慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	市場のゆがみと経済厚生(II)
Sub Title	Market distortion and economic welfare (II)
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1973
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.66, No.2/3 (1973. 3) ,p.169(83)- 184(98)
JaLC DOI	10.14991/001.19730301-0083
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19730301-0083

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

市場のゆがみと経済厚生（II）(注1)

川　又　邦　雄

8.　問題の提起と基本定理の意義

前稿においてわれわれは市場のゆがみの尺度を導入し，ゆがみの減少が経済厚生を高めるか否かを，消費者が一人生産者が一人の場合を中心に吟味した。そこで明らかにされたように，消費者の選好順序，生産者の技術条件について通常の仮定をおくことにしても，大きなゆがみに対応する均衡のなかには小さなゆがみに対応する均衡よりもパレートの意味で劣ったものが存在する可能性を排除しえない(前稿4節例1と例2)。この可能性を排除する十分条件としてわれわれの手もとにあるのは，フォスター＝ソンネンシャイン〔4〕の財の数が二で劣等消費財がないという条件(5節定理1)，ならびに，財の数は一般の有限個でよいが，劣等消費財がなく，生産における限界代替率が一定という条件（6節定理2）の二組である。こうした事実は，市場のゆがみの減少が，経済的厚生を高めるというわれわれの経済的直観を正当化するものではない。ではこの直観はいかに根拠づけられるのであろうか。

これに対するわれわれの解答は本稿の定理3によって与えられる。その主張は，あるゆがみを持った均衡が与えられた時，それよりも小さな任意のゆがみに対して均衡が存在し，各ゆがみについて与えられた均衡のどれよりもパレートの意味ですぐれたものがあるということである。つまり，小さなゆがみに対応する均衡のすべてが，大きなゆがみに対応する均衡のどれよりもパレートの意味ですぐれているとは一般にはいえないが，市場のゆがみの減少は上にのべた意味において潜在的厚生を高めるといえるのである。またとくに各ゆがみに対応する均衡が唯一つに定まる場合には，ゆがみの減少は確実に経済厚生を高めることが主張できるわけである。

9.　ゆがみをともなった均衡の特色づけ

以下数節にわたってわれわれが証明しようとするのは次の命題である。

注(1)　本論文の第1部は三田学会雑誌65巻11号に掲載。

定理 1　消費者が一人生産者が一人の経済においては，もし前稿2節の仮定が満たされている場合には，

(*a*)　任意の $0\leqq\lambda<1$ と0でないゆがみ $d\in D^n$ を持つ均衡が与えられた時，ゆがみ λd を持つ均衡で消費者の効用が最初の均衡におけるより低くないものが存在する。

(*b*)　さらに消費者の選好順序と生産可能集合が強い意味で凸かつ無差別曲面と生産可能性フロンティアがなめらか（2節）なら，λd のゆがみを持つ均衡の中で消費者の効用が高いものが存在する。

この命題は，後に2節の主体についての仮定を満たすヨリ一般的な場合に拡張されるが，証明の基本ステップにはかわりがないので，以下では一般の場合への拡張が明らかになるように記号を定義しつつ，この特別な場合の証明に注意を集中することにしよう。

われわれの仮定の下では効用関数が存在することは良く知られている(たとえばドブリュー〔3〕参照)から，その一つを $U(\cdot)$ として，その値域に属する $\beta\in R$ について，

(1)　$$W^1(\beta)=G(x)-z$$

と定義する。ここで $x\in X$ は $U(x)=\beta$ を満たす消費ベクターで，$G(x)$ はそれ以上の効用を与える消費ベクターの集合，z は消費者の初期保有ベクターを示す。また

(2)　$$W^2=-Y$$

で定義しよう。

つぎに $v\in R^{n-1}$, $\alpha\in R$ とするとき，$f(\cdot,\beta):R^{n-1}\to\bar{R}$ および $g(\cdot):R^{n-1}\to\bar{R}$ をそれぞれ

(3)　$$f(v,\beta)=\inf\{\alpha:(v,\alpha)\in W^1(\beta)\}$$

および

(4)　$$g(v)=\sup\{\alpha:(v,\alpha)\in -W^2\}$$

で定義する。$\alpha=f(v,\beta)$ は効用水準 β の無差別曲面を初期保有ベクターの大きさ z だけ移動した曲面の方程式であり，$\alpha=g(v)$ は生産可能フロンティアの方程式を示すものである。

補助定理 1　2節の仮定の下では，

a)　各効用水準 β について，$f(v,\beta)$ は $v\in R^{n-1}$ の凸関数(注2)であって，すべての v について $f(v,\beta)>-\infty$

b)　$g(v)$ は $v\in R^{n-1}$ の凹関数（$-g(v)$ が凸関数）ですべての v について $g(v)<\infty$

注(2)　$f:R^{n-1}\to\bar{R}$ は (1) $f(x)<\infty$ となる x が存在しかつ (2) すべての x, $y\in R^{n-1}$, $0<\lambda<1$ について $f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqq(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$ となるとき凸関数という。

証明) $f(v, \beta)$ が凸関数であるのは $W^1(\beta)$ が空でない凸集合であることによる。また X (したがって $G(x)$) が順序≦に関して下に有界であり z は一定であるから $f(v, \beta)>\infty$ であることは明らかである。つぎに $g(v)<\infty$ であることを示そう。もしそうでないとすると，$g(v)$ の定義から，$v_0 \in R^{n-1}$ と $\alpha^i \in R$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ で $y^i=(v_0, \alpha^i) \in Y$, $\|y^i\|>1$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ を満たし $\|y^i\| \to \infty$ となるものが存在する。すると Y の凸性と $0 \in Y$ であることより，$t^i=1/\|y^i\|$ に対し

$$\frac{y^i}{\|y^i\|}=(1-t^i)\cdot 0+t^i \cdot y^i \in Y \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$

