

Title	社会経済システムの公平性
Sub Title	The fairness of socio-economic systems
Author	安田, 八十五
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1972
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.65, No.8 (1972. 8) ,p.538(36)- 551(49)
JaLC DOI	10.14991/001.19720801-0036
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19720801-0036

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

社会経済システムの公平性

安田 八 十 五

目 次

1. 「市場の失敗」の意味
 2. 効率性、安定性と公平性
 3. 資源配分システムの構造
 4. 公平な配分と競争的配分との関係
 - 4.1 Edgeworth 市場のモデル
 - 4.2 競争均衡解
 - 4.3 公平な帰属の定義
 - 4.4 公平な帰属の取束定理
 5. 投票システムの公平性と不安定性
 6. 経済と政治の戦略的構造の比較
 7. おわりに
- 数学付録
- 付録 1. 公理系からの value の誘導
 - 付録 2.
 - 付録 3.
- 参考文献

1. 「市場の失敗」の意味

長い間、経済学の主題は個人が所有する限られた資源の効率的な配分の問題であると考えられてきた。価格システムにもとづく市場機構は「他の個人の効用を減じることなく、ある個人の効用を増加することができないような資源配分状態」としての Pareto 最適な資源配分状態をある種の条件のもとでもたらすことのできる経済機構として経済的厚生観点から効率的な資源配分 (efficient allocation of resources) の方法として支持されてきた。とくに Pareto 最適性は価値判断から自由であるとの立場をとる人々からは価格機構は資源配分の最適解を与えるものとみなされてきた。しかしながら、価格機構にもとづく競争的配分が数多くの Pareto 最適な配分の中から選ばれるという必然的な理由はなく、仮に競争的配分が選ばれたとしても、そのときには所得分配の不平等が生ずることがあり、真の意味の最適性は達成されない。市場機構というのは合意にもとづく交換システ

社会経済システムの公平性

ムであるから、最初の資源配分状態は過去からうけついでものとして、そこからの合意にもとづく交換だけが市場機構の対象になっており、市場機構による配分結果は最初の配分状態に強く依存している。最初の配分状態が不平等であれば、配分結果も不平等になってしまう。つまり、市場機構は公平な分配状態をもたらすことができない。このような所得分配の不平等のケースを経済学では市場の失敗 (market failure) として経済システムの特異ケースとして扱ってきた。効率性 (efficiency) を達成することのできる市場機構は公平性 (fairness) を達成することができないわけである。市場の失敗にはこの所得分配の不平等のケースの他にも外部経済の帰属不能のケース、費用逡減のケースとか公共財のケースとかがあげられるが、これらのケースにおいては市場機構によっては効率性すらも達成することができないようなケースである。しかるに現在の複雑な高度産業社会においては、公害問題、都市問題等に示されているように、市場の失敗のケースが単なる失敗ではなく経済システムにとって本質的な側面をもっていることを意味している。このことは資源配分の問題を市場機構によってとらえるのではなく新たな視点にたつて社会経済システム (socio-economic system) のわく組の中で統一的にとらえなければならないことを暗示している。この新たな視点というのは効率性ではなく安定性 (stability) とか公平性 (fairness) とかのこれまでの経済的合理性を越えた概念にもとづかなければならない。本稿の目的は社会経済システムの公平性という概念を用いて価格機構、投票機構等の資源配分の方法を評価し、公平な資源配分システムを設計するための概念的なわく組を与えることにある。

2. 効率性、安定性と公平性

「他の個人の効用を減じることなく、ある個人の効用を増やすことができないような状態」として定義される Pareto 効率性は市場機構と強力に結びついている。完全競争市場 (competitive market) はある種の条件のもとに Pareto 効率な資源配分状態をもたらすことができる。そして Pareto 効率な配分状態は一見社会的にみて安定な配分状態のように思える。しかしながら、たとえ配分状態が Pareto 効率性を満たしていたとしてもある少数グループがいつも不利をこうむるようだとすると、そのグループだけで独立して別の組織を作った方が有利になる。このようにある少数グループが全体の組織から独立して新たな別の組織を作ろうとする動機が存在するような場合には、その社会の資源配分状態は社会的にみて安定であるとはいえない。「いかなるグループにとっても独立して新たな組織を作ることが有利にならないような状態」が社会的に安定な状態であるといえる。社会的安定性 (social stability) という安定性の概念は協力ゲームの理論におけるコア (core) という解から由来している。コアとは「いかなる結託によっても支配されないような配分の集合」として定義されている。

社会的に安定 (social stable) ならば、全員が独立して新たな組織を作ることも有利でないから、Pareto 最適にもなっているが、Pareto 最適であっても社会的に安定であるとは限らない。いいかえれば、社会的に安定な配分の集合は Pareto 効率な配分の集合の部分集合である。この社会的に安定な配分 (social stable allocation) という概念は協力的世界 (collusive world) における一つの解であるが、それは非協力的世界における解である競争的配分 (competitive allocation) とは密接な関係を持っている。事実、競争的配分は存在すればつねに社会的に安定な配分の集合に含まれており、さらに主体の数が増えると社会的に安定な配分の集合は収縮して競争的配分に近づく。この命題は競争市場の発生メカニズムの解明として Edgeworth がとりあげてから最近の core の limit theorem としての一連の仕事がある。筆者自身は core を economic conflict の程度を示す集合としてとらえて競争市場の発生機構を economic conflict の decreasing process として解明したことがある。⁽¹⁾

