Title	市場均衡の安定性I : 序論的考察
Sub Title	The stability of a market equilibrium I. introductory analysis
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1973
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.66, No.2/3 (1973. 3) ,p.87(1)- 104(18)
JaLC DOI	10.14991/001.19730301-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19730301-0001

市場均衡の安定性 I

——序論的考察——

福　岡　正　夫

1　均衡分析に対して安定理論がもっている重要性については，今日多くを語る必要はないであろう。かつてワルラスは需給の一般均衡の解法として「理論的」ないしは「数学的」な解法と「市場による」解法の二つがあることを述べ，前者によれば方程式と未知数の数の一致が，また後者によれば謂うところの「模索」のプロセスが，問題を解くと説いた。これらのうち式と変数の数の勘定は，その後永いあいだ均衡モデルの可解性を根拠づける経済理論家の常套手段となったが，これが均衡の成立ばかりでなく，その存在さえ支えるに足りないことは，今日ではよく知られているとおりである。また後者すなわち「模索」の手続きにおいても，需給の過不足に応じて価格を上げ下げするという調整ルール自体はいまだ均衡の必然的成立を含意するものではなく，そうした調整ルールを満たしつつ価格が均衡に向わない事例を見出すことは容易である。要するにいずれの解法の場合も，均衡への収束が保証されるのでなければ，均衡分析は本来の目的を完うしえないのである。

安定理論の第一義的重要性は，価格をはじめとするさまざまな経済変数の，均衡値への収束条件を示すことによって，それらが実際に決定されるメカニズムを明らかにするところに求められる。現実の経済では，価格や産出量はつねにある有限の水準に決定され，これらの値が限りなく発散することはありえない。またそれらに対しては日々さまざまな攪乱因が働きかけるにもかかわらず，観察される経済諸量は概して“shock-proof”であって，並外れた逸脱を示すこともない。それらの事情から，少なくとも現実のこの側面を述べようとする経済理論は，経験上有意味な何らかの経済的仮説から調整過程の安定性を導き出すのでなくてはならないのである。事実上諸量が決定されているからといって，理論モデルもまた先験的に安定であると断定するのは，同じく日常の観察からモデルの解が無条件に存在すると断定するのと同様，方法論上の誤謬である。価格の形成が事実であるがゆえに，それを説明すべき理論モデルも自己の枠組内で均衡価格の存在や安定を説明しえなくてはならないのであって，事実がそれらの推論を不要にするのではない。さらにいい換えれば，この場合に要請される理論上の作業は，なるべく“appealing”な経済的充分条件から存在や安定を演繹する作業なのであって，存在や安定をアプリオリに仮定してその含意を追及する作業ではない

のである。[(1)]

さらに加えて，需給の不均衡下でも取引がなされると想定される場合（いわゆる「非模索」過程の[(2)]場合）には，価格の調整経路そのものが財保有量の再分配から影響を蒙るから，存在問題自体を調整プロセスと関連せしめてとり扱わざるをえなくなる。したがってその場合には，安定分析の重要性もそれだけ増加すると考えるべきであろう。

2　上記のところからも明らかなように，これまで経済学者が関心をもってきた安定性の概念は，とくに均衡への収束に重点をおいた漸近安定の概念である。ところが元来経済学がこの種の概念を借りてきた力学や数学の分野では，漸近安定の概念が唯一無二の安定概念であるわけではなく，たとえば力学者や数学者がたんに安定という場合には，いわゆるリャプーノフの意味での安定，つまり体系の運動がかならずしも均衡への収束を意味することなく，たんにその近傍にありつづける事態をさしていうことが多い。したがって安定理論について記述の精確を期そうとすれば，まずありうべき各種の安定概念を整頓して，それらのうち経済理論に用いられているものがいずれに位置するかを明らかにしておくのが望ましいであろう。以下本節で述べるところは，その種の目的のための予備的考察である。[(3)]

いま時間 t を独立変数，実数 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ を未知関数とする自律的な微分方程式体系

(1)　$\dot{x}_i = f^i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

を考え，[(4)] ここで関数 $f^i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ は n 次元空間のある開部分集合 $\varDelta$ 上で

注(1)　したがって，ヒックスが *Value and Capital*, p. 62 において，「所与の均衡体系が安定であるためには，どのような条件が必要であるか」という見地から議論を展開しているのは，ここでの所論とは視角を異にしている。この点については P. Newman, "Approaches to Stability Analysis", *Economica*, February 1961, pp. 13~14 参照。また T. Negishi, "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econometrica*, October 1962, p. 640 をも参照。本稿および三つの続稿でとり扱う主題については，全般的にこの展望論文を参照することが有益である。

(2)　但し不均衡下で取引を行うのが「非模索」なのか，それともそれが真の「模索」なのかについては，ワルラス研究の権威ジャッフェの注釈がある。Cf. W. Jaffé, "Walras' Theory of *Tâtonnement*: A Critique of Recent Interpretations", *The Journal of Political Economy*, February 1967, pp. 1~19. ここでは一応，現世代の理論家の慣用の表現にしたがっておく。

(3)　標準的な安定理論の数学文献としては，A. A. Liapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annals of Mathematical Study No. 17, Princeton University 1949〔これは1892年にロシア語で発表され1907年に仏訳されて *Annales de la faculté des sciences de l'Université de Toulouse*, 2e série, Tome IX, 1907 に載せられた論文の覆刻である〕をはじめ，Wolfgang Hahn, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, 1963〔*Theorie und Anwendung der direkten Methoden von Liapunov*, 1959 の英訳〕, *ditto*, *Stability of Motion* 1967. J. La Salle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, 1961, I.G. Malkin, "On the Stability of Motion in the Sense of Liapunov", in *Stability and Dynamic Systems*, American Mathematical Society, Translations Series 1, Vol. 5, 1962, R. E. Kalman and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design Via the 'Second Method' of Liapunov I: Continuous-Time Systems", *Journal of Basic Engineering*, June 1960, N. N. Krasovskii, *Stability of Motion: Applications of Liapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, 1963, T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, 1966 などを参照した。

連続であると想定しよう。するとよく知られた存在定理（コーシー＝ペアノの定理）によって，Δ 上のすべての点 $x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0)$ ならびにすべての t_0 に対して，ある区間 $|t-t_0|<c$ $(c>0)$ で定義された(1)の解 $x_i=\varphi_i(t, x^0)$ が存在し，$\varphi_i(t_0, x^0)=x_i^0$ である。そして $[t_0, \tau)$ におけるそれらの局所解がすべて Δ のあるコンパクト部分集合に含まれるようであれば，それらの解はつねに $[t_0, +\infty)$ にわたって延長することが可能である。しかも Δ 上でいわゆるリプシッツ条件が満たされており，Δ のどの2点についても，定数 $K>0$ が存在して

(2) $|f^i(x_1, \cdots\cdots, x_n)-f^i(x_1', \cdots\cdots, x_n')|\leq K\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_i'|$

となるとすれば，これらの解は一意的となり，かつ初期点に関して連続となる。

これらのことを考慮にいれた上で，安定概念の考察にとりかかろう。まず Δ のなかに一意的な均衡点 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_n^*)$ がある場合を考えれば，古典的なリャプーノフの安定概念はつぎのように定義されよう。すなわちいま何らかの攪乱が均衡点 x^* からの僅かな乖離を生ぜしめた場合，それが惹き起す運動が以後いつまでも x^* のある近傍にとどまりつづける，というのがそれである。換言すれば，x^* の ε 近傍 $N_\varepsilon(x^*)=\{x|\,||x-x^*||\leq\varepsilon\}$ を適当に選んで，それが Δ に含まれるようにした場合，その ε をどんなに小さく選ぼうが，かならずそれに対して $\delta(\leq\varepsilon)$ が存在して，$||x^0-x^*||<\delta$ なら