がえられ，しかも $y^i/\|y^i\| \to (0, 0, \cdots\cdots, 1)$ となる。Y が閉集合であることを用いるこのことは自由生産の可能性を意味し，生産技術に関するわれわれの仮定に矛盾する。$g(v)$ が凹関数であることは生産可能集合 Y が空でない凸集合であることより明らかである。

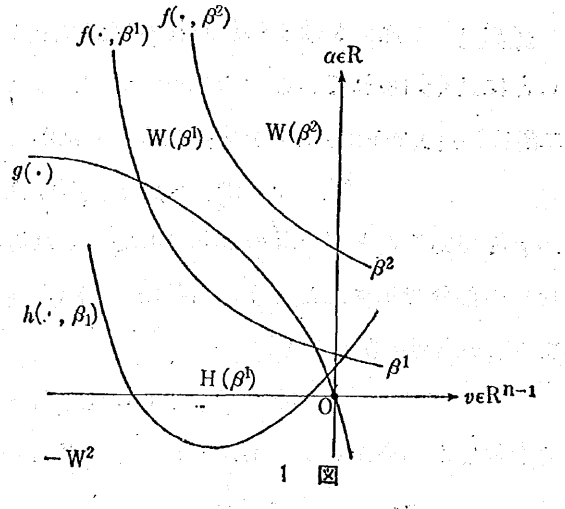
つぎに各効用水準 β について，$v \in R^{n-1}$ の関数 $h(v, \beta): R^{n-1} \to \bar{R}$ を

(5) $$h(v, \beta)=f(v, \beta)-g(v)$$

によって定義しよう (図1)。補助定理1によって上の定義は意味をもち，しかも各 β について $h(\cdot, \beta)$ は凸関数であり，すべての $v \in R^{n-1}$ に対して $h(\cdot, \beta)>-\infty$ となることに注意しよう。またこの各効用水準 β について，R^n の部分集合 $H(\beta)$ を

(6) $$H(\beta)=\{(v, \alpha): v \in R^{n-1},\ \alpha \in R\ \&\ \alpha \geqq h(v, \beta)\}$$

によって定義しよう (図1)。これが凸集合であることは $h(\cdot, \beta)$ が凸関数であることから明らかであり，また $W^1(\beta)$ および W^2 が閉集合であることを用いると，$H(\beta)$ が閉集合であることも容易に確められる。



1 図

以上の記号を用いて，資源配分が達成可能であるための条件をさまざまな同等な形にあらわしておこう。

補助定理 2 消費者が一人生産者が一人の経済においては次の四つの条件は同値である。

a) $U(x^*) \geqq \beta$ となるような達成可能な資源配分 $(x^*, y^*) \in A$ が存在する。

b) $u^* \in W^1(\beta) \cap -W^2$ となるような $u^* \in R^n$ が存在する。

c) $g(v^*) \geqq f(v^*, \beta)$ となるような $v^* \in R^{n-1}$ が存在する。

d) $h(v^*, \beta) \leqq 0$ となるような $v^* \in R^{n-1}$ が存在する。

証明) (*a*) $\Longleftrightarrow$ (*b*) は定義から明らかである。

つぎに $(b) \Longrightarrow (c)$ を示すことにしよう。$u^*=(v^*, \alpha^*) \in R^{n-1} \times R$ とすれば，(3)(4)より，

$$f(v^*, \beta) \leqq \alpha^*$$

$$g(v^*) \geqq \alpha^*$$

したがって (c) が成立する。

$(c) \Longrightarrow (b)$ を示すために $\alpha^1, \alpha^2 \in R$ を

$$\alpha^1 = f(v^*, \beta)$$

$$\alpha^2 = g(v^*)$$

で定義しよう。仮定によって $\alpha^2 \geqq \alpha^1$ である。さて $W^1(\beta)$ および W^2 は閉集合であるから

$$(v^*, \alpha^1) \in W^1(\beta)$$

$$(v^*, \alpha^2) \in -W^2$$

である。各財は望ましいとの仮定より

$$(v^*, \alpha^2) \in W^1(\beta)$$

であるから，

$$u^{**} = (v^*, \alpha^2) \in W^1(\beta) \cap -W^2$$

となって (b) が示されたことになる。

最後に $(c) \Longleftrightarrow (d)$ となることは $h(v^*, \beta)$ の定義より明らかである。

注意 1　2節におけるわれわれの仮定の下では，達成可能資源配分の集合Aがコンパクトであることは良く知られている(これについてはたとえばドブリュー〔3〕pp. 77-78, アロー＝ハーン〔1〕pp. 88-91, 二階堂〔6〕pp. 258-260 などを参照せよ)。したがって，

$$V_0 = \{v \in R^{n-1} : g(v) \geqq f(v, \beta)\}$$

が有界であることがつぎのようにして知られる。まず V_0 の元 v^* に対して，上の証明の $(b) \Longrightarrow (c)$ の部分で示されたように $W^1(\beta) \cap -W^2$ の元 $u^{**} = (v^*, g(v^*))$ が一意に対応する。したがって V_0 が有界であることは

$$U_0 = \{u \in R^n : u \in W^1(\beta) \cap -W^2\}$$

の有界性から導かれる。しかるに U_0 の任意の元 u^* は，ある $U(x^*) \geqq \beta$ を満たす x^* について

$$u^* = x^* - z$$

$$-u^* = -y^*$$

と書きあらわせるから，$(x^*, y^*) \in A$ となる。したがって上の最後の式から U_0 は有界であることが導かれる。

以下しばらく本節の主要結果である補助定理3をのべるための準備を行おう。まず凸関数 $f: R^{n-1}$

$\to \bar{R}$ の v^0 における準勾配ベクターを，すべて $v \in R^{n-1}$ について

(7) $$f(v) \geqq f(v^0) + \langle \tilde{p}, v - v^0 \rangle$$

を満たす $\tilde{p} \in R^{n-1}$ によって定義しよう。また上の条件を満足する $\tilde{p} \in R^{n-1}$ の集合を $\partial f(v^0)$ であらわすことにする。