この社会的安定性という概念に加えてさらに社会的公平性 (social fairness) という概念を社会経済システムに導入したいと思う。効率性、安定性という概念は配分の結果に対応している評価であるが、次に定義する公平性 (fairness) は配分の事前的評価に関連している。この公平性の概念も協力ゲームの理論における value という解から由来している。資源配分の問題は協力ゲームとしてとらえることができるが、その場合に各プレイヤーはプレイが行なわれたのちに生ずる結果を各プレイヤーの効用尺度に照らして事前に評価でき、それを彼の見込みあるいは期待としていただくことができると考えることができる。この期待の中には、プレイヤーがゲームに参加するという立場自体から得られる期待も含まれている。value というのはゲームにおける協力から得られる利得の先験的な評価として定義することができる。もう少し厳密に定義すれば、value とは「あるプレイヤーが結託に参加したときの貢献の公平な期待値」ということになり、それはある意味で協力的な世界における公平な分配と解釈することができる。value は協力ゲームに対するプレイヤーの先験的な評価であるから、別の角度からみればそのプレイヤーのゲームでの力 (power) を表わしているとも解釈することができる。

以下においては資源配分の諸方法をこの公平性という視点から評価してみよう。

3. 資源配分システムの構造

経済 (economy) とは個人の所有する限られた資源の配合を主にとり扱うものであり、最適な資源配分状態をもたらすものとして価格システムに基づく競争市場が長い間支持されてきた。そして政治 (politics) とはある社会において集合的に所有される限られた資源の生産と分配の問題であるとして、経済とは分離して考えられてきた。たとえば、自動車というような私的財 (private goods) の

注(1) 参考文献 (15) もしくは (16) を参照のこと。

配分は経済の問題として価格機構に基づいて配分が決定されてきたし、公園のような集合財 (collective goods) または公共財 (public goods) の配分は政治の問題として民主主義社会では投票システム、とくに多数決によって決定されてきた。しかしながら、現代のような複雑な高度産業社会においては、経済、政治、社会の問題に明確な違いをつけることが困難になってきた。すべての問題が複雑にからみあっており、その配分を統一的に決定しなければならなくなってきた。たとえば現在の公害、都市問題等は価格機構が有効に働かないことを示しており、公共財の資源配分方法として価格機構に代わって、民主主義、すなわち投票システムが社会的意思決定機構としてとりあげられねばならないことを意味している。また公害というような外部不経済を生み出す財の配分も価格機構に代わるものが求められている。価格システム、投票システムを含めて、資源配分の方法としては次のようなものが考えられよう。⁽²⁾

- (1) 価格システムをもつ市場 (The economic market with a price system)
- (2) 投票システム (Voting procedures)
- (3) 交渉 (Bargaining)
- (4) せり (Bidding)
- (5) 独裁による配分 (Allocation by higher authority, fiat or dictatorship)
- (6) 強制による配分 (Allocation by force, fraud and deceit)
- (7) 慣習による配分 (Allocation by custom, including gifts and inheritance)
- (8) 偶然による配分 (Allocation by chance)

これまでは (1) の市場機構が経済システムの主要な制度として支持されてきたが、最近では (2) の投票機構が市場の失敗のケースといわれる公共財とか外部不経済財の配分に用いられるようになってきた。しかしながら、現実の資源配分システムとしての社会経済システムにおいては上にあげた8つのサブシステムとその他のサブシステムを含めた複雑システムとして資源の配分が行なわれており、市場機構と投票機構の2つだけで解決することには無理がある。我々は統一的な視点に立って効率的、安定的かつ公平な資源配分システムを求めなければならない。

4. 公平な配分と競争的配分との関係

交換経済システムを協力ゲームとしてとらえたとき、競争的配分は core (安定な配分の集合) につねに含まれており、主体の数が増えると core は収縮して競争的配分に近づくという関係があった。これに対して value (公平な配分) は有限人の市場では競争的配分とは必ずしも一致してなく、さらに core につねに含まれているという保証もないが、主体の数が非常に大きくなった極限市場に

注(2) 安田(12)及び Shubik (10) を参照のこと。

においては value は収束して競争的配分に一致するという命題を主張することができる。この事実は極限市場における完全競争がここに定義した意味で公平であることを意味している。この命題は一般的な交換経済において証明することができるが、ここでは簡単な Edgeworth 型の市場において証明しよう。

4.1. Edgeworth 市場のモデル

2種類の財と2つのタイプの主体をもつエッジワース型の市場を考えよう。各主体は選好と初期配分のちがいで2つのタイプに分かれているものとする。タイプ1の主体 i は初期手持 $(a_i, 0)$ をもって市場に参加し、その選好は効用関数 $U^i(x_i, y_i, z_i) = u^i(x_i, y_i) + z_i$ によって表わされるものとする。ここに x_i, y_i はそれぞれ第1番目、2番目の財の数量を表わしており、 z_i は初期手持ちが0であるように規準化された自由に転移可能なある種の貨幣 (paper money とよぶ、正、負になりうる) の保有量を示している。同様にタイプ2の主体 j は $U^j(x_j, y_j, z_j) = u^j(x_j, y_j) + z_j$ なる効用関数をもちその初期手持ちは $(0, b_j)$ であるとする。各タイプはそれぞれ m 人、 n 人の主体から構成されているものとする。 u^i と u^j はともに凹 (concave) かつ2階微分可能なものと仮定する。このような主体から構成される市場を Edgeworth 型の (m, n) 市場とよぶ。この市場を協力ゲームとして扱うために次のような特性関数を導入しよう。

$$(4.1) \quad v(S, T) = \text{Max}_{X, Y} [\sum_S u^i(x_i, y_i) + \sum_T u^j(x_j, y_j)] \quad \text{for all SCM, TCN}$$