(3) $||\varphi(t, x^0)-x^*||<\varepsilon$ for all $t>t_0$

となるようならば，x^* はリャプーノフの意味で安定 (stable in the sense of Liapunov) であるというのである。

つぎに当該の運動が，たんに上記の意味で安定であるばかりでなく，また時間の経過につれて結局均衡点に近づいていくようならば，つまり(イ)リャプーノフの安定に加えて，さらに(ロ)充分小さな正数 η が存在して，$||x^0-x^*||<\eta$ なら

(4) $\lim_{t\to\infty}||\varphi(t, x^0)-x^*||=0$

となるようならば，x^* は小範囲において漸近安定 (asymptotically stable in the small) である。[5] また，(ハ)初期値 x^0 に関する条件が外されて，$x^0\in\Delta$ であるかぎり，どんな x^0 に対しても(4)が成立つようならば，x^* は大範囲において漸近安定 (asymptotically stable in the large) である。

第1図と第2図はそれぞれこれらの安定概念を，分り易く2次元の位相図で示したものである。[6]

注(4) ここでは時間を連続的に扱う微分方程式系を中心として考察する。定差方程式系における安定理論の考察については，R. E. Kalman and J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design Via the 'Second Method' of Lyapunov II: Discrete-Time Systems", *Journal of Basic Engineering*, June 1960 を参照せよ。

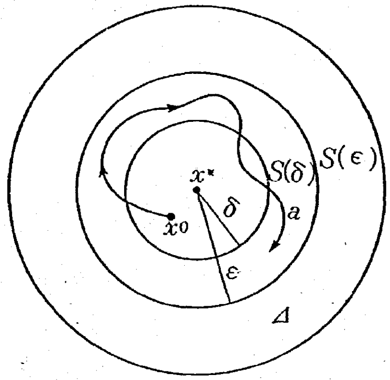
(5) この条件はまた，$||x^0-x^*||<\eta$ のとき，充分小さな $\mu>0$ に対して $T(\mu, x^0)>0$ が選べて，

(4)′ $||\varphi(t, x^0)-x^*||\leq\mu$ for all $t>T$

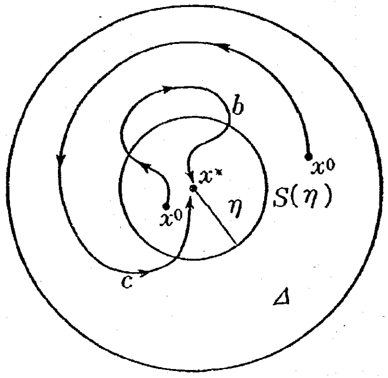
となるようならば，といい換えてもよい。

(6) これらの図示については La Salle and Lefschetz, *op. cit.*, p. 31 および Kalman and Bertram, *op. cit.*, p. 376 を参照した。

ここで図のなかの $S(\varepsilon)$, $S(\delta)$, $S(\eta)$ はそれぞれ x^* を中心とし半径が ε, δ, η の円をあらわしており，曲線 a, b, c はそれぞれ初期点 x^0 から始まる運動経路（いわゆる解の軌道 trajectory）をあらわしている。第1図が示しているように，$\varDelta$ 内に任意に $S(\varepsilon)$ を選んだとき，それに対して $S(\delta)$ が定



第1図



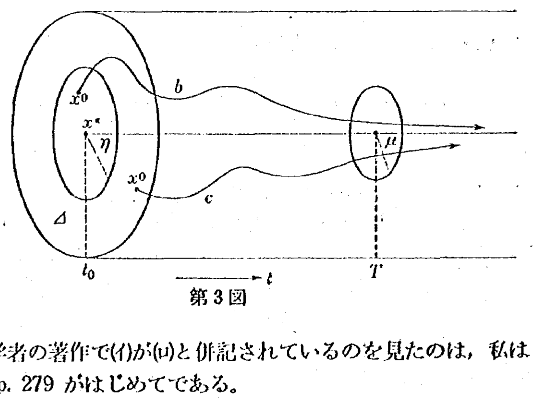
第2図

まって，そのなかから出発する運動がすべて a 曲線のように以後 $S(\varepsilon)$ 内にとどまりつづけるというのが，リャプーノフ安定の意味する事態である。これに対して第2図が示しているように，充分小さく $S(\eta)$ を選んだとき，そのなかから出発する運動が b 曲線のように x^* の近傍にとどまりつつ，やがて x^* に収束するというのが，小範囲の漸近安定の事例であり，さらに $\varDelta$ 内のどこから出発しても c 曲線のように x^* に収束するというのが，大範囲の漸近安定の事例である。(7)

ところで経済学者が安定性概念を定義する場合，従来は収束性の条件(ロ)または(ハ)のみにもとづくことが多かったようである。(8) しかし漸近安定の概念は，(イ)の条件をも併せ含むものであることに注意すべきである。この点についてかつて安井琢磨教授が，経済学で問題になる安定概念はもっぱら(ロ)（そしておそらく(ハ)）のそれであり，(ロ)は(イ)と論理的に無関係であるから，経済学者にとって(イ)は直接には関心の対象にはならない，という趣旨のことを述べられたことがある。(9) 一般に(イ)が(ロ)にと

注(7) 漸近安定の条件を注(5)のような形で述べる場合は，第3図のような図示法が有益であるかもしれない。これについては Kalman and Bertram, *op. cit.*, p. 31 に負う。

なお第2図，第3図とも，図形が過度にこみ入ることを避けるため，リャプーノフ安定の側の条件（つまり(イ)の条件）は書きこまなかった。



第3図

(8) たとえば P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, 1947, pp. 261～262 参照。（そこでサムエルソンが「第1種の小範囲の安定」と呼んでいるものが(ロ)にあたり，「第1種の完全安定」と呼んでいるものが(ハ)にあたる。）この点はより最近の展望論文 T. Negishi, *op. cit.* においても同じである。同論文 p. 641 および pp. 648～649 参照。経済学者の著作で(イ)が(ロ)と併記されているのを見たのは，私は Arrow-Hahn の近著 *General Competitive Analysis*, 1971 の p. 279 がはじめてである。

(9) 安井琢磨「安定の一般理論」,『季刊理論経済学』1950年1月号, p. 16（『安井琢磨著作集』第2巻, p. 76）参照。

って必要でも充分でもないことは，たしかに教授が指摘されるとおりであるが，[10] さりとて経済学者が意中に抱いてきた安定概念がまったく(イ)とは切り離された(ロ)のみであるかどうかには，疑問が残る。というのは，おそらく経済学者たちもまた，ある運動経路が，結局は収束するにせよ，途中で均衡点のきわめて遠くを大回りするような事例を安定の事例とはみなさないであろうからである。換言すれば，均衡の近傍から出発するかぎりにおいて，運動の経過もまたその近傍に局限されるというのが安定性の本質なのであって，それにもかかわらず経済学者が(イ)を無視してきたのは，彼らが(イ)に関心をもたなかったためというより，むしろ(ロ)が当然(イ)を含むような線型の体系に当初の興味を向けてきたためではあるまいか。