また凸関数 $g : R^{n-1} \to \bar{R}$ については，

(8) $\tilde{q} \in \partial(-g(v^0))$

のとき，またそのとき限り

(9) $$-\tilde{q} \in \partial g(v^0)$$

と書くことにしよう。

容易に推測されるように，もし凸関数が微分可能なら

$$\partial f(v_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial v_i}\right)$$

となる。そして v_0 のある近傍内の任意の点で凸関数が有限の値をとるなら，$f(v)$ の準勾配ベクターは常に存在することが知られている（これらについては，たとえば，ロッカフェラー〔7〕を参照）。

つづいてわれわれのモデルに関して，二つの簡単な事実を指摘しておこう。

注意 2　もし2節の仮定が満たされ，しかも生産および消費における代替可能性（2節(2)g および二つの注意を参照）が満たされるなら(3), (4) で定義された関数 $f(v, \beta)$, $g(v)$ について

$$\mathrm{dom} = f\{v : f(v, \beta) < \infty\}$$

および

$$\mathrm{dom}\, g = \{v : g(v) > -\infty\}$$

は開集合である（このことは2節の注意1および2の証明から明らかである）。したがって $\mathrm{dom} f$ ($\mathrm{dom}\, g$) 内の任意の点 v において $\partial f(v, \beta)$ ($\partial g(v)$) はつねに存在することになる。

注意 3　(i) もし2節の仮定が満たされており，ある $u^* \in R^n$ と0でない $p^*, q^* \in R^n$ について

$$p^* \cdot u^* \leqq p^* \cdot W^1(\beta)$$

$$q^* \cdot (-u^*) \leqq q^* \cdot W^2$$

$$u^* \in W^1(\beta) \cap -W^2$$

が成立している場合には，p^* および q^* の各要素は非負であり，とくにその最後の要素は正である。したがってわれわれは $p^* \in S^n$, $q^* \in S^n$ となるような p^*, q^* をつねに選ぶことができる。なぜなら p^*, q^* が非負でなければならないことは各財が消費者にとって望ましいという仮定ならびに生産における自由処分の可能性の仮定によって明らかであり，最後の要素が正であることは前稿3

節注意2においてのべた。

(*ii*) また，上の関係が成立する場合

$$u^*=(v^*,\ \alpha^*)\in \mathrm{R}^{n-1}\times\mathrm{R}$$

と書くと，

$$\alpha^*=f(v^*,\ \beta)=g(v^*)$$

となることも容易に知られる。たとえば最初の等式を示してみよう。$p^*=(\tilde{p}^*,1)\in \mathrm{R}^{n-1}\times\mathrm{R}$ とおいて注意3の最初の不等式を考慮すると，すべての $(v^*,\ \alpha)\in \mathrm{W}^1(\beta)$ について

$$\langle(\tilde{p}^*,\ 1),\ (v^*,\ \alpha^*)\rangle\leqq\langle(\tilde{p}^*,\ 1),\ (v^*,\ \alpha)\rangle$$

つまり

$$\alpha^*\leqq\alpha$$

が成立する。したがって $(v^*,\ \alpha^*)\in \mathrm{W}^1(\beta)$ であること，ならびに $f(v^*,\ \beta)$ の定義から，

$$\alpha^*=f(v^*,\ \beta)$$

となるのである。

つぎの補助定理は，ゆがみをもつ均衡が存在するための条件をさまざまな同等な表現によっておきかえたものである。

補助定理 3　$p^*=(\tilde{p}^*,\ 1)\in \mathrm{R}^{n-1}\times\mathrm{R}$, $q^*=(\tilde{q}^*,\ 1)\in \mathrm{R}^{n-1}\times\mathrm{R}$, $d=p^*-q^*=(\tilde{d},\ 0)\in \mathrm{R}^{n-1}\times\mathrm{R}$ によって定義すると，2節の仮定の下では以下の四つの条件は同等である。

a)　ゆがみ d をもった均衡 $(x^*,\ y^*,\ p^*,\ q^*)\in \mathrm{R}^{4n}$ で $\mathrm{U}(x^*)=\beta$ となるものが存在する。

b)　$u^*\in \mathrm{W}^1(\beta)\cap-\mathrm{W}^2$ となるような元 u^* で

$$p^*\cdot u^*\leqq p^*\cdot \mathrm{W}^1(\beta)$$
$$q^*(-u^*)\leqq q^*\cdot \mathrm{W}^2$$

を満たすものが存在する。

c)　$f(v^*,\ \beta)=g(v^*)$

$$\tilde{p}^*\in\partial f(v^*,\ \beta)$$
$$\tilde{q}^*\in\partial(-g(v^*))$$

を満たす $v^*\in \mathrm{R}^{n-1}$ が存在する。

d)　$h(v^*,\ \beta)=0$

$$-\tilde{d}\in\partial h(v^*,\ \beta)$$

を満たす $v^*\in \mathrm{R}^{n-1}$ が存在する。

証明) まず $(a) \Longrightarrow (b)$ を示そう。(x^*, y^*) は達成可能ゆえ $u^* \in R^n$ を

$$u^* = x^* - z = y^*$$

を満足するように定義することができる。仮定によって u^* は $W^1(\beta)$ および $-W^2$ に含まれる。またゆがみをもった均衡の定義（3節）から,

$$p^* \cdot (x^* - z) \leqq p^* \cdot (x - z)$$

がすべての $U(x) \geqq \beta$ を満たす $x \in X$ について成立し,

$$q^* \cdot (-y^*) \leqq q^* \cdot (-y)$$

がすべての $y \in Y = -W^2$ について成立する。以上によって (b) が導かれたことになる。

つぎに $(b) \Longrightarrow (a)$ を示そう。$u^* \in W^1(\beta) \cap -W^2$ とすると，ある $U(x^*) \geqq \beta$ を満たす $x^* \in X$ および $y^* \in Y$ について