ここに最大化は $\sum_S x_i + \sum_T x_j = \sum_S a_i, \sum_S y_i + \sum_T y_j = \sum_T b_j$ かつ $x_i, x_j, y_i, y_j \geq 0$ という条件のもとに行う。

われわれは簡単のためにすべての主体の効用関数が同じで $u(x_i, y_i) + z_i$ という形をもっているケースについてとり扱うことにする。ここに z_i は貨幣の初期水準からの純変化を示している。さらにタイプ1, 2の主体はそれぞれ同じ量の初期配分 $(a, 0), (0, b)$ をもって市場に参加するものと想定する。

各主体は、等しい選好をもっていると想定したので結託に対する全効用は結託のすべての主体に同じ量を与えることによって最大となり、特性関数は結託のメンバーの数 (s, t) のみに依存することになる。ここに s, t は結託 (S, T) のタイプ1, 2のそれぞれのメンバーの人数を示す。それゆえ

$$(4.2) \quad v(S, T) = v(s, t) \quad \text{かつ}$$

$$v(s, t) = (s+t)u(\sigma a, \tau b)$$

を得る。ここに σ, τ は結託 (S, T) の相対的構成を示している、すなわち $\sigma = s/(s+t), \tau = 1-\sigma = t/(s+t)$ 、この (m, n) 市場全体の相対的構成 (γ, δ) は $\gamma = m/(m+n), \delta = 1-\gamma = n/(m+n)$ で与えられる。

定理 4.1⁽³⁾ $v(s, t)$ は次の条件を満たしている。

$$(4.3) \quad v(0, 0) = 0$$

$$(4.4) \quad \text{superadditivity;}$$

$$S_1 \cap S_2 = O, T_1 \cap T_2 = O, S_i, S_2 \subset M, T_1, T_2 \subset N$$

ならば、

$$v(s_1, t_1) + v(s_2, t_2) \leq v(s_1 + s_2, t_1 + t_2)$$

$$(4.5) \quad v(s, t) \text{ は } (s, t) \text{ の凹関数である}$$

$$(4.6) \quad v(s, t) \text{ は1次同次である、すなわち任意な整数 } k \text{ に対して}$$

$$v(ks, kt) = kv(s, t)$$

条件(4.3)と(4.4)は函数 v が von Neumann-Morgenstern 型の協力ゲームになっていることを示す。

4.2. 競争均衡解

市場の対称性と効用関数の凹性によって、Pareto 効率な配分はすべての主体に $(\gamma a, \delta b)$ なる配分を与えることによって達成することができるから、競争的価格 (competitive price) は、

$$(4.7) \quad \begin{cases} \pi_x = \partial u(\gamma a, \delta b) / \partial x & \text{(第1財)} \\ \pi_y = \partial u(\gamma a, \delta b) / \partial y & \text{(第2財)} \end{cases}$$

でなければならない。ゆえに競争的帰属 (competitive imputation) は

$$(4.8) \quad \begin{cases} \omega_1 = u(\gamma a, \delta b) + \delta a \pi_x - \delta b \pi_y & \text{(タイプ1)} \\ \omega_2 = u(\gamma a, \delta b) + \gamma b \pi_y - \gamma a \pi_x & \text{(タイプ2)} \end{cases}$$

によって与えられる。この式において、第1項は最終的配分に対する効用であり、第2項は初期配分を手離したことから得られる収入であり、そして第3項は他の財を買うことによって支払った支出額を示している。

効用関数 u は必ずしも厳密に凹 (strictly concave) でないから、 $(\gamma a, \delta b)$ 以外にも競争的配分は存在しうる。しかし競争価格及び競争的帰属は unique である。 m, n が固定されており、 k が動く、繰り返し型の (km, kn) 市場においては、競争的帰属 (ω_1, ω_2) は市場の規模 k に独立であり一定であることに注意しなければならない。

4.3. 公平な帰属の定義

市場の公平な帰属は game の value として定義されるが、ある主体の value は直観的にいえばすべての可能な結託への限界価値の平均値として表わすことができよう。もしくはランダムに選ば

注(3) 証明は省略する、Yasuda (16)を参照されたい。

れた結託におけるその主体の期待限界価値 (expected marginal worth) と定義することができる。かくして、各主体の value を次のように定義することができる。

$$(4.9) \begin{cases} \phi_i = \varepsilon \sum_{s \geq i} [v(s, t) - v(s-1, t)] & (\text{タイプ 1}) \\ \phi_j = \varepsilon \sum_{t \geq j} [v(s, t) - v(s, t-1)] & (\text{タイプ 2}) \end{cases}$$

同じタイプの主体の value は同じ値となるから、 $\phi_i = \phi_1, \phi_j = \phi_2$ と書くことにする。

ここに ε は averaging operator を意味しているが、それは 1 から $(m+n)$ までの規模の結託が $1/(m+n)$ の確率で起こり、同じ規模の結託は同じ確率で起こるような確率的期待値の operator となっている。operator ε は $\gamma_{m+n}(s, t) = (s+t-1)!(m+n-s-t)!/(m+n)!$ であるような係数を意味している。value の公式は確率概念を用いずに対称性、効率性及びゲームの加法性という 3 つの公理系から導くことができる (数学付録 1 参照)。これらの公理と value が特性函数のみに依存しないということから value は結託力 (coalitional power) から生じる利得の公平な分配 (fair division) を示していると解釈することができる。