つぎに均衡点が一意的でなく多数存在する場合でも，それらがそれぞれ孤立点であるとすれば，上記のリャプーノフの安定や小範囲の漸近安定の概念はそのまま各個の均衡点に対して適用されうるであろう。しかしこの場合に，大範囲の漸近安定の条件がもはや成立ちえないことは明らかである。なぜなら，ある均衡点 x^* に対して他の均衡点 x^{**} が初期点となる場合には，前者に向う運動は発生しえないからである。

ところで均衡はつねに孤立点ばかりから成るとはかぎらず，場合によっては半直線の全体になったり，より一般的に閉凸集合の全域にわたったりすることもある。そこでそのような場合には，安定概念もまた事態の性質に応じてさらに広義のものに拡張されねばならないであろう。さいきんのアロー＝ハーヴィッチらの業績に見られる大域的安定 (global stability) や擬安定 (quasi-stability) の概念は，そうした一そう包括的な事例を考慮にいれて発想されたものである。

均衡が集合 $X^* \epsilon \varDelta$ となる場合の安定性の定義についても，X^* の全体をあたかも拡大された均衡点であるかのごとくにみなして，それからの距離を $\inf\limits_{x^* \epsilon X^*} ||\varphi(t,\ x^0)-x^*||$ (X^* が閉集合であれば $\min\limits_{x^* \epsilon X^*} ||\varphi(t,\ x^0)-x^*||$ と書いてもよい）と考えれば，前の定義に準じて安定や漸近安定を定義することができるであろう。すなわち X^* の ε 近傍 $N_\varepsilon(X^*)=\{x|\inf\limits_{x^* \epsilon X^*} ||x-x^*|| \leqq \varepsilon\}$ を適当に選んで，それが $\varDelta$ に含まれるようにした場合に，それに対して $\delta \leqq \varepsilon$ が存在して，$\inf\limits_{x^* \epsilon X^*} ||x^0-x^*|| < \delta$ なら

(5) $\inf\limits_{x^* \epsilon X^*} ||\varphi(t,\ x^0)-x^*|| < \varepsilon$ for all $t > t_0$

となるようならば，X^* は擬安定 (quasi-stable) であり，さらに加えてどんな $x^0 \epsilon \varDelta$ に対しても

(6) $\lim\limits_{t\to\infty} \inf\limits_{x^* \epsilon X^*} ||\varphi(t,\ x^0)-x^*||=0$

となるようならば，X^* は漸近擬安定 (asymptotically quasi-stable) である。

漸近擬安定の概念で注意すべきは，(6)の意味するところが，かならずしも体系の運動の，ある均衡点 $x^* \epsilon X^*$ への収束を意味しないということである。つまり(6)が満たされて解の軌道と X^* との距離がゼロに収束するとしても，なお解軌道そのものは X^* のまわりを永久に振動しつづける事態がありうるのである。

注(10)　かならずしも(ロ)が(イ)を意味しない事例については，Kalman and Bertram, *op. cit.*, pp. 375～376 参照。

この点は，また上記のところと交替的なもう一つのこの概念の定義からみても明らかである。それによれば，条件(6)の代りに，体系の運動の極限点がすべて均衡点になっているようならば，X^* は漸近凝安定である。換言すれば

(7) t のある部分列 $\{t_\nu\}$, $t_\nu\to\infty$ に応じて $\lim_{\nu\to\infty}\varphi(t_\nu, x^0)=x^a$ が存在するとき，x^a がかならず X^* に含まれる。

とすれば，X^* は当該の安定性を満たすのである。事実，解軌道が有界であって Δ のなかのある閉部分集合内にとどまり，また X^* が閉集合であるとすれば，この条件が(6)と等値であることがつぎのように証明される。[11]

いま条件(6)が満たされているとしよう。$V(x)=\inf_{x^*\in X^*}||x-x^*||$ とおけば，$V(x)$ の連続性から $\varphi(t, x^0)$ のどの極限点 x^a についても

$$V(x^a)=V\{\lim_{\nu\to\infty}\varphi(t_\nu,\ x^0)\}=\lim_{\nu\to\infty}\ \inf_{x^*\in X^*}||\varphi(t_\nu,\ x^0)-x^*||$$
$$=\lim_{t\to\infty}\ \inf_{x^*\in X^*}||\varphi(t,\ x^0)-x^*||=0$$

となり，したがって

$$x^a\in X^*$$

となる。

他方(7)が満たされているとし，$V[\varphi(t, x^0)]$ の任意の極限値 V^a について $t_\nu\to\infty$ (つまり $\nu\to\infty$) で $\lim_{\nu\to\infty}V[\varphi(t_\nu, x^0)]=V^a$ となるような系列 $\{t_\nu\}$ を考えよう。$\varphi(t_\nu, x^0)$ は有界であるから，ある部分列 $\{t_{\nu_k}\}$ を選べばかならず極限点 $\lim_{k\to\infty}\varphi(t_{\nu_k}, x^0)$ が存在し，それを x^a とすれば，(7)によって $x^a\in X^*$ であるほかない。ゆえにふたたび $V(x)$ の連続性から

$$V^a=\lim_{\nu\to\infty}V[\varphi(t_\nu,\ x^0)]=\lim_{k\to\infty}V[\varphi(t_{\nu_k},\ x^0)]=V(x^a)=0$$

となり，(6)の成立することが明らかとなる。[12]

いわゆる大域的安定性 (global stability) は漸近凝安定性の特殊な事例であり，解軌道と均衡点の集合 X^* との距離がゼロに収束するとともに，解軌道自体が何らかの均衡点 $x^*\in X^*$ に収束する場合である。すなわち $x^0\in\Delta$ のどんな x^0 に対しても，それに応じてある $x^*\in X^*$ があって，(6)の代りに

(8) $\lim_{t\to\infty}||\varphi(t,\ x^0)-x^*||=0$

となるときに，X^* は大域的に安定であると呼ばれるのである。したがって均衡点の集合が有限集合であるか，あるいはより一般的に可付番集合である場合には，漸近凝安定性は大域的安定性に合致することになろう。また均衡点が一意的であるならば，この両者が合致するばかりでなく，それ

注(11) H. Uzawa, "The Stability of Dynamic Process", *Econometrica*, October 1961, p. 619.

(12) かつてマッケンジーは(6)のほうが(7)より強い条件であると述べたが，これが誤謬であることは上記の議論が示すとおりである。Cf. L. M. McKenzie, "Stability of Equilibrium and the Value of Positive Excess Demand", *Econometrica*, July 1960, p. 606, n. 3.

らは先述の大範囲の安定性にも合致することになるであろう。

他方，大域的安定性の対概念である局所的安定性 (local stability) については，それが可付番でない無限集合の場合に何を意味するかはかならずしも明確でないが，孤立均衡点の場合にはそれは各個の均衡点ごとに小範囲の漸近安定性が満たされることと考えてよいであろう。

漸近擬安定や大域安定の意味で均衡点の集合が安定となる場合には，いうまでもなくそれに属するすべての均衡点が安定となるわけではなく，それらのなかには不安定な均衡点もありうるし，すべての均衡点が不安定となることさえ可能である。要するにこれらの安定概念は，リャプーノフ安定や漸近安定の概念のように特定の均衡点の性質にかかわるものではなく，むしろすべての均衡点の集合ないしは全体系の性質にかかわるものと理解すべきである。

ところで孤立均衡点から成る多数均衡の場合には，各個の均衡点が小範囲の漸近安定の意味で交互に安定・不安定となる事例がよく知られている。この性質がいわばどの程度に必然的なものであるかについては，フランク・ハーンによるつぎのような定理がある。(13) すなわち