$$u^* = x^* - z = -y^*$$

となるから $(x^*, y^*) \in A$ であり，仮定 (b) の第一の不等式から

$$p^* \cdot x^* \leqq p^* \cdot x$$

がすべての $U(x) \geqq \beta$ となる $x \in X$ について成立することが，また第二の不等式から

$$q^* \cdot y^* \geqq q^* \cdot Y$$

がしたがう。したがって $U(x^*) = \beta$ のみを示せばよい。すでにみたように $U(x^*) \geqq \beta$ であるから $U(x^*) > \beta$ として矛盾を示そう。この最後の不等式が成り立てば，選好順序の連続性より $x^{**} < x^*$ でしかも $U(x^{**}) > \beta$ となる $x^{**} \in X$ が存在する。これは x^* の支出最小性に矛盾する。

$(b) \Longrightarrow (c)$ を示そう。(b) が満たされているとき (c) の最初の等式が成り立つことは注意2でのべた。また (b) の第一の不等式は，注意3 (ii) によって

$$(\tilde{p}^*, 1) \cdot (v^*, f(v^*, \beta)) \leqq (\tilde{p}^*, 1) \cdot W^1(\beta)$$

となるが，これがすべての $v \in R^{n-1}$ について

$$(\tilde{p}^*, 1) \cdot (v^*, f(v^*, \beta)) \leqq (\tilde{p}^*, 1) \cdot (v, f(v, \beta))$$

を意味することは $f(v, \beta)$ の定義によって明らかである。したがって $-\tilde{p}^* \in \partial f(v^*, \beta)$ が導かれる。残りの条件も同様にして示される。

$(c) \Longrightarrow (b)$ について。(c) が満たされていれば，$\alpha^* \in R$ を

$$\alpha^* = f(v^*, \beta) = g(v^*)$$

によって定義できる。すると，$W^1(\beta)$ および W^2 は閉集合であるから，$f(v^*, \beta)$ および $g(v^*)$ の定義によって

$$u^* = (v^*, \alpha^*) \in W^1(\beta) \cap -W^2$$

となることがわかる。他の関係は $(b) \Longrightarrow (c)$ の証明を逆にたどればよい。

$(c) \Longleftrightarrow (d)$ については，定義によって,

$$h(v^*,\ \beta)=f(v^*,\ \beta)-g(v^*)$$

であり，他方注意1でのべたように，dom f および dom g が開集合であるから，

$$\partial h(v^*,\ \beta)=\partial f(v^*,\ \beta)-\partial g(v^*)$$

となることは（ロッカフェラー〔7〕p. 223 によって）明らかである。

以上の証明とまったく同様にして，つぎの補助定理を証明することができる。

補助定理 4　補助定理3と同じ仮定の下では以下の四つの条件は同等である。

a)　ゆがみ d をもった均衡の五つの条件（3節）のうち達成可能性の条件のみ

$$x^*-y^*-z\leqq 0$$

でおきかえたものを満たす $(x^*,\ y^*,\ p^*,\ q^*)\in R^{4n}$ で $U(x^*)=\beta$ となるものが存在する。

b)　$u^*\leqq u^{**}$, $u^*\in W^1(\beta)$, $u^{**}\in W^2$ であって，

$$p^*\cdot u^*\leqq p^*\cdot W^1(\beta)$$

$$q^*\cdot(-u^{**})\leqq q^*\cdot W^2$$

を満たすものが存在する。

c)

$$f(v^*,\ \beta)\leqq g(v^*)$$

$$-\tilde{p}^*\in\partial f(v^*,\ \beta)$$

$$\tilde{q}^*\in\partial(-g(v^*))$$

となる $v^*\in R^{n-1}$ が存在する。

d)

$$h(v^*,\ \beta)\leqq 0$$

$$-\tilde{d}\in\partial h(v^*,\ \beta)$$

となる $v^*\in R^{n-1}$ が存在する。

10.　ゆがみの減少と均衡の存在

前節の分析に基いて，ゆがみ d をともなう均衡が存在するならば，それよりも小さな任意のゆがみをもつ均衡，しかもパレートの意味で同等かすぐれた均衡の存在することを示すのが本節の課題である。本節でも消費者一人，生産者一人の経済を想定することにしよう。本筋に入る前に，いくつかの基本的概念について準備をしておく。

凸関数 $f:R^{n-1}\to\bar{R}$ は，$v^1,\ v^2\in R^{n-1}$, $v^1\neq v^2$ ならば任意の $0<\lambda<1$ に対して

(1)　$$f((1-\lambda)v^1+\lambda v^2)<(1-\lambda)f(v^1)+\lambda f(v^2)$$

となるとき，強い意味で凸であるという。また各 $v^1 \in R^{n-1}$ において，すべての $v \in R^{n-1}$ に対して

(2) $$f(v) \geqq f(v^1) + \langle \bar{p}, v - v^1 \rangle$$

となる $\bar{p}$ がたかだか一つしか存在しないとき，f はなめらかであるという。

ここで2節の仮定を満たす経済モデルにおいて選好順序ならびに生産可能集合がなめらかであるとすれば，効用 $\beta \in R$ をもたらす達成可能な資源配分がある限り，$h(\cdot, \beta)$ が上の意味でなめらかな凸関数であることが示される。証明には $\bar{d}^1 \neq \bar{d}^2$ かつ

$$d^k \in \partial h(v^*, \beta) = \partial f(v^*, \beta) - \partial g(v^*) \qquad (k=1, 2)$$

となるような $\bar{d}^1, \bar{d}^2 \in R^{n-1}$ が存在するとして矛盾が導かれることをいえばよい。このことは補助定理3の証明にならえば容易に示される。