Theorem 4.2. value は次の 2 つの性質を満たしている。

(4.10) Pareto 効率性 (Pareto optimality);

$$\sum_{i \in M} \phi_i + \sum_{j \in N} \phi_j = v(m, n)$$

(4.11) 個人の合理性 (Individual rationality);

$$\begin{cases} \phi_i \geq v(1, 0) & \forall i \in M \\ \phi_j \geq v(0, 1) & \forall j \in N \end{cases}$$

証明 (4.10) は value の公式を計算することによって導くこともできるし、または公理系にもどれば仮定から明らかということになる。(4.11) は特性函数 $v(s, t)$ の superadditivity から求めることができる。(Q.E.D.)

初期配分の数値と効用函数の具体的な形状を与えれば、value を具体的に計算することができる。

4.4 公平な帰属の収束定理

いよいよ主体の数が変化したときの value の行動を調べることにしよう。value は市場の規模 (m, n) の変化とともに変化するから、

$$(4.12) \quad \phi_i(m, n) = \varepsilon [D_i(s, t)],$$

と表わすことができる。ここに ε は averaging operator を示し、 $D_i(s, t)$ は結託 (s, t) の限界価値 (marginal worth)

$$D_i(s, t) = v(s, t) - v(s-1, t)$$

を示す。

$H_i(s, t)$ を結託 (s, t) の微分的限界価値 (differential marginal worth) として次のように定義する。

$$(4.13) \quad \begin{aligned} H_i(s, t) &= \partial v(s, t) / \partial s \\ &= u(\sigma a, \tau b) + \tau a \frac{\partial u(\sigma a, \tau b)}{\partial x} - \tau b \frac{\partial u(\sigma a, \tau b)}{\partial y} \end{aligned}$$

微分的限界価値は競争的帰属と密接な関係がある。実際、結託 (s, t) の相対的構成 (σ, τ) が (γ, δ) に近ければ、それは競争的帰属に近づく。とくに $H_i(m, n) = \partial v(m, n) / \partial s$ は競争的帰属 ω_1 と一致している。

限界価値 $D_i(s, t)$ と微分的限界価値とは次のような密接な関係をもっている。

$$D_i(s, t) = H_i(s, t) - 0(1/(s+t))$$

かくして、限界価値が競争的帰属と密接な関係があることがわかる。 $s+t$ が大きくなり、さらに (σ, τ) が (γ, δ) に近づけば、限界価値 $D_i(s, t)$ は競争的帰属 ω_1 に近づく。 $m+n$ が十分大きければ、ほとんどすべての結託は大きくなり、さらにそれらは (γ, δ) に近似的な構成になる。これは確率論における大数の法則 (the law of large numbers) の別型式であることから保証することができる。⁽⁴⁾ 以上述べたことによって value の収束定理の成立が示されたことになるが、もう少し厳密に証明してみよう。

任意な正数 ε が与えられたとき任意な $(n+m) \geq (n+m)_\varepsilon$ に対して少くとも $1-\varepsilon$ の確率によってランダムに選ばれた結託が $|D_i(s, t) - \omega_1| \leq \varepsilon$ を保証するような十分大きな規模 $s+t$ と (γ, δ) に十分近い相対的構成 (σ, τ) になるように正数 $(n+m)_\varepsilon$ を選ぶことができる。ゆえに、

$$(4.14) \quad \phi_i(m, n) = (1-\varepsilon)(\omega_1 + \delta(m+n)) + \varepsilon K_i(m+n), \text{ for all } (m+n)$$

ここに $|\delta(m+n)| \leq \varepsilon$, かつ $K_i(m+n)$ は除かれた結託、すなわち、生起確率 ε が非常に小さいか (γ, δ) と非常にへだたっている構成をもつような結託に対する限界価値 $D_i(s, t)$ の適当な重みつき平均を表わしている。

もしも $K_i(m+n)$ が有界であることがわかれば、 $\phi_i(m, n) \rightarrow \omega_1 (m+n \rightarrow \infty)$ と結論することができ、証明は完了する。

$K_i(m+n)$ が有界であることを示そう。 $K_i(m+n)$ の下界が $v(1, 0)$ になることは D_i の定義と superadditivity 及び特性函数の一次同次性からただちに得ることができる。(数学付録 2 参照)

$K_i(m+n)$ の上界は直接に求めることはできないが、次のような trick を用いて簡単に求めることができる。

value も競争的帰属も Pareto 効率であるから、

$$(4.15) \quad m\phi_1(m+n) + n\phi_2(m+n) = m\omega_1 + n\omega_2 \text{ for all } (m, n)$$

$K_i(m, n)$ の下界が $v(1, 0)$ であるから、 $\liminf \phi_i(m, n) \geq \omega$ すなわち、数列 $\{\phi_i(m, n)\}$ の下極限

注(4) Feller (4) などを参照されたい。

は ω_1 以下にはならない。ゆえに (4.15) より, $\limsup \phi_2(m, n) \leq \omega_2$. value の定義も (4.10) にもどって, $\phi_2(m, n)$ に対して上と同じ操作を加えると, $\limsup \phi_1(m, n) \leq \omega_1$ 及び $\liminf \phi_2(m, n) \geq \omega_2$ を同様にして得ることができる。このようにして value $\phi(m, n)$ が競争的帰属 ω に収束することが示されたことになる。