もしそれぞれの孤立均衡点がすべて小範囲において漸近安定であり，しかも体系全体が大域的に安定であるならば，均衡点は一意的でなくてはならない。

事実(1)の解の一意性と，初期点に関する連続性とを仮定すれば，この命題はつぎのように容易に証明できる。帰謬法によるとして，いま均衡点が一意的ではなかったと想定し，二つ以上の均衡点を含む閉じた連結集合を C であらわす。すると C の点から出発する運動は，大域安定性の仮定からかならずどこかの均衡点に収束しなければならない。そこでそのような均衡点 $x^* \in X^*$ についてそれぞれ

$$C(x^*)=\{x^0 \in C \mid \varphi(t,\ x^0) \to x^*\}$$

として，C をいくつかの $C(x^*)$ に分けるとすれば，解の一意性の仮定から，C の点はそれぞれ1個の $C(x^*)$ に属して，2個以上のそれには属さない。ところが連結集合は，有限個の，互いに素な非空閉集合の和となることはできないから，$C(x^*)$ のうち少なくとも1個は閉集合であってはならない。つまりそのような $C(x^*)$ は，みずからに含まれない極限点 x^a をもつのでなくてはならない。C 自体は閉集合であるから，その x^a は C には含まれねばならず，したがって $x^{**} \neq x^*$ のような $C(x^{**})$ に含まれるほかはない。さて仮定から x^{**} は小範囲の漸近安定を満たすから，その充分小さな近傍 $N(x^{**})$ をとれば，$x^1 \in N(x^{**})$ のようなすべての x^1 については $\varphi(t,\ x^1) \to x^{**}$ となる。そして $x^a \in C(x^{**})$ についてはいうまでもなく $\varphi(t,\ x^a) \to x^{**}$ であるから，充分大きな t をとれば $\varphi(t,\ x^a) \in N(x^{**})$ のようにすることができる。ところが $\varphi(t,\ x^a)$ の x^a に関する連続性から，x^a に充分近い x^b を $x^b \in C(x^*)$ のようにとれば，やはり充分大きな t については $\varphi(t,\ x^b) \in N(x^{**})$ とすることができ，これは結局 $\varphi(t,\ x^b) \to x^{**}$ となることを意味している。ところが他方 $x^b \in C(x^*)$ から

注(13) Arrow and Hahn, *op. cit.*, p. 280.

$\varphi(t, x^0) \to x^* \neq x^{**}$ となるはずであるから，これは矛盾である。依って上記の仮定の下で均衡点が複数個になることはありえない。Q. E. D.

上記の定理の帰結は，仮定のうち「各孤立均衡点が小範囲において安定であるならば」という部分を，たんに「それらがリャプーノフ安定であるならば」と緩めても成立つと思われる。というのは，各均衡点がリャプーノフ安定であれば，それぞれの近傍から出発する運動は決してある一定近傍からはみ出すことはなく，したがって体系が大域安定であれば，当該の近傍内で収束せざるをえないからである。換言すれば，大域的安定性を満たす体系で，各個の孤立均衡点がリャプーノフ安定である場合には，それらはまた漸近安定であるほかはないのである。

3　安定問題のとり扱いとしては，周知のようにリャプーノフが二つの方法を区別している。そのうち「第一法」と呼ばれるものは，当該の微分方程式の一般解ないしは特殊解が分っているものとして，その形に関する知識から安定性を考察しようとする方法であり，これに対して「第二法」あるいは「直接法」と呼ばれるものは，そのような解についての知識を必要とせず，もっぱらリャプーノフ関数と呼ばれるある特殊な性質をもった x の関数を見出すことから，問題を解決しようとする方法である。安定理論に対するリャプーノフの寄与の最たるものは，おそらくこの「第二法」を開発した功績にあるといってよいであろう。それは今日においては，たんに常微分方程式の定性分析ばかりでなく，経済学をも含めたさまざまな応用分野の動学モデルや制御体系の分析に広く適用されるにいたっている。

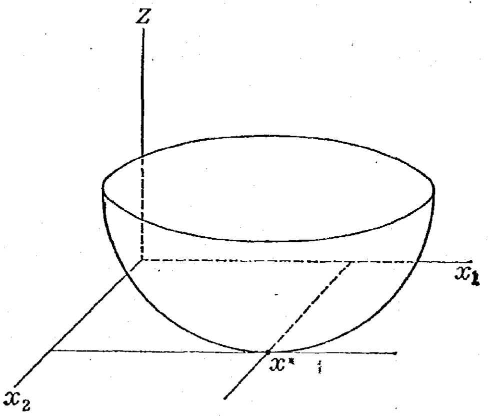
第二法およびそれが立脚するリャプーノフ関数の構想は，その骨子だけを簡単に述べればつぎのようである。いまあるスカラ関数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ あるいは $V(x)$ が Δ ないしはその適当な部分集合の上で定義され，x について連続な第1次偏導関数をもつとしよう。またこの関数が(a)均衡点 x^* においては $V(x^*)=0$ で，かつ(b)均衡点でないすべての x においては $V(x)>0$ の条件を満たすとき，$V(x)$ は正の定符号であるということにしよう。すると，まず均衡点が一意的であるか孤立的である場合には，

（I）ある均衡点の近傍に正定符号の $V(x)$ が存在して，それが (c) $\dot{V}(x) \leqq 0$ を満たすならば，その均衡点はリャプーノフ安定であり，さらに（II）その $V(x)$ が (c) ばかりでなく (d) 定義域のすべての $x \neq x^*$ について $\dot{V}(x)<0$ をも満たすならば，その均衡点は漸近安定である

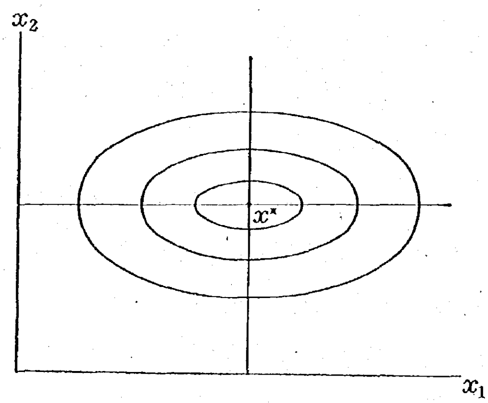
というのが，リャプーノフの基本定理である。つまり上記の性質を満たす $V(x)$ の存在を安定性の充分条件として，それを用いて安定性を導き出すのが，第二法の基本的発想にほかならないのである。

ふたたび2次元の場合について例示すれば，この思想の理解に便利であろう。いま均衡点 x^* の近傍に $z=V(x_1, x_2)$ の面があると考え，z の値を第三の軸に測るとして，第4図のような図を描い

てみよう。ここでVが図のように $x^*=(x_1{}^*, x_2{}^*)$ において (x_1, x_2) 平面に接する椀のような形をとるとすれば，V の値は x^* においてのみゼロで，それ以外では正となるから，V は正の定符号である。そこでこの V の値を任意の定数 k とおいた x の軌跡，すなわち $V(x_1, x_2)=k$ を満たす (x_1, x_2)