つぎに $(x^1, y^1) \in A$, $\beta = U(x^1)$ として

(3) $$V_0 = \{v \in R^{n-1} : h(v, \beta) \leqq 0\}$$

(4) $$\partial V_0 = \{\partial h(v, \beta) : v \in V_0\}$$

とおく。このとき次の重要な補助定理が成立する。

補助定理 5 もし2節の仮定が満たされているなら，

a) V_0 は空でないコンパクトな凸集合である。

b) $h(\cdot, \beta)$ は V_0 において最小値を達成し $0 \in \partial V_0$ である。

c) もし $-\bar{d} \in \partial h(v^1, \beta)$, $v^1 \in V_0$ となるなら，すべての $0 \leqq \lambda < 1$ に対して $-\lambda \bar{d} \in \partial h(v^2, \beta)$ となる $v^2 \in V_0$ が存在する。

d) もし $\bar{d} \neq 0$ で $h(\cdot, \beta)$ が強い意味で凸なら，*c)* における $v^2 \in V_0$ は $h(v^2, \beta) < 0$ となるように選べる。

証明) *a)* V_0 が空でないことは $(x^1, y^1) \in A$ と補助定理2による。V_0 が凸集合であるのは $h(\cdot, \beta)$ が $h(\cdot, \beta) > -\infty$ となる凸関数であることより明らかである。V_0 のコンパクト性については9節注意1を参照せよ。

b) $h(\cdot, \beta) = f(\cdot, \beta) - g(v)$ で $W^1(\beta)$ と W^2 が閉凸集合であるから $f(\cdot, \beta)$, $-g(v)$ は凸関数で下半連続である。したがって $h(\cdot, \beta)$ も下半連続な凸関数であり R^{n-1} において（したがって V_0 において）最小値をとる。いま $v^* \in V_0$ において最小値が達成されたとすれば，すべての $v \in R^{n-1}$ について

$$h(v, \beta) \geqq h(v^*, \beta) + \langle 0, v - v^* \rangle$$

となるから $0 \in \partial h(v^*, \beta) \subset \partial V_0$ である。

c) 以下 $h(v, \beta)$ のかわりに $h(v)$ と書くことにして

$$\text{range}\, \partial h = \bigcup \{\partial h(v) : h(v) < \infty\}$$

とする。以下の議論において決定的に重要な事実は range ∂h が"ほとんど"凸であるということである。もしそれが凸であるならばわれわれの結果は $0 \in \text{range}\, h$, $-d \in \text{range}\, h$ からただちにしたがう。それが凸であることが一般にはいえないために以下の証明はやや複雑になる。

さて range ∂h が"ほとんど"凸になるということの意味はある凸集合 A があって

$$\text{int}\, A \subset \text{range}\, \partial h \subset A$$

となることである。ここで A は $h(\cdot)$ の共役凸関数 $h^*(\cdot)$ によって決定されるがここではそれについて深入りする必要はない。ただ V_0 が空でなく有界な場合には (b) の結果が強められて

$$0 \in \text{int}\, A$$

となるという事実は証明のために必要である。これらについてはロッカフェラー〔7〕p. 70, p. 123, p. 227 などを参照されたい。

さて仮定より $-\bar{d} \in \text{range}\, h$ であるから

$$-\bar{d} \in A$$

である。したがって A が凸集合であることを用いると $-\lambda\bar{d} \in \text{int}\, A$, これより

$$-\lambda\bar{d} \in \text{range}\, h \qquad 0 \leqq \lambda < 1$$

が導かれる。以下においてわれわれは

$$-\lambda\bar{d} \in \partial V_0 \qquad 0 \leqq \lambda < 1$$

であることを示そう。$-\lambda\bar{d} \in \text{range}\, h$ であるから，すべての $v \in R^{n-1}$ について

$$h(v) \geqq h(v^2) + \langle -\lambda\bar{d},\ v - v^2 \rangle$$

を満たす $v^2 \in R^{n-1}$ が存在する。他方 $-\bar{d} \in \partial h(v^1)$ より，特に上の v^2 について，

$$h(v^2) \geqq h(v^1) + \langle -\bar{d},\ v^1 - v^2 \rangle$$

である。三行上の不等式を $v = v^1$ について書いてその下の不等式を用いると，$h(v^1) \geqq h(v^2)$ がえられ，$v^1 \in V_0$ と V_0 の定義から $v^2 \in V_0$ となる。かくして $-\lambda\bar{d} \in \partial V_0$ が示された。

d) この場合については，上の証明における $-\lambda\bar{d} \in \text{range}\, h$ を示す不等号がすべての $v \neq v^2$ について強められて"$>$"となる。他は (c) とかわりがない。

命題 1　2節の仮定の下において，もしゆがみ d をもった均衡 $(x^1, y^1, p^1, q^1) \in R^{4n}$ (3節) が存在するなら，すべての $0 \leqq \lambda < 1$ について (i) $x^2 G x^1$ であって (ii) ゆがみ λd をもった均衡の五つの条件 (3節) のうち達成可能性の条件のみ

$$x^2 - y^2 - z \leqq 0$$

でおきかえたものを満たす資源配分と価格の組 $(x^2, y^2, p^2, q^2) \in R^{4n}$ が存在する。

証明) (x^1, y^1, p^1, q^1) をゆがみ d をもった均衡, $\beta=U(x^1)$ とし, $W^1(\beta)$ および W^2 を9節(1),(2)式によって定義しよう。すると, 補助定理3 (a, d) により, $h(v^1, \beta)=0$, $-\bar{d}\in\partial h(v^1, \beta)$ を満たす $v^1\in R^{n-1}$ が存在する。ただし $\bar{d}\in R^{n-1}$ は $d=(\bar{d}, 0)\in R^{n-1}\times R$ によって定義されているものとする。したがって補助定理5によって $h(v^2, \beta)\leqq 0$, $-\lambda\bar{d}\in\partial h(v^2, \beta)$ となるような $v^2\in R^{n-1}$ が存在する。かくして補助定理4(a, d) によって命題が証明されたことになる。