5. 投票システムの公平性と不安定性

集合的な資源の配分は市場機構によっては失敗となり効率性すらも達成することができなく, これまでは市場機構と並立する代表的な社会的意思決定機構である投票システム, とくに多数決によって決定されてきた。1人1票という直観的な公平性を持ち, 五十一人が四十九人を支配する多数決原理を正当化する根拠は政治哲学的な視点に立てば存在するのかもしれないが, 経済的な資源配分の方法の一つとして評価する場合には, 効率性, 安定性及び公平性という観点から多数決システムを評価しなければならない。多数決という投票システムを単純化して, 多数決ゲームとして考えてみよう。ある社会の資源配分に関する決定は総数 n 人の主体のうち l 人 ($n/2 < l \leq n$) 以上の賛成が得られるときに, 社会的決定として採用され, その決定方式にもとづいて資源配分が決定されることになる。ゆえにこのゲームの特性関数は,

$$(5.1) \quad v(S) = \begin{cases} 1 & \dots\dots\dots l \leq s \text{ のとき} \\ 0 & \dots\dots\dots l > s \text{ のとき} \end{cases}$$

ここに $s = |S|$ は結託 S の主体の人数を表わす。

$l < n$ のとき, 社会的に安定な配分, すなわちコアが存在しないことは直観的にも明らかである。⁽⁵⁾ 実際, いかなる配分状態に対しても多数派を作ることによりそれよりもよい配分を実現することは可能である。 $l = n$, すなわち全員一致のときのみ多数決が有効であるようなゲームではコアが存在する。しかしこのケースではすべての配分がコアに含まれるから, すべての配分が社会的に安定となり, 最終的な配分は各主体の交渉による決定に委ねられてしまい, 多数決ルールによって唯一つの最終的な決定を行なうことができないわけである。全員一致というのは多数決とはいえないから, 一般に多数決ゲームにはコアは存在しない, いいかえれば, 多数決は社会的に安定でない社会的意思決定の方法であるということが出来る。

多数決ゲームの公平な帰属, すなわち value はこのゲームの対称性からすべての主体に対して等しく $\phi_i = 1/n$ for all $i \in N$ であることが容易に知られる。すべての主体にとって多数決ゲームの先験的な評価は等しく, 結局, 多数決が公平な社会意思決定の方式であることがわかった。

以上の結果を要約すると次のようになる。多数決という投票システムは公平な配分を各主体に与

注(5) 付録3においては3人ゲームの単純多数決ゲームに core が存在しないことが証明されている。

えるが社会的には不安定な社会的意思決定の方式である。

最近, 都市問題等にみられるごとく公共財をめぐる配分とか公害などのいわゆる外部不経済を出す資源の配分の方法に関して従来の市場機構では最適な配分を与えることができなく, それに代わって投票機構が採用されなければならないというようなことが主張されているが, 投票システムには上に述べたような社会的不安定性と公平性という基本構造をもっていることを念頭において分析を行ない現実システムに適用されなければならない。

6. 経済と政治の戦略的構造の比較

多数決という政治システムは公平性をもつが社会的に不安定であるという構造がわかった。一方, 市場機構に代表される経済システムは社会的に安定ではあるが, 公平な帰属は資源の初期の配分状態に強く依存してしまい, 公平な社会的意思決定の方式であるということを主張できない。このように考えてみると我々の社会経済システムの2つの基本的なサブ・システムである経済システムと政治システムの間には基本的に異質な構造があるように思われる。経済システムは社会的には安定だが公平性を欠き, 政治システムは社会的には不安定だが公平性を有している。

現実の社会システムは経済と政治を軸にしてその他のシステムも含んで, それらが複雑にからみあっており, いわゆる多元多階層の複雑システム (complex system) になっている。

7. おわりに

われわれは資源配分システムを協力ゲームとみて, その協力ゲームでの公平な配分を value を用いて定義し, 社会経済システムの公平性について考えてきた。市場機構は主体の数が多理想状態においては公平であるが, 通常主体の数が少ないときは完全競争でも公平でないことが示された。一方, 市場機構とならぶもう一つの代表的な社会的意思決定機構である投票機構は公平ではあるが, 社会的には安定でないことが示された。ここに経済と政治の基本構造のちがいをみることが出来る。現代の高度産業社会は複雑なシステムであり, 市場機構と投票機構の2つの資源配分の方法だけでは不十分なことは, 公害問題, 都市問題等に如実に示されており, 資源配分システムという統一的な立場に立った資源配分の方法が望まれる。さらには, その方法も効率性, 安定性, 公平性といった価値基準の他に, 自由とか参画とかの基準にもとづいて選択されなければならないのかもしれない。いずれにせよ, 今後の研究が待たれる。

数学付録

付録 1. 公理系からの value の誘導

本文においては確率的に Shapley value を導いた。そこでの基本的な考え方は player の参加形式における次のような具体的な意味をもっていた。n 人の player 全体が次のようにして大結託をひき起こしていく。まず、だれか 1 人の player から始めて、つぎつぎに 1 人ずつ結託に引き込んでいき、最後には player 全体の大結託に到達する。各々の player を結託に引きこんでいく順序はまったくランダムであり、すべての順序が等確率で起こる。ある 1 人の player がある結託にひきこまれるときには、彼の参加がその結託に及ぼす貢献にみあう値が、彼への報酬として与えられる。そうすると player i の期待できる利得の期待値は

$$\phi_i[v] = \sum_{S \subseteq N} \gamma_n(s) [v(S) - v(S - \{i\})]$$

に等しい。ここに $\gamma_n(s)$ は

$$\gamma_n(s) = (s-1)!(n-s)!/n!$$

である。

Shapley は最初の論文(6)では、このような確率的な考え方を採用しないで、対称性、Pareto 最適性及び独立な game の value の加法性の 3 つの公理から value の公式を導いたのである。これを要約して簡単に紹介しよう。