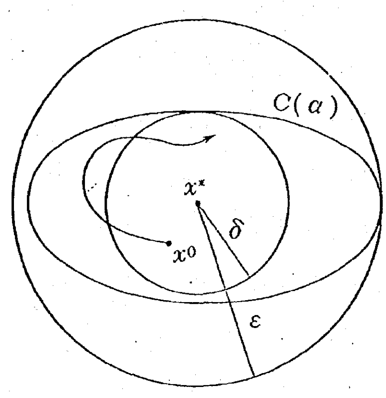
第4図



第5図

の軌跡を (x_1, x_2) 平面上に投影すれば，それらの等高線は第5図に描かれたような卵形線群となり，それはkの値が小さいものほど内側にくる。

いま正数 ε を与えて，$\varDelta$ に含まれるように x^* を中心とする円 $S(\varepsilon)$ を描けば，関数 V はその円周上で最小値 α をもつから，ちょうど $k=\alpha$ となるような卵形線 $C(\alpha)$ を第6図のように描くことができる。明らかに $C(\alpha)$ は内側から $S(\varepsilon)$ に接するが，決してその外にはみ出ることはない。つぎに同様の要領で，正数 $\delta<\varepsilon$ を適当に選び，円 $S(\delta)$ を，ちょうどそれが $C(\alpha)$ に含まれるように描いてみるとする。すると $S(\delta)$ の内点 x^0 を初期点とする解軌道については当然 $V(x^0)<\alpha$ であり，したがって仮定 $\dot{V}(x)\leqq 0$ から $V(x)$ が非増加であるかぎりは，その運動経路は決して $C(\alpha)$ の周上に達する



第6図

ことはなく，ましてや $S(\varepsilon)$ の周上に達することもない。事実もしある時点 $T>t_0$ においてそれが $S(\varepsilon)$ の周上に達したとすれば，$V[x(T)]\geqq\alpha$ となるが，他方 $V(x^0)<\alpha$ であるから，$V[x(T)]>V(x^0)$ となり，他方仮定から $V[x(T)]\leqq V(x^0)$ であるから，これは矛盾である。依って $S(\delta)$ の内点から始まる解軌道は，どんなに t を大きくしても $S(\varepsilon)$ のなかにとどまりつづけ，これはリャプーノフ安定が成立つことを意味せざるをえない。

つぎに $x\neq x^*$ については $\dot{V}(x)<0$ で，$V(x)$ が事実上 x の軌道に沿って減少していくと考えて

みよう。仮定から $V(x)$ の極限値 s はゼロになるか正になるかのいずれかであるが，後者になることは不可能である。事実もし $s>0$ になったとすれば，$V(x)=s$ のような $C(s)$ の内部に，さらに $V(x)=s'$, $s'<s$ のような $C(s')$ があることになり，依ってそのなかに入る円の半径を λ とすれば，$x(t)$ は仮定から $S(\lambda)$ の内部には入りえない。ところで $\dot{V}(x)$ は $S(\varepsilon)$ と $S(\lambda)$ のあいだで負の最大値 μ をもつ。そこでこれよりさらに大きな負の定数 μ' を選べば，任意の T 時点においては

$$\int_{t_0}^{T}\mu'\,dt>\int_{t_0}^{T}\dot{V}\,dt$$

したがって

$$V(x^0)+\mu'(T-t_0)>V[x(T)]$$

となり，ここで右辺はどんなに T を大きくしても s より小にはならないが，他方左辺は T を大きくすれば $\mu'T$ が負の無限大に近づくことから，限りなく小さくなる。これは不合理であるから，結局 V の極限値 s はゼロにならねばならず，これは解曲線が x^* に収束すること，すなわち x^* が漸近安定を満たすことと等義である。

以上の証明は便宜上 $n=2$ の事例についてなされているが，一般の場合にも円の代りに超球を考えれば，議論の本筋には何の変りもないであろう。またこれらの証明は小範囲の安定について述べられているが，同様な議論が大範囲の安定について準用されることも明らかであろう。というのは，Δ に含まれるすべての点について正定符号の $V(x)$ が存在して，それが(c)ならびに(d)を満たすとすれば，均衡は一意的で，それについて大範囲の漸近安定が成立たねばならないからである。

他方，均衡点が非孤立的で無限集合をなす場合についても，やはり(I)(II)に準じてそれぞれ擬安定および漸近擬安定が成立つことになるであろう。事実，解の有界性，一意性と初期条件に関する連続性の仮定の下では，$V(x)$ が極限 s に収束する場合，どんな x の極限点から出発する解曲線についても，すべての t について $V(x)\equiv s$ となることを示すことができる。すなわちいま極限点 x^a から出発する極限の経路を $\varphi^a(t)$ と記せば，

$$\varphi^a(t)=\varphi(t,\ x^a)=\lim_{\nu\to\infty}\varphi[t_\nu,\ \varphi(t,\ x^0)]=\lim_{\nu\to\infty}\varphi(t+t_\nu,\ x^0)$$

となり，したがって V の x に関する連続性から，すべての t について

$$V[\varphi^a(t)]=V[\lim_{\nu\to\infty}\varphi(t+t_\nu,\ x^0)]=\lim_{\nu\to\infty}V[\varphi(t+t_\nu,\ x^0)]=s$$

となる。

総じてこの手法において枢要な役割を演ずるリャプーノフ関数としては，動点 x から均衡点 x^* への何らかの意味での距離を用いるのが便利である。ここである点 x から他の点 x' への距離というのは，非負の実関数 $D(x,\ x')$ であって，

(α) $D(x,\ x')=0 \iff x=x'$

(β) $D(x,\ x')=D(x',\ x)$

(γ) $D(x,\ x')+D(x',\ x'')\geqq D(x,\ x'')$

であるようなものを意味している。そのような要件を満たす関数としてはいくつかのものが考えられ，たとえば

(i) ユークリッドの距離

$$D(x,\ x')=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2]^{\frac{1}{2}}$$

(ii) 一般化されたユークリッドの距離

$$D(x,\ x')=[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(x_i-x_i')(x_j-x_j')]^{\frac{1}{2}}$$

(iii) 絶対値ノルムの距離

$$D(x,\ x')=\sum_{i=1}^{n}h_i\,|x_i-x_i'|$$

(iv) 最大値ノルムの距離

$$D(x,\ x')=\max_i c_i\,|x_i-x_i'|$$

のごときがそれらである。(i)～(iv)がすべて上記の条件を満たすことは自明であろう。

ところでこれらを $x(t)$ のリャプーノフ関数として適用する場合には，上記の定義からその正定符号性が満たされることも自明であるから，畢竟 $x\neq x^*$ の x について $\dot{D}\leqq 0$ あるいは $\dot{D}<0$ となることのみが示されればよいわけである。しかも (i)～(iv) がみな等しいトポロジーを定義することを考えれば，そのいずれか少なくとも一つについてそのことが示されれば事足りるのである。

4　本節では均衡点が孤立的な局所的安定性についてさらに考察を加えておく。その目的のために均衡点 x^* を原点 0 に移し，あらためて変数 x が均衡点からの乖離をあらわすと解することにしよう。このような変換はつねに可能なところであり，それによって体系の運動が本質的に変化することはありえないから，われわれはすでに原微分方程式 $\dot{x}=f(x)$ において，その変換がなされていると考えてよいであろう。

ここで関数 $f(x)$ が原点の近傍で正則な解析関数の性質を満たしており，絶対かつ一様に収束する x の無限巾級数に展開できると仮定すれば，$\dot{x}=f(x)$ は

(9)　$\dot{x}=Ax+g(x)$

のような形に書けることになり，右辺の A は原点において評価された $\partial f^i/\partial x_j$ の値 a_{ij} から成る正方行列，$g(x)$ は x の 2 次以上の巾級数である。