本論文の残りの部分は, 上の命題の結論を満たす (x^2, y^2, p^2, q^2) が存在するとき, (a) 同じゆがみをもった均衡 (x^*, y^*, p^*, q^*) で x^*Gx^2 となるものが存在すること, そして (b) 消費者の選好順序および生産可能集合が強い意味で凸で無差別曲面と生産可能フロンティアがなめらかなら上の結果が強められて x^*Px^2 となることを示すためにあてられている。

注意1　2節の仮定の下では, どのような $(x, y)\in A$ についても $U(x)>\hat{\beta}$ となることがない効用水準 $\hat{\beta}\in R$ が存在する。このことは, 達成可能な資源配分の集合Aのコンパクト性と $U(\cdot)$ の連続性により $\hat{\beta}$ を達成可能な最大な効用水準とすれば, 各財が望ましいとの仮定を用いてただちに示される。したがって補助定理2によって, すべての $\beta>\hat{\beta}$ について, $W^1(\beta)\cap -W^2$ は空集合となる。

注意2　9節の(6)式で定義した $H(\beta)$ はすべての効用水準 $\beta\in R$ について空でない閉凸集合であった。各 $H(\beta)$ について, $\bar{d}=(\bar{d}, 1)\in R^{n-1}\times R$ を所与として

$$M(\beta)=\{u\in H(\beta) : \bar{d}\cdot u\leqq\bar{d}\cdot H(\beta)\}$$

によって定義しよう。すると次の関係が成立する。

$a)$　$M(\beta)$ は凸集合である。

$b)$　$u^*\in M(\beta)$ ならば u^* は $u^*=(v^*, h(v^*\beta))v^*\in R^{n-1}$ とあらわされる。ここで $h(v^*, \beta)$ は9節5式で定義された関数である。

$c)$　$(v^*, h(v^*, \beta))\in M(\beta)\Longleftrightarrow -\bar{d}^*\in\partial h(v^*, \beta)$

$d)$　もし消費者の選好順序と生産可能集合が強い意味で凸なら, 各 β について $M(\beta)$ はたかだか一つの元しか含まない。

証明) (a) は明らかである。(b) については, もし $v^*\in R^{n-1}$, $\alpha^*\in R$ について $u^*=(v^*, \alpha^*)\in M(\beta)$ とすると, 定義によって, すべての $(v, \alpha)\in H(\beta)$ となる $(v, \alpha)\in R^{n-1}\times R$ について

$$(*)\qquad <(\bar{d}, 1), (v^*, \alpha^*)>\leqq<(\bar{d}, 1), (v, \alpha)>$$

となるから, とくに $v=v^*$ とおくと, すべての $(v^*, \alpha)\in H(\beta)$ について $\alpha^*\leqq\alpha$ をうる。また $(v^*, \alpha)\in H(\beta)$ であるから $\alpha^*=h(v^*, \beta)$ となる。

(c)については左辺の条件が上の不等式 $(*)$ と同値であることを考慮すれば, 準導関数の定義か

ら明らかである。

(d) は仮定によって $H(\beta)$ が強い意味で凸であることから容易に導かれる。

以上を前提としていよいよ定理3の証明における最後の補助定理をのべよう。

補助定理 6 2節の仮定の下に，もしある $v^2 \in R^{n-1}$ と効用水準 $\beta^2 \in R$ について $h(v^2, \beta^2) < 0$ かつ $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^2, \beta^2)$ となるなら，(a) $h(v^3, \beta^3) = 0$ かつ $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^3, \beta^3)$ となる $v^3 \in R^{n-1}$ および $\beta^3 \geqq \beta^2$ が存在する。(b) もしさらに選好順序と生産可能集合が強い意味で凸なら，上の β^3 は $\beta^3 > \beta^2$ のように選べる。

証明) (a) $\bar{d}^2 = (\bar{d}^2, 1) \in R^{n-1} \times R$ とし，各 β について

$$M(\beta) = \{x \in H(\beta) : \bar{d}^2 \cdot x \leqq \bar{d}^2 \cdot H(\beta)\}$$

と定義する。仮定と注意2 (b, c) によって，

$$(*) \qquad (v^2, h(v^2, \beta^2)) \in M(\beta^2), \quad h(v^2, \beta^2) < 0$$

である。われわれの証明すべきは，

$$(v^3, h(v^3, \beta^3)) \in M(\beta^3), \quad h(v^3, \beta^3) = 0$$

となる $\beta^3 \geqq \beta^2$, $v^3 \in R^{n-1}$ の存在である。

(ケース1) $M(\beta^3)$ が有界集合でない場合

注意2 (b) によれば $M(\beta^2)$ の任意の元はある $v \in R^{n-1}$ によって $(v, h(v, \beta^2))$ と書ける。そして補助定理5によって，上の元は $h(v, \beta^2) \leqq 0$ である限りある有界な集合に含まれる。したがって，ケース1の仮定の下では，

$$(v^0, h(v^0, \beta)) \in M(\beta^2), \quad h(v^0, \beta^2) > 0$$

となる $v^0 \in R^{n-1}$ が存在しなければならない。しかるに $M(\beta^2)$ は凸集合であるから，(*) を用いると証明すべき関係が $\beta^3 = \beta^2$ として成立する。

(ケース2) $M(\beta^2)$ が有界集合である場合

注意1により，$W^1(\beta^4) \cap -W^2$ が空集合となるような効用水準 $\beta^4 > \beta^3$ が存在する。ここで $M(\beta)$ を $I = [\beta^2, \beta^4]$ から R^n への点対集合写像と考えよう。(*) によって $M(\beta^2)$ は空ではなく，$M(\beta)$ の定義式にあらわれる $H(\beta)$ の性質（そのもとになる選好順序および生産の条件）を用いると，このケースには，各 $\beta \in I$ について $M(\beta)$ が空でなく，しかも写像として $M(\beta)$ は上半連続(注3)であることが導かれる。この証明は需要関数の上半連続性の証明（たとえばドブリュー〔3〕のそれ）と本質的に同一のものであるが，細部にわたる吟味が必要である。この吟味は川又〔5〕において行われているのでここでは再びくりかえすことはしない。