Shapley value $\phi_i[v]$ は player i が game に対してもつ先験的 (a priori) 評価であるが、player といっても外に表われる彼の固有名が重要なのではなく、player i がそのゲームの中で果たす役割こそが重要なのである。各 player への命名 (labeling) は任意であるから、番号のつけかえによっても game の本質は不変に保たれるべきである。この性質 (対称性) が第 1 の公理として要求される。

U を player 全体の集合とし、 π を U の要素の間の 1 つの順列 (permutation) とする。S \subseteq U のとき、順列 π による S の像を πS で表わし、

$$S \subseteq U \text{ に対して } \pi v(\pi S) = v(S)$$

によって game πv を定義する。そうすると対称性の公理は、

公理 1. [対称性] U の要素の任意の順列 π と、任意の player i に対して

$$(A1.1) \phi_i[\pi v] = \phi_i[v]$$

次に、すべての S \subseteq U に対して $v(S) = v(S \cap N)$ となるような U の部分集合 N を、game v の 1 つのキャリアー (carrier) という。carrier を含む集合はすべて

carrier であり、それらの v の値は同一である。また、すべての S \subseteq U に対して $v(S/N) = v(O) = 0$ であるから、N に対して v は加法的である。すなわち、

$$v(S) = v(S \cap N) + v(S/N)$$

carrier という概念の導入は、player のゲームにおける役割を重視した考えである。carrier の外にいる player は、いかなる結託にも何の貢献もしないから、game の play に何ら直接的な影響を与えない。

公理 2. [効率性] v の任意な carrier N に対して

$$(A1.2) \sum_{i \in N} \phi_i[v] = v(N)$$

これは value $\phi[v] = (\phi_1[v], \dots, \phi_n[v])$ が game の全産出 v(N) の分配であることを示している。game が本質的 (essential) ならば、 $\phi_i[v] = v(\{i\})$ という悲観的な評価があり得ないことを意味している。すなわち、各 player は残りの player 全部が彼に対抗して協力するであろうと悲観的に想定することを排除することを意味している。

3 番目の公理は 2 つの game の和 (sum) (=重畳=superposition) という概念に関連している。互いに独立な rule をもつ 2 つの game v, w が player の集合それぞれ Q, R の上で定義されているとする。2 つの game の和 (sum) を T \subseteq QUR に対して $(v+w)(T) = v(Q \cap T) + w(R \cap T)$ によって、QUR の上で定義することができる。そうすると

公理 3. [加法性] 2 つの game v, w に対して

$$(A1.3) \phi[v+w] = \phi[v] + \phi[w]$$

すなわち、互いに独立な 2 つの game を重畳すると、和 game の value は、成分 game の value を player ごとに加えたものである。

この 3 つの公理から、value は一意に決定することができる。まず、3 つの lemma を証明し、それを用いて、value の公式を与える定理を証明する。

lemma 1.1. N が game v の有限な carrier とする。

$$(A1.4) \phi_i[v] = 0 \text{ for } \forall i \notin N$$

証明 $\forall i \notin N$ をとる。N も NU(i) も carrier であり、 $v(N) = v(NU(i))$ であるから、公理 2 により

$$\sum_{j \in NU(i)} \phi_j[v] = \sum_{j \in N} \phi_j[v] \text{ ゆえに } \phi_i[v] = 0$$

まず最初に特殊な対称 game (symmetric game) を考え、その game の value の公式を導いてみよう。任意な R \subseteq U, R \neq O に対して、game v_R を

$$(A1.5) v_R(S) = \begin{cases} 1 & \dots \dots \dots S \supseteq R \\ 0 & \dots \dots \dots S \not\supseteq R \end{cases}$$

によって定義する。c \geq 0 に対して、実数値集合関数 cv_R も game であり、R は i つの carrier である。

lemma 1.2. c \geq 0, 0 < r < ∞ とする。i \in N に対して game cv_R の value は次のように考えられる。

$$(A1.6) \phi_i[cv_R] = \begin{cases} c/r, & \dots \dots \dots i \in R \\ 0, & \dots \dots \dots i \notin R \end{cases}$$

証明 R \subseteq N とし一般性は失なわれない。i と j を R の中にとる。 $\pi R = R$ かつ $\pi_i = j$ のような順列 π をとる。すると、 $\pi v_R = v_R$ であるから、公理 1 により、

$$\phi_i[cv_R] = \phi_{\pi_i}[cv_R] = \phi_j[cv_R]$$

である。R は game cv_R の carrier であるから、公理 2 により、

$$\sum_{i \in R} \phi_i[cv_R] = cv_R(R) = c$$

したがって、 $r\phi_i[cv_R] = c$ となり、結局

$$\phi_i[cv_R] = c/r \text{ を得る。} \quad (Q.E.D.)$$

次に game v を対称 game v_R から合成する lemma を与える。

lemma 1.3. 有限な carrier N をもつ任意な game v は、対称 game v_R の線型結合によって表わされる。

$$(A1.7) v = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R(v) v_R$$

係数 $c_R(v)$ は v に依存し N に独立で、

$$(A1.8) c_R = \sum_{T \subseteq R} (-1)^{r-t} v(T)$$

によって与えられる。

証明 任意な S \subseteq U に対して、

$$v(S) = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R(v) v_R(S)$$

となることを証明しなければならない。

任意な S \subseteq N に対して、

$$\sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R(v) v_R(S) = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R(v) = \sum_{\substack{R \subseteq S \\ R \neq O}} \sum_{\substack{T \subseteq R \\ T \neq O}} (-1)^{r-t} v(T)$$