以下しばらく右辺の $g(x)$ の部分は無視することにして，線型の微分方程式体系

(10)　$\dot{x}=Ax$

を考察の対象にし，(10)に関するリャプーノフ関数 $V(x)$ として

(11)　$V(x)=x'Vx,\quad V=V'$

という 2 次形式を考えてみよう。x が(10)の解であるという仮定の下で，まず $\dot{V}(x)$ を計算すれば

(12)　$\dot{V}(x)=W(x)=x'Wx$

のごとくであって，$V(x)$ が2次形式なら $W(x)$ もまた2次形式となり，その係数行列は

(13)　$A'V+VA=W$

の形をとる。(13)は，W を所与の行列とすれば，V を未知行列とする行列方程式をあらわし，もし A の特性根 λ_i がすべて非ゼロで，しかも相反する符号をもたなければ，$n(n+1)/2$ 個の元素 v_{ij} を一意的に決定する。

目下の議論にとってとりわけ重要なのは，リャプーノフに負うつぎの定理である。すなわち，さらに A の特性根 λ_i がすべて負の実数部分をもつとすれば，どんな負定符号の2次形式 $W(x)$ に対しても，かならず(13)から正定符号の2次形式 $V(x)$ が一意的に定まり，x が(10)の解であることを前提として，$V(x)$ は(12)の関係で $W(x)$ と結ばれる，というのがそれである。事実もしある $x^0\neq 0$ について $V(x^0)>0$ とはならなかった，すなわち $V(x^0)\leqq 0$ となったとすれば，$W(x)<0$ である以上，(12)から $\dot{V}(x)<0$ となるから，$t>0$ については $V(x)<0$ となり，t が大となるにつれて $V(x)$ の値はますます減っていかなくてはならない。ところが A の特性根の実数部がみな負であれば $\dot{x}=Ax$ の解は0に収束し，それとともに $V(x)$ の値もまた0に収束するから，これは矛盾である。依って A の特性根の実部がすべて負でありさえすれば，$V(x)>0$，$\dot{V}(x)<0$ が同時に満たされることになり，$\dot{x}=Ax$ の均衡点は局所的に安定となる。[14]

これだけのことを前提として，ふたたびもとの微分方程式体系(9)に戻ることにしよう。前のパラグラフで考察した(10)のリャプーノフ関数を $V^0(x)$ と記し，(9)のリャプーノフ関数としてはあらためて $V(x)=V^0(x)+V^\varepsilon(x)$ を試してみるとすれば，ここで(9)の均衡点の安定性をいうためには，$V^\varepsilon(x)$ は，$V(x)$ が $V^0(x)$ と同符号となるように，また(9)の解を代入したときの $\dot{V}_{(9)}(x)$ が，(10)の解を代入したときの $\dot{V}_{(10)}(x)$ と同符号となるように，選ばれねばならない。しかし $g(x)$ が原点の近傍で2次の項から始まる巾級数の形で展開される場合には，端的に $V^\varepsilon(x)=0$ となるように $V^\varepsilon(x)$ を選ぶことが許されるであろう。その場合には

(14)　$\dot{V}_{(9)}(x)=\dot{V}_{(10)}{}^0(x)+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial V^0}{\partial x_i}g_i=W(x)+R(x)$

となって，右辺の第二項は3次以上の項から成る巾級数となる。したがって充分にゼロに近い $x\neq 0$ について考えるかぎり，$\dot{V}_{(9)}(x)$ の符号は $\dot{V}_{(10)}{}^0(x)$ すなわち $W(x)$ の符号によって律せられ，後者が負であれば前者もまた負とならざるをえない。依って充分小さな $x\neq 0$ については，$V(x)>0$ ならびに $\dot{V}(x)<0$ が成立し，(9)の均衡点の局所的安定性が成立つことになる。非線型体系の局所的安定にとって，線型体系の安定が，特異な場合を除けば充分条件となるというのは，このような意味においてである。[15]

注(14)　この定理については F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Vol. II, 1959, pp. 187～188 の参照が有益である。

(15)　上記の議論については，W. Hahn, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, pp. 33～34, La Salle and Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, pp. 47～48 など参照。

ところで上記のように，非線型体系の小範囲の安定条件が線型体系の安定条件に依存し，後者がその特性方程式の根の性質によって確定されうるとすれば，最後にそれらの根の性質を当該の特性多項式の係数から判別しうる規準を確立しておくのが便利であろう。事実⒀の W としては，負の定符号性を満たすどんな行列を用いてもよいのであるから，いま $-I$ をもってそれとみなせば，⒀をつうじて V の元素を A の元素によってあらわすことができ，それを V の正定符号の条件

$$v_{11}>0, \quad \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}>0, \quad \cdots, \quad \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \cdots v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} \cdots v_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} \cdots v_{nn} \end{vmatrix}>0$$

に代入して，A の元素の表示でその特性根の実部が負であるための条件をあらわす道が開かれる。

しかしそのような条件は，今日ラウス＝フルヴィッツの検定行列式として知られているものによって，はるかに簡単にあらわされよう。いま⑽の特性方程式 $D(\lambda)=|A-\lambda I|=0$ から得られる特性多項式を

$$b_0\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n=0$$

ここで

$$b_0=1$$

$$b_1=(-1)(a_{11}+a_{22}+\cdots\cdots+a_{nn})$$

$$b_2=(-1)^2\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\cdots\cdots+\begin{vmatrix} a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n} \\ a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}\right)$$

$$\vdots$$

$$b_n=(-1)^n|A|$$

とすれば，A の特性根のすべてが負の実部をもつための必要かつ充分条件は

$$(15)\quad |b_1|>0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}>0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_1 & b_3 \end{vmatrix}>0, \quad \cdots\cdots, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & \cdots\cdots & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}>0$$

のようである。換言すれば，A 行列の元素が⒂の条件を満足するときに，⑼の均衡点は小範囲の安定性を満たすと判定しうるのである。

5　以上の予備考察ののちに，ここで本題の競争市場の安定分析に立入ることにしよう。繰返すまでもなく，競争的な需給調節のメカニズムは，当該の財市場に超過需要がある場合にはその財の価格が騰貴し，逆に超過供給（負の超過需要）がある場合にはその価格が下落するという仕組みを中軸とすると考えられている。いまこの法則を前述の数学原理に適合する形で微分方程式体系で記述

するとすれば，それは端的に

(16) $\dot{p}_i = F^i[E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)] = H^i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

のように定式化されよう。ここで p_i, E_i はいうまでもなく第 i 財の価格と超過需要関数をあらわしており，また $F^i(E_i)$ はいわゆる sign-preserving な調節関数をあらわしている。すなわち後者については $\mathrm{sgn}\, F^i(E_i) = \mathrm{sgn}\, E_i$ であって，E_i が正となるか負となるかゼロとなるかに応じて，$F^i(E_i)$ も同様にそれぞれ正・負・ゼロの符号をとると仮定されるのである。

(16)については述べるべき点が数多いが，まず超過需要関数 $E_i(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ あるいは $E(p)$ については，以下つぎのような仮定を設けることにしよう。

(C) I^+ を $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の所与の部分集合とするとき，$E(p)$ は $\tilde{P} = \{p \mid p \geq 0, p_i > 0 \text{ for } i \in I^+\}$ を共通の定義域として定義され，その上において一価連続である。また $\tilde{P}$ のすべての境界点ならびにそれに収束するすべての点列 $\{p^\nu\} \in \tilde{P}$ に対して

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{n} E_i(p^\nu) = \infty$$

が満たされる。(16)

(B) $E(p)$ は下から有界。すなわちすべての $p \in \tilde{P}$ について $E_i(p) \geqq -b$ となるような $b > 0$ がある。