注(3) 点対集合写像 $\Gamma: X \to Y$ は，$\Gamma(x^0)$ を含む任意の開集合 O について，x^0 のある近傍 N 内のすべての点 x について $\Gamma(x) \subset O$ となるとき，x^0 において上半連続であるという（ベルジュ〔2〕参照）。

さて注意2 (b, c) によれば $M(\beta)$ の第 n 座標への写影 $M_n : I \to R$ は

$$M_n(\beta) = \{h(v, \beta) : (v, h(v, \beta)) \in M(\beta)\}$$

と書けるはずである。かくして $M(\cdot)$ についての上の性質により $M_n(\cdot)$ は空でない上半連続写像である（一般に上半連続写像の連続写像は上半連続である)。したがって，注意2 (a) によれば $M_n(\beta)$ は各 $\beta \in I$ について空でない凸集合であることがわかる。このとき $M_n(\cdot)$ の値域は空でない連結集合であることが示される。この点についての証明は後の注意3にまわして，補助定理の証明を続けよう。$M_n(\cdot)$ の値域は

$$S = \{h(v, \beta) : (v, h(v, \beta)) \in M(\beta),\ \beta \in I\}$$

とあらわせるが，β^4 の選び方から $W^1(\beta^4) \cap -W^2$ が空であるから，すべての $v \in R^{n-1}$ について $h(v, \beta^4) > 0$ となる（補助定理2)。他方 $M_n(\beta^4)$ は空でないから，S は正の元を含むことになる。また (*) によって S は負の元も含んでいる。かくして連結性により S は0を含まなければならない。かくして証明すべき関係が示された。

b) 選好順序と生産可能集合が強い意味で凸の場合には，$M(\beta)$ したがって $M_n(\beta)$ は各 $\beta \in I$ について単一の元のみを含む。しかるに上の証明では $h(v^2, \beta^2) < 0$ であり $h(v^3, \beta^3) = 0$ であるから，この場合 $\beta^2 = \beta^3$ とはなれない。$\beta^3 \in I$ を考慮すれば $\beta^3 > \beta^2$ となるわけである。

上の補助定理はつぎの注意3が示されれば，証明が完結したことになる。

注意 3　I が実数の区間，K が I から R への上半連続写像で各 $\beta \in I$ について $K(\beta)$ が空でない連結集合なら，

$$K(I) = \{x \in R : x \in K(\beta) \quad \beta \in I\}$$

は連結である。

証明）もし結論を否定すれば，ある $\alpha^1, \alpha^2, \bar{\alpha} \in R$ $\beta^1, \beta^2 \in I$ について

$$\alpha^1 < \bar{\alpha} < \alpha^2$$

$$\alpha^1 \in K(\beta^1)$$

$$\alpha^2 \in K(\beta^2)$$

$$\bar{\alpha} \notin K(I)$$

となる。つぎに

$$B_1 = \{\beta \in I : K(\beta) \subset (-\infty, \bar{\alpha})\}$$

$$B_2 = \{\beta \in I : K(\beta) \subset (\bar{\alpha}, \infty)\}$$

とおこう。仮定によって各 $\beta \in I$ について

$$K(\beta) \subset (-\infty, \bar{\alpha})$$

または

$$K(\beta) \subset (\bar{\alpha}, \infty)$$

であり $\beta^1 \in B_1$, $\beta^2 \in B_2$ かつつくりかたから $B_1 \cap B_2$ は空集合である。

つぎに B_1 が開集合であることを示そう。じっさいもし $\beta^0 \in B_1$ つまり $K(\beta) \subset (-\infty, \bar{\alpha})$ なら，上半連続性より，ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$|\beta - \beta^0| < \varepsilon \text{ なら } M(\beta) \subset (-\infty, \bar{\alpha})$$

となり，B_1 が開集合であることがわかる。同じ理由によって B_2 も開集合である。すると連結集合 I が二つの空でない，共通部分をもたない開集合の和としてあらわせることになり矛盾である。

11. 基本定理の証明

前節までの補助定理を総合することによって，市場のゆがみの存在と経済厚生に関するわれわれの基本定理 (9 節定理 3) の証明は完結する。以下にそれを示そう (2 図参照)。

(x^1, y^1, p^1, q^1) をゆがみ $d = (\bar{d}, 0) \in R^{n-1} \times R$ をもつ均衡とし $\beta^1 = U(x^1)$ とおく。すると補助定理 3 (a, d) によって $h(v^1, \beta^1) = 0$ および $-\bar{d} \in \partial h(v^1, \beta^1)$ を満たす $v^1 \in R^{n-1}$ が存在する。

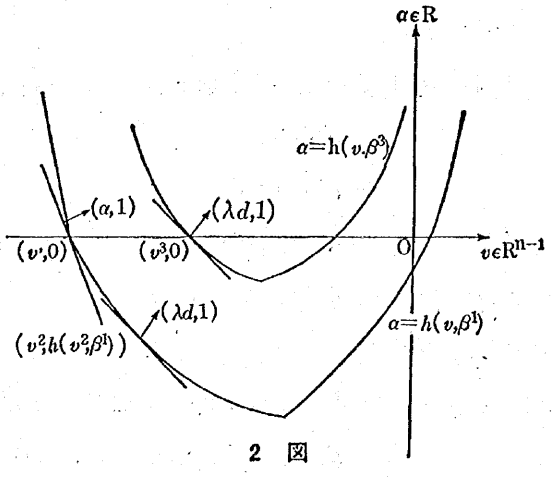
つぎに $d^2 = \lambda d$, $d^2 = (\bar{d}^2, 0) \in R^{n-1} \times R$ としよう。補助定理 5 によって $h(v^2, \beta^1) \leqq 0$ および $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^2, \beta^1)$ を満たす $v^2 \in R^{n-1}$ が存在する。