(和の順序の交換による)

$$= \sum_{T \subseteq S} v(T) \sum_{\substack{R \subseteq N \\ T \subseteq R}} (-1)^{r-t}$$

r の動かし方は $\binom{s-t}{r-t}$ 通りの組合せがあるから

$$= \sum_{T \subseteq S} v(T) \left[\sum_{r=t}^s (-1)^{r-t} \binom{s-t}{r-t} \right]$$

かつこの中は $s=t$ 以下の所では 0 になるから、

$$= v(S)$$

となる。一般に、S に対しては R, したがって N が v_R

の carrier であるから、

$$v(S) = v(N \cap S) = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R(v) v_R(N \cap S) = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} c_R v_R(S)$$

が成立する。

定理 1.1 有限な carrier をもつ game v に対して、公理 1-3 を満足する value function ϕ がただ 1 つ存在する。

$$\phi_i[v] = \sum_{i \in S \subseteq N} \gamma_n(s) [v(S) - v(S - \{i\})] \text{ for } \forall i \in V$$

ここに N は v の任意な carrier であり、

$$\gamma_n(s) = (s-1)!(n-s)!/n! \text{ である。}$$

証明 lemma 3 と公理 3 から $\phi_i[v] = \sum_{\substack{R \subseteq N \\ R \neq O}} \phi_i[cv_R]$

lemma 1 と 2 より

$$\phi_i[v] = \begin{cases} 0 & i \notin N \\ \sum_{\substack{R \subseteq N \\ i \in R}} c_r(v)/r & i \in N \end{cases}$$

(A1.8) を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{R \subseteq N \\ i \in R}} c_r(v)/r &= \sum_{\substack{R \subseteq N \\ i \in R}} \frac{1}{r} \left(\sum_{\substack{S \subseteq R \\ i \in S}} + \sum_{\substack{S \subseteq R \\ i \notin S}} \right) (-1)^{r-s} v(S) \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} v(S) \sum_{\substack{R \subseteq N \\ S \subseteq R}} \frac{1}{r} (-1)^{r-s} + \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} v(S) \sum_{\substack{R \subseteq N \\ S \subseteq R}} \frac{1}{r} (-1)^{r-s} \\ &= \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{n \binom{n-1}{s-1}} - \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \notin S}} \frac{v(S)}{n \binom{n-1}{s}} \end{aligned}$$

この最後の等式は

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \binom{k}{m}}{(m+s) \binom{k+s-1}{s-1}} = \frac{1}{(k+s) \binom{k+s-1}{s-1}}$$

ゆえに

$$\sum_{r=s}^n \frac{(-1)^{r-s} \binom{n-s}{r-s}}{r \binom{n-1}{r-s}} = \frac{1}{n \binom{n-1}{s-1}}$$

による。

また $\gamma_n(s) = \frac{1}{n \binom{n-1}{s-1}}$ は明らか。

(Q.E.D.)

次に Value の性質を証明抜きに系の形で述べておく。

系 1. すべての i \in U に対して $\phi_i[v] \geq v(\{i\})$

等号の成立は i がダミー (dummy), すなわち、

すべての S \ni i に対して $v(S) = v(S - \{i\}) + v(\{i\})$ のときに限る。

系 2. v が分解可能 (decomposable) ならば、すなわち、互いに素な carrier $N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(p)}$ をもつ game $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(p)}$ で $v = \sum_{k=1}^p w^{(k)}$ であるようなものが存在するならば、各 $k=1, 2, \dots, p$ に対して

$$\phi_i[v] = \phi_i[w^{(k)}] \text{ for } \forall i \in N^{(k)}$$

となる。

系 3. game v と w が戦略的に同等 (strategically equivalent), すなわち, $w = cv + \bar{a}$ ($c > 0$)

ならば

$$\phi_i[w] = c\phi_i[v] + \bar{a}(i) \text{ for } \forall i \in U$$

系 4. v が定和ゲーム, すなわち

$$v(S) + v(U-S) = v(U) \quad \forall S \subseteq U \text{ ならば}$$

$$\phi_i[v] = 2 \left[\sum_{S \subseteq N} \gamma_n(s) v(S) \right] - v(N), \quad \forall i \in N$$

ここに N は v の有限の carrier.

