義18(ii)，従って 18(i)の $(a)\sim(e)$ を満たす配分 $(x',\ y')$ とベクトル $\bar{x}'(y^{23\cdots T'})$ が存在する。

$\{x_h\in X_h,\ U_h(x_h)\geqq u_h^*\}$ のようなすべての x_h に対して $p^*\cdot x_h\geqq p^*\cdot x_h^*$ なので，定義18(ii)(b) より，$p^*\cdot x_h'\geqq p^*\cdot x_h^*$ for all h が成り立つ。

補助定理 3 (ii)より，$M_h>0$ ならば，$p\cdot\hat{x}_h<M_h$ となるような $\hat{x}_h(=\bar{x}_h)\in X_h$ が存在する。ところが今，$M^*_{h''}>0$ なので，定義16(ii)(e) より，ある $\hat{x}_{h''}\in X_{h''}$ に対して，$p^*\cdot x^*_{h''}=M^*_{h''}>p^*\cdot\hat{x}_{h''}$ が成り立つ。

そこで，定義16(ii)(d) が成り立っているから，注意24が使えて，$\{x_{h''}\in X_{h''},\ p^*\cdot x_{h''}\leqq p^*\cdot x^*_{h''}\}$ のようなすべての $x_{h''}$ に対して，$U_{h''}(x^*_{h''})\geqq U_{h''}(x_{h''})$ である。

そこで，定義18(ii)(c) より，$x'_{h''}$ は，この予算制約式を満たすことができない。つまり $p^*\cdot x'_{h''}>p^*\cdot x^*_{h''}$ が成り立つ。

よって，$p^*\cdot\sum_h x_h'>p^*\cdot\sum_h x_h^*$ となる。

一方，定義16(ii)(c) より，すべての f について，$y_f\in Y_f$ のようなすべての y_f に対して，$p^*y_f^*\geqq p^*\cdot y_f'$ が成り立つ。

よって，$p^*\cdot\sum_f y_f'\leqq p^*\cdot\sum_f y_f^*$ となる。

定義16(ii)(e) より，すべての h について合計して $p^*\cdot\sum_h x_h^*=\sum_f p^*\cdot y_f^*+p^*\cdot\bar{x}(y^{23\cdots T*})$。

よって，$p^*\cdot\sum_h x_h'-p^*\cdot\sum_f y_f'>p^*\cdot\bar{x}(y^{23\cdots T*})$。

定義16(ii)(a) より $p^*>0$ なので，定義18(ii)(a) より $p^*\sum_h x_h'-p^*\cdot\sum_f y_f'\leqq p^*\cdot\bar{x}'(y^{23\cdots T'})$。

よって，$p^*(\bar{x}'(y^{23\cdots T'})-\bar{x}(y^{23\cdots T*}))>0$。

$p^*\cdot(\bar{x}'(y^{23\cdots T'})-\bar{x}(y^{23\cdots T*}))>0$

$\leftrightarrow$ for some i, $p_i^*>0$ かつ $\bar{x}_i'-\bar{x}_i>0$

よって定義18(ii)(e) より

for some i, $p_i^*>0$ かつ $\bar{x}_{h'i}>0$ となる。

そして，これは，$p^{1*}\cdot\bar{x}_{h'}^1+p_b^{1*}(p_{h'}^2\cdot\bar{x}_{h'}^2)+\cdots+p_b^{T-1*}(p_{h'}^T\cdot\bar{x}_{h'}^T)>0$ を意味する。

よって，$M^*_{h'}>0$ Q. E. D.

系 3

M_h^* を，ある「補償的一時均衡点」における家計 h の所得とする。

家計 h' が家計 h'' に対して "indirectly resource-related" であり，かつ，$M^*_{h''}>0$ ならば，$M^*_{h'}>0$ である。

証明） 定義 18(iii) より，h_{n-1} は $h_n=h''$ に対して，"resource-related" である。

$M^*_{h''}>0$ なので，補助定理 5 より $M_h{}^*_{n-1}>0$。以下同様にして $M_h{}^*_{n-2}>0, \cdots, M^*_{h^0}=M^*_{h'}>0$ が成り立つ。 Q. E. D.