(ケース 1) $h(v^2, \beta^1) = 0$ かつ $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^2, \beta^1)$

この場合には補助定理 3 によってゆがみ d^2 をもつ均衡で消費者の効用が β^1 のものが存在する。

(ケース 2) $h(v^2, \beta^1) < 0$ かつ $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^2, \beta^1)$

この場合は補助定理 6 により $h(v^3, \beta^3) = 0$ および $-\bar{d}^2 \in \partial h(v^3, \beta^3)$ を満たす $v^3 \in R^{n-1}$ と $\beta^3 \geqq \beta^1$ が存在する (この最後の不等式はもし選好順序と生産可能集合が強い意味で凸なら $\beta^3 > \beta^1$ としてよい)。したがって補助定理 3 (a, d) によりゆがみ d^2 をもつ均衡で消費者の効用が β^3 のものが存在する。



2 図

定理の後半部 (b) の仮定の下では，補助定理 5 (d) より，上の証明において $h(v^2, \beta^1) < 0$ としてよいのでケース 2 に含まれ，しかも $\beta^3 > \beta^1$ となる場合に該当する。以上で基本定理 3 の証明が完結した。

12. 定理の一般化

以上のわれわれの議論においては，消費者が一人生産者が一人という限定的な仮定がなされていた。これを一般化して，経済主体が同じグループ内においては均衡において同一の価格比に直面する二つのクラス J_1, J_2 に分類されるような場合を想定しよう。一般性を失うことなく J_1 には消費者が少なくとも一人含まれ，J_2 には少なくとも一人の消費者あるいは生産者が含まれるとしよう。

このときゆがみ d をもった均衡の条件を次の五つによって定義しよう。

m 人の消費者 k 人の生産者をもった経済は資源配分と価格の組 $((x_i^*), (y_j^*), p^*, q^*) \in R^{n(m+k+2)}$ の下で

(1) $$p^*, q^* \in S^n$$

$$p_i^* = \begin{cases} p^* & i \in J_1 \\ q^* & i \in J_2 \end{cases}$$

(2) $$p^* - q^* = d$$

(3) 各消費者 i について

$$p_i^* \cdot x_i^* \leqq p_i^* \cdot G_i(x_i^*)$$

(4) 各生産者 j について

$$p_j^* \cdot y_j^* \geqq p_j^* \cdot Y_j$$

(5) $$\sum x_i^* - \sum y_j^* - \sum z_i = 0$$

となるとき，ゆがみ d をもった均衡にあるということにする。

注意 1　$m=1$, $k=1$ の場合には，上の定義は，消費者が一人生産者が一人の経済における均衡の定義（3節）と一致する。また上の定義で $d=0$ の場合には，$((x^*), (y^*))$ は $p^*(=q^*)$ の下における均衡（ドブリュー〔3〕p. 93），ないしは補償された均衡などとよばれる。

このようにゆがみ d を持つ均衡を定義すると，主体についての仮定を上のように一般化した場合の定理 3 の拡張である次の命題が成立する。

定理 4　2節の仮定の下において，

(a) 任意の $0 \leqq \lambda < 1$ と 0 でないゆがみ $d \in D^n$ を持つ均衡が与えられた時，ゆがみ λd を持つ均衡でパレートの意味で同等かすぐれたものが存在する。

(b) さらに各消費者の選好の選好順序と各生産者の生産可能集合が強い意味で凸，かつ無差別

曲面と生産可能性フロンティアがなめらか(2節)なら，λd のゆがみを持つ均衡でパレートの意味ですぐれたものが存在する。

証明) 証明の方法は定理3の場合と同じであるので，以下基本的な点のみを指摘するにとどめよう。まずβを消費者1の効用水準とし，一般性を失うことなく $1 \in J_1$ とする。いま存在を仮定されているゆがみdを持つ均衡を $((x_i^1), (y_j^1), p^1, q^1)$ とし

$$W^1(\beta) = G_1(x) + \sum_{\substack{i \neq 1 \\ i \in J_1}} G_i(x_i^1) - \sum_{j \in J_1} Y_j - \sum_{i \in J_1} z_i$$

$$W^2 = \sum_{i \in J_2} G_i(x_i^1) - \sum_{j \in J_2} Y_j - \sum_{i \in J_2} z_i$$

と定義する。ここで$x \in X_1$は$U^1(x) = \beta$を満たすものとする。この$W^1(\beta)$, W^2を用いて，$f(\cdot, \beta)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot, \beta)$ および $H(\beta)$ を9節のように定義する。その時われわれの補助定理1～6は，主体の仮定が一般化されたことにともなう自明な修正をほどこすだけでそのまま成立する。それらを総合することによって前と同様な定理の証明が可能となるのである。詳しくは川又〔5〕を参照されたい。

系　もし定理4の(b)の仮定が満たされているなら，いかなるパレート有効な資源配分も0でないゆがみを持った均衡としては到達できない。

引用文献

〔1〕 Arrow, K.J. and F.H. Hahn, *General Competitive Analysis* Holden-Day, Inc., San Francisco, 1971.

〔2〕 Berge, C., *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1963.

〔3〕 Debreu, G., *Theory of Value*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1959.

〔4〕 Foster, E., and H. Sonnenschein, "Price Distortion and Economic Welfare," *Econometrica*, Vol. 38 (March, 1970), 281-297.

〔5〕 Kawamata, K., *Price Distortion and Potential Welfare*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, March, 1972.

〔6〕 Nikaido, H. *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York and London, 1968.

〔7〕 Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton, 1970.

(経済学部助教授)