次に value の幾何学的な意味を調べておこう。

$$A = \{ \alpha \mid \sum_{i \in N} \alpha_i = v(N), \alpha_i \geq v(i) \}$$

と定義すると, 公理 2 と系 1 より, $\phi[v] \in A$ は明らか。 v が非本質的ならば A は 1 点集合 $\phi[v] = (v(1), \dots, v(n))$ になる。 v が本質的ならば A は $n-1$ 次元単体になる。 A の中心 (centroid) を $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ とする,

$$\theta_i[v] = v(i) + \frac{1}{n} (v(N) - \sum_{j \in N} v(j)) \quad i \in N$$

最後にいくつかの例によって value を実際に求め, さらに ϕ と θ との位置関係を示してみよう。

例 1. 2 人ゲーム, 定和 3 人ゲーム, 非本質的ゲームに対しては $\phi = \theta$ である。実際 2 人ゲームに対しては,

$$\begin{aligned} \phi_1[v] &= \frac{1}{2} [v(12) - v(2)] + \frac{1}{2} [v(1) - v(0)] \\ &= \frac{1}{2} [v(12) + v(1) - v(2)] \\ &= v(1) + \frac{1}{2} [v(12) - v(1) - v(2)] \end{aligned}$$

同様にして

$$\phi_2[v] = v(2) + \frac{1}{2} [v(12) - v(1) - v(2)]$$

である。

とくに 2 人零和ゲームならば $\phi_1[v] = v(1) = -\phi_2[v]$ が min-max 値に等しい。これは Shapley value が min-max value の一般化になっていることを示している。

参 考 文 献

- (1) Bator, F.M., "The Anatomy of Market Failure," *Quart. J. Econ.*, Aug. 1958, 72, 351-79.
- (2) Debreu, G. and H. Scarf, "A limit theorem on the core of an economy," *Intern. Econ. Rev.* 4 (1963), 235-246.
- (3) Danis, M., *Game Theory; A Nontechnical Introduction*, Basic Books, New York, 1970.
- (4) Edgeworth, F.Y., *Mathematical Psychics*, C. Kogan Paul, London, 1881.

また 3 人ゲームに対しては,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{3} (v) + \frac{1}{6} (v(12) - v(2)) + \frac{1}{6} (v(13) - v(3)) \\ &\quad + \frac{1}{3} (v(123) - v(23)) \end{aligned}$$

などが得られる。 $[0, 1]$ 正規化した一定和 3 人ゲームの特性函数の値をこの式に代入すると, $\phi_1 = 1/3$ を得, 同様に $\phi_2 = \phi_3 = 1/3$ を得る。このゲームの完全な対称性を考えると, value が先験的な評価値として確かに望ましい値となっている。

付 録 2.

特性函数の superadditivity を用いると,

$$v(s, t) - v(s - \epsilon, t) \geq v(s, 0) \text{ for } \forall \epsilon > 0$$

ゆえに, 1 次同次性を用いて,

$$\frac{v(s, t) - v(s - \epsilon, t)}{\epsilon} \geq \frac{v(\epsilon, 0)}{\epsilon} = v(1, 0) \text{ for } \forall \epsilon > 0$$

ゆえに,

$$\frac{\partial v(s, t)}{\partial s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(s, t) - v(s - \epsilon, t)}{\epsilon} \geq v(1, 0)$$

これと, $H_1(s, t) = \frac{\partial v(s, t)}{\partial s}$ 及び $D_1(s, t) = H_1(s, t) - 0(1/(s+t))$ とを用いて, $K_1(m, n) \geq v(1, 0)$ を得る。

付 録 3.

$n=3$ の単純多数決のゲームの特性函数は

$$\begin{cases} v(i) = 0 & \text{for all } i = 1, 2, 3 \\ v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 1 \\ v(1, 2, 3) = 1 \end{cases}$$

で与えられる。core は $\sum x_i \geq v(S)$ for all $S \subseteq N$ なる帰属として定義されるから, この 3 人ゲームでは

$$\begin{cases} x_i \geq 0 & i = 1, 2, 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1, & x_1 + x_3 \geq 1, & x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

なる帰属 ($x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ かつ $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$) である。第 2 式をすべて加えると $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$ を得るが, これは $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ に反する。ゆえに core が存在しないことが証明された。

- (5) Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1950.
- (6) Luce, R.D., and H. Raiffa, *Games and Decisions*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1957).
- (7) Shapley, L.S., "A value for n -person games," *Ann. Math. Study* 28 (1953), 307-317.
- (8) Shapley, L.S., *Values of Large Games, VII: A General Exchange Economy with Money*, The RAND Corporation RM-4248-PR, December, 1964.
- (9) Shapley, L.S., and M. Shubik, "Pure competition, coalitional power, and fair divisions," *Intern. Econ. Rev.* 10, No. 3 (1969).
- (10) Shubik, M., "Edgeworth market games," *Ann. Math. Study* 40 (1959), 267-278.
- (11) Shubik, M., "On Different Methods for Allocating Resources," *Kyklos*, 1970, 332-337.
- (12) von Neumann, J., and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- (13) 安田八十五, "社会経済システムの安定性—A Game-theoretic Approach" 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 秋季研究発表会アブストラクト集 pp. 63-64, 1970年11月。
- (14) 安田八十五, "社会経済システムの効率性, 安定性と平等性" 日本オペレーションズ・リサーチ学会, 春季研究発表会アブストラクト集, pp. 69-70, 1971年6月。
- (15) 安田八十五, "寡占市場の戦略的構造" 公正取引243号, 1971年1月号。
- (16) 安田八十五, "The Structure of An Edgeworth Market" 理論・計量経済学会にて報告, 1971年, 東京大学。
- (17) Yasuda, Y., "The Shrinking Process of the Core and the Occurrence of the Competitive Equilibrium of an Exchange Economy with Money" *Keio Economic Studies* Vol. VIII, No. 2, 1972.

(東京工業大学工学部社会工学科助手)