(H) $E(p)$ は $p \in \tilde{P}$ について 0 次同次。すなわちすべての $p \in \tilde{P}$, $\lambda > 0$ について

$$E(p) = E(\lambda p)$$

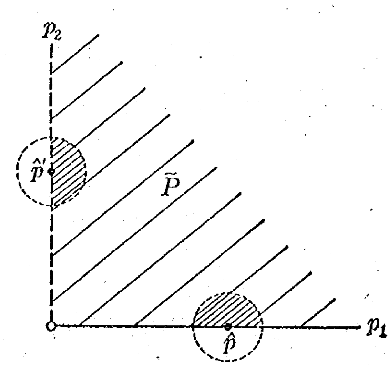
(W) ワルラス法則が成立する。すなわちすべての $p \in \tilde{P}$ について

$$p \cdot E(p) = 0$$

仮定(C)の前半部は，財 $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ を I^+ に含まれるものとそうでないものに分けた場合，前者については $p_i = 0$ となると $E_i(p)$ が定義されないことを意味している。もちろん特殊な事例としては $I^+ = \emptyset$ や $I^+ = \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ の場合が含まれてもよく，前者であればすべての $E_i(p)$ が $p \geq 0$ の全域にわたって定義され，後者であればそれらは $p > 0$ についてのみ定義される。とくに一般的に(C)のように仮定する理由は，$p_i = 0$ のときに，財によっては $E_i(p)$ が無限大になる可能性

注(16) $\tilde{P} \subset R^n{}_+$ は R^n での開集合 $U = \{p \mid p_i > 0 \text{ for } i \in I^+\}$ について $\tilde{P} = U \cap R^n{}_+$ と考えられるから，$R^n{}_+$ に対して相対的に開いている。いま $I = \{1, 2\}$, $I^+ = \{1\}$ の事例で考えれば，$\tilde{P}$ は R^2 の右半平面 $U = \{p \mid p_1 > 0\}$ と非負象限 $R^2{}_+$ との共通部分であり，横軸は含むが，縦軸と原点は含まない。したがって第7図の $\hat{p}$ のような点はその近傍 $N(\hat{p})$ と $R^2{}_+$ との共通部分 $N_*(\hat{p})$ がすべて $\tilde{P}$ に含まれるところから $\tilde{P}$ の内点となるが，$\hat{p}'$ のような点は $N_*(\hat{p}')$ の一部が $\tilde{P}$ に含まれないところから境界点となる。(C) の境界条件 $\lim_{\nu \to \infty} \sum_i E_i(p^\nu) = \infty$ が適用されるのは，いうまでもなくこの意味での境界点に対してのみである。

なお上の議論が関連する相対位相の概念については，E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, 1969, pp. 60~61, 入江昭二『位相解析入門』pp. 68~70 など参照。



第7図

も有限値をとる可能性も排除しえないからである。かつてマッケンジーは $p_i=0$ の p に収束するすべての $\{p^\nu\}$ に対して $\lim_{\nu\to\infty} E_i(p^\nu)=\infty$ となると仮定したが[17]，ここではそのような仮定もまた採択しない。というのは，すべての $\{p^\nu\}\to\hat{p}$ について $\lim_{\nu\to\infty} E_i(p^\nu)=\infty$ となる場合にまで連続性の定義を拡張するとしても，なお2組の $\{p^\nu\}$, $\{p^{\nu\prime}\}\to\hat{p}$ の一方については $\lim_{\nu\to\infty} E_i(p^\nu)=\infty$ となるが，他方については $\lim_{\nu\to\infty} E_i(p^{\nu\prime})<\infty$ となるケースがしばしば起こりうるからである[18]。そこで $J=\{i|\ \hat{p}_i=0\}$ とするとき，どんな $\{p^\nu\}\to\hat{p}$ に対しても少なくとも一つの $i\in J$ について $\lim_{\nu\to\infty} E_i(p^\nu)=\infty$ となればよいというのが，ここでの仮定の後半部の趣旨である。なお(B)と(W)とを仮定するかぎり，$E_i(p)$ が無限大となりうるのは，p_i がゼロとなる場合のみであることもいうまでもないであろう。

併せて $E(p)$ の一価性をも仮定するのは，当然(16)による定式化を有意味ならしめるのが狙いであり，これは個々の主体の選好や生産可能集合の強凸性から導かれると考えれば足りるであろう。

(B)の仮定は財の初期保有量や1期あたりの生産量の有限性を考えれば自然な仮定であり，また(H)と(W)についてはよく知られているから述べるまでもないであろう。

F^i については，これを $E_i(p)$ の上で一価連続と仮定するから，$H^i(p)$ もまた $\tilde{P}$ の上で一価連続と考えられよう。

ところで(H)の仮定から，p の絶対水準はいかようにも考えられるから，われわれはそれを体系外の計算単位で表示することもできるし，また体系内の一財を価値尺度財 (numéraire) として表示することもできる。後者の途を選ぶ場合は，たとえば $q_i=p_i/p_n$, $p_n>0$ のようにすることによって，(16)の代りに

(17) $\dot{q}_i=f^i[e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})]=h^i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

が得られ，ここで

(18) $e_i(q)=e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})=E_i\left(\frac{p_1}{p_n},\ \frac{p_2}{p_n},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_{n-1}}{p_n},\ 1\right)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$

であること，f^i が F^i と同様 sign-preserving な関数であること，はいうまでもない。以下ではア

注(17) L. McKenzie, "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems", *Econometrica*, April, 1954, esp. pp. 156 ff.

(18) H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, 1968, pp. 323～324. K. J. Arrow and F. H. Hahn. *General Competitive Analysis*, 1971, pp. 29～30 参照。

いま後者にしたがい，財が3種類で効用関数が $u(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^{\frac{1}{2}}+x_2^{\frac{1}{2}}+x_3^{\frac{1}{2}}$，財保有量が $(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3)=(0,\ 0,\ 1)$，価格 p_1, p_2 が正で0に近づき，p_3 が恒等的に1にひとしい事例を考えれば，予算の制約下での効用最大化条件から，3財の超過需要関数はそれぞれ

$$x_1(p)=\frac{1}{p_1+\frac{p_1^2}{p_2}+p_1^2},\quad x_2(p)=\frac{1}{p_2+\frac{p_2^2}{p_1}+p_2^2},\quad x_3(p)=\frac{1}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+1}$$

となる。ここで $\hat{p}=(0,\ 0,\ 1)$ に収束する $\{p^\nu\}$ として，まず $\{p^\nu\}=\{1/\nu,\ 1/\nu^2,\ 1\}$ を選べば，$(p_1^\nu)^2/p_2^\nu$ は1となり，したがって $x_1(p^\nu)$ もまた1に近づくが，他方 $\{p^{\nu\prime}\}=\{1/\nu,\ 1/\nu,\ 1\}$ とすれば，$(p_1^{\nu\prime})^2/p_2^\nu$ は0に近づき，$x_1(p^{\nu\prime})$ は無限大に向う。依って $p=\hat{p}$ では $x_1(p)$ は定義できないことになる。しかし超過需要の和 $x_1(p)+x_2(p)+x_3(p)$ はどんな $\{p^\nu\}\to\hat{p}$ についても無限大に向うことが容易に知られる。

ロー＝ブロック＝ハーヴィッチに倣って[19]，(16)を「規準化されない体系」（Ⅰ），(17)を「規準化された体系」（Ⅱ）と呼んで区別することにし，前者の解を $\phi^{\mathrm{I}}(t,\ p^0)$ で，後者の解を $\psi^{\mathrm{II}}(t,\ q^0)$ であらわすことにしよう。すると，いまもし規準化されない体系で規準化された価格の運動をあらわすとすれば，

$$(19)\quad q_i=\frac{\phi_i{}^{\mathrm{I}}(t,\ p^0)}{\phi_n{}^{\mathrm{I}}(t,\ p^0)}=\psi^{\mathrm{I}}(t,\ q^0)$$