定理 8

仮定 1～15，定理 1～7，定義 1～18，補助定理 1～5，系 1～3，注意 1～24 が成り立ち，かつ，すべての家計が互いに "indirectly resource-related" であるならば，「競争的一時均衡点」が存在する。

証明）

(i) すべての条件が満たされているので，定理 7 で証明したように「補償的一時均衡点」が存在する。

よって，補助定理 4 より，ある家計 h'' にとって $M^*_{h''}>0$ である。

仮定によってすべての家計は，家計 h'' に対して "indirectly resource-related" である。よって，系 3 よりすべての家計 h に対して，$M^*_h>0$ である。

(ii) 今「競争的一時均衡点」と「補償的一時均衡点」の定義を比べると，定義16(ii)(a)～(c) は，定義16(i)(a)～(c) と全く同じである。そこで，定義16(ii)(d) (e) と，定義 16(i)(d) の関係にのみ注目すればよい。

$M_h>0$ ならば，補助定理 3 (ii)より，$p\cdot\hat{x}_h<M_h$ となるような $\hat{x}_h(=\bar{x}_h)\in X_h$ が存在する。

ところが今，すべての家計 h に対して，$M^*_h>0$ なので，定義16(ii)(e) より，ある $\hat{x}_h\in X_h$ に対して，$p^*\cdot x_h^*=M_h^*>p^*\cdot\hat{x}_h$ が成り立つ。

よって，定義16(ii)(d) が成り立っているから，注意24が使えて，

$\{x_h\in X_h,\ p^*\cdot x_h\leq M_h^*\}$ であるようなすべての x_h に対して，$U_h(x_h^*)\geqq U_h(x_h)$。

つまり，定義16(i)(d) が成り立つ。 Q. E. D.

Ⅵ おわりに

本稿のモデルは，はじめにもふれたように，アロー＝ハーン〔1, 6章3節〕のモデルを一般化したものである。彼等は，各主体の経済的視野が2期間であると仮定しているが，それを多期間に拡張することによって，特に，債券市場に，投機的行動が表われてきている点は興味深い。第Ⅲ，Ⅳ節で述べたように，長期貸附市場に参加する貸手たる家計は，商品市場の投機家（危険選好者）と同じような立場にあり，同じく，長期貸附市場に参加する借手たる企業は，商品市場の繋ぎ手（危険回避者）と同じような立場にあるのである。

その他の相違点については，その都度述べておいた。

本稿のモデルでは，予想価格が現在価格とは独立であると仮定しているが，予想価格が現在価格の連続関数であると仮定しても，議論の本筋には影響がないものと思われる。また，それによって，ある月曜日の市場における安定分析（一時的均衡への収束の分析）も可能となろう。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J. and F. H. Hahn, *General Competitive Analysis*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1971.
〔2〕 Arrow, K. J., "The firm in general equilibrium theory," in R. Marris and A. Wood (eds.), *The Corporate Economy: Growth, Competition, and Innovative Potential*, London, Macmillan, 1971.
〔3〕 Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, 1963.
〔4〕 Debreu, G., *Theory of Value*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959.
〔5〕 福岡正夫，"消費者均衡の純粋理論"，『経済学年報』12巻，1968.
〔6〕 福岡正夫，"生産者均衡の純粋理論"，『三田学会雑誌』62巻9号，1969.
〔7〕 福岡正夫，"競争均衡の存在"『経済学年報』14巻，1970.
〔8〕 ヒックス，J.R.，『価値と資本Ⅰ，Ⅱ』岩波，1946.
〔9〕 ヒックス，J.R.，『資本と成長』岩波，1965.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科修士課程）