のようであり，逆に規準化された体系で規準化されない価格の動きをあらわすとすれば，(17)から

$$(20)\quad \begin{aligned}&\left(\frac{\dot{p}_i}{p_n}\right)=h^i\left(\frac{p_1}{p_n},\ \frac{p_2}{p_n},\ \cdots\cdots,\ \frac{p_{n-1}}{p_n}\right)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)\\ &\dot{p}_n=0\end{aligned}$$

のようである。(20)の解を $\phi^{\mathrm{II}}(t,\ p^0)$ と記せば，それは一般に(16)の解 $\phi^{\mathrm{I}}(t,\ p^0)$ とは相異なり，また同様に(17)の解 $\psi^{\mathrm{II}}(t,\ q^0)$ も(19)の解 $\psi^{\mathrm{I}}(t,\ q^0)$ とは相異なる。すなわち規準化されない価格の運動ならびに規準化された価格の運動は，ともに（Ⅰ）（Ⅱ）のいずれによっても述べうるのであるが，それらはかならずしも合致しないのである。

(16)，(17)はしばしばより特殊な形態で，それぞれ

$$(21)\quad \dot{p}_i=K_i\cdot E_i(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

および

$$(22)\quad \dot{q}_i=k_i\cdot e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

のように書きあらわされる。ここで K_i, k_i はともに正の定数で，ランゲによって「価格の伸縮度」と考えられ，メッツラーによって「調整速度」と呼ばれた大きさである。すなわちいま財の量の単位が不変のままで，K_i, k_i がパラメトリックに増減したとすれば，それは第 i 財の価格がより伸縮的になったりより硬直的になったりしたこと，あるいはその調整速度がより速くなったりより遅くなったりしたことを意味している。他方われわれは，また財の単位を適当に変更することによって，(21)，(22)を，一般性を失うことなく

$$(23)\quad \dot{p}_i=E_i(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

および

$$(24)\quad \dot{q}_i=e_i(q_1,\ q_2,\ \cdots\cdots,\ q_{n-1})\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

のように書くこともできる[20]。が，後者の措置はあくまでも人為的な措置であり，与件としての真の調整速度が変化したわけではないから，これを前者と混同することは許されない。

注(19) K. J. Arrow, H. D. Block and L. Hurwicz, "On the Stability of the Competitive Equilibrium II", *Econometrica*, January 1959, pp. 85～86.

(20) 福岡＝神谷が指摘したように，これは第 i 財の単位を $\sqrt{K_i}$ 倍あるいは $\sqrt{k_i}$ 倍することを意味している。Cf. M. Fukuoka and D. Kamiya, "The Stability Conditions and the Speeds of Adjustments: A Critical Note", 『季刊理論経済学』 1964年2月号。

つぎに価格 p, q の非負性を考慮に容れれば，(16)は本来

$$(25)\quad \dot{p}_i=\begin{cases} H^i(p) & \text{for } p_i>0 \text{ or } H^i(p)>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

の形に書き改められねばならず，また(17)もこれに準じて書き改められねばならない。すなわち p_i が下落してゼロ水準に達することがあれば，$H^i(p)<0$ であっても，もはや p_i はそれ以下には下りえないのである。但し続稿で考察する粗代替財の事例においては，p の運動を実際上すべての時間をつうじて正領域で考えることができるから，そのような場合には(25)の下半部は無視することが許されよう。[21] (25)においては一般に，リプシッツ条件が満たされないことに注意すべきである。

経済理論の見地から重要なのは，(16)や(17)が前提していると考えられる制度上の機構である。まずそれらはいわゆる「模索」("tâtonnement") の過程をあらわすと解せられ，ここで「模索」というのは，各主体間の取引が全市場での需給の均衡を俟ってはじめて実行に移されること，それが成立するまではたんに意思表示されるにとどまること，を意味している。[22] つまりこれらのモデルでは，不均衡下での取引はいっさい無視されているのである。こうした工夫が案ぜられる所以は，そう仮定しなければ，取引が行なわれるたびごとに各主体の財保有量が変化し，それが超過需要関数をシフトさせることから，究極の均衡の所在が事前に確認できなくなるからである。たしかにより一般的な見地からすれば，不均衡下でも取引が行なわれうるような調整過程が研究されるべきであり，われわれもまた後にそのような非模索過程の近時の研究をとりあげる機会をもつであろう。しかしその場合には，上述のように均衡点の所在そのものが，実行される取引の経路に依存することになり，慣例的な手法で均衡の存在と安定とを分離してとり扱えなくなる点に留意しておく必要がある。

取引の実行は，またたんに財保有量の変動をつうじてばかりでなく，各人の当初の意向がその取引においてどの程度に満たされたかの経験をつうじても，つぎの意思決定に影響を及ぼすと考えられよう。[23] 学習ないしは情報入手という見地からすれば，模索の事例においてさえ，各主体の需給の意思表示が相互に通告されあう場合には，充分な回数での模索の繰返しが各人をしてエコノメトリッシャンたらしめ，超過需要関数を推定させる結果を生むかもしない。かつてピグウは，経験の累

注(21) 価格の非負性を斟酌した定式化としては，ほかにも

$$\dot{p}_i=\max[E_i(p),\ 0]$$

あるいは

$$\dot{p}_i=\max[kE_i(p)+p_i,\ 0]$$

のような型のものがある。前者は H. Nikaido. "Stability of Equilibrium by the Brown-von Neumann Differential Equation", *Econometrica*, October 1959 において，後者は H. Nikaido and H. Uzawa, "Stability and Non-negativity in a Walrasian Tâtonnement Process", *International Economic Review*, January 1960 において考察されたモデルである。

(22) 但しこの解釈がかならずしも模索理論の創始者の真意に忠実でないことについては第1節の脚注(2)参照。

(23) ここで念頭におかれているのは，たとえばクラウアーのいわゆる "Dual Decision Hypothesis" のような考え方である。Cf. R. Clower, "The Keynesian Counterrevolution: A Theoretical Appraisal" in F. H. Hahn and F. P. R. Brechling ed., *The Theory of Interest Rates*, 1965.

積にもとづく知見の増大が次第に価格の変動幅を小さくしていくという趣旨のことを述べたことがあるが，上記の定式化がそうした「学習効果」をいっさい捨象している点にも注意が払われるべきであろう。

最後に(16)，(17)は，非人格的な市場の力，あるいは市場機構の化身たる架空の競売人の行動をあらわすと考えられている。が実のところ，市場で実際に行動しているのはそれぞれの売手・買手のみであり，それ以外の経済主体はいないのであるから，(16)，(17)が一体誰の行動をあらわしているのか，またその意思決定の動機が何なのかについては，たしかにクープマンスが指摘しているような疑問が生ずる。[(24)] この論点については，かつてアローが，需給の均衡点に達するまでは各取引者たちが何らかの独占者的価格影響力をもつと仮定すべきであり，競争は均衡点においてはじめて支配すると考えるべきであると主張したことがあるが，[(25)] このアローの提案をどう具体的に定式化するかは，まだ未解決の問題である。

（経済学部教授）

注(24) T. C. Koopmans, *Three Essays on the State of Economic Science*, 1957, p. 179.

(25) K. J. Arrow, "Towards a Theory of Price Adjustment", in Abramovitz and others, *The Allocation of Economic Resources: Essays in Honor of Bernard Francis Haley*, 1959.