Title	コアと競争均衡
Sub Title	Core and competitive equilibrium
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1971
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.64, No.7 (1971. 7) ,p.415(1)- 424(10)
JaLC DOI	10.14991/001.19710701-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19710701-0001

コアと競争均衡

福岡　正夫

1.　ワルラス流の競争経済に登場する均衡価格は，市場での需要供給の均等化をつうじて，各個別主体の経済的行動を相互に斉合せしめる役割を担っている。他方，パレート最適の状態に対応して分離平面の法線ベクトルとして現われる均衡価格は，これを与件とする夫々の主体の適応が，当該の最適を「分権的」に達成せしめるという計画論的な性格をもつものと考えられよう。この均衡価格の第二の概念は，最適プログラムの「競争的解法」を示唆する点できわめて重要な含蓄を含むものであるが，他面それが有効であるためには所得や資産の一括的再分配の可能性が前提とされねばならず，歴史的に所与の分配関係を継承する私有制経済の見地からすれば，かならずしもその競争均衡の真の性質を剔出したものとはいい難いであろう。一般に分配の態様に対して中立的なパレート最適の概念は，元来が私的な経済均衡の特性記述としては広汎にすぎるといわねばならないのである。

そこでこうした厚生の見地からは一応別個に，ゲーム論的な見地から競争均衡価格の特性を見直そうとする，いわば第三の見方とでもいうべきものが最近の理論の展開コースのなかで脚光を浴びている。謂うところの「コア」("core") の概念との関連で均衡価格を意味づけようとする新しい考え方がそれである。いま各主体への資産の分配が当初から特定化されている私有経済を考え，それらの主体が「協力的」に行動すること，すなわち任意数の主体のあいだで「結託」をむすぶことも認められていると想定しよう。このようなゲーム論的な性格を具えた経済において，もし「均衡」が成立するとすれば，それはその成員の何人が結託して財数量を分けなおしたとしても，もはやその結託内の他の成員の地位を損わずには，どの成員の地位をも高めることができない極限状態である，と考えられよう。よく知られているように，一般にはそのような均衡は競争価格のメカニズムをつうじて達成されるとはかぎらず，「価格」の機構は直接取引をも含む数多くの交換形態の一つにすぎないものである。ところがいま取引に参加する主体の数が次第に増加し，遂にはそれが無限大に近づくとすればどうであろうか。その場合には，おそらく各当事者の全体に占める比重はゼロに近づき，その影響力はほとんど無視しうるにいたるであろうから，直観的には競争均衡の状態の

みが唯一可能な配分状態になると考えられる。すなわち競争均衡価格のメカニズムはそのような極限状態においてのみ特権的な意義を獲得しうるのである。

周知のごとく，この推測にはじめて分析的な表現を与えたのはエッジワースである。彼はその主著[(1)]において，2財の一定初期量をもつ2人の個人が再契約による交換過程をつうじて「契約曲線」上の均衡状態（"final settlements"）を達成すること，しかしその均衡の集合には「幅」があり，競争均衡はそのなかの一つの状態にすぎないこと，ところがそれらの2個人と選好も初期保有量もそれぞれ同一の個人からなる2集団の人数を次第に並行して増やしていけば，当該の均衡の集合は次第に「収縮」して，ついにその人数が無限大となる極限においてはそれは競争均衡のみに絞られること，などをボックス図形を用いて明らかにした。

このエッジワースの「極限定理」は，その後約80年の間隔をおいて1960年代にいたり，スカーフやドゥブリューなど一部の数理経済学者の注目するところとなり，彼らの手をつうじて現代的手法に立脚した厳密な証明を与えられることになった。このようなルネッサンスは n 人ゲームでのコアの概念の誕生と，移転可能な効用概念の回避とを俟ってはじめて可能になった動きであるが，それらを背景として，エッジワースの議論を，財の種類も当事者の型も任意個数の一般の場合に最初に拡張した功績はスカーフに帰せられる[(2)]。そしてこれに対しては，さらに仮定を単純化かつ緩和することを提唱したドゥブリューの貢献があり[(3)]，これらの研究は合流し改善されて著名な共同論文となって実を結んでいる[(4)]。

ところでスカーフ＝ドゥブリューは，エッジワースに忠実に，当事者の型を終始一定有限個と想定し，それに属するそれぞれ同型の個人の数のみを“反復”して増やしていく構想をとっているが，今日のコアの問題のとり扱いには，アウマンらによって代表される，もう一つのまったく違ったアプローチがあることに注目しなくてはならない。測度空間を導入して，当事者の集合を連続体の濃度をもった無限集合と考える立場がこれである[(5)]。この立場においては，当事者の集合はあたかも線分上のすべての点の集合であるかのように考えられ，各個の当事者が何らの影響力をもたないという条件は，当該の集合が“atomless”であるという仮定によってあらわされる。そしてそのような意味で当事者の数が当初から無限大となっている経済モデルについて，コアと競争均衡の集合とが必然的に一致するという主張が証明されるのである。

アウマン型のこのアプローチは，すべての当事者が相異なる選好と相異なる初期保有量とをもち

注（1） F.Y. Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881.
（2） H. Scarf, "An Analysis of Markets with a Large Number of Participants", *Recent Advances in Game Theory* (The Princeton University Conference), 1962.
（3） G. Debreu, "On a Theorem of Scarf", *Review of Economic Studies*, October, 1963.
（4） G. Debreu and H. Scarf, "A Limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review*, September 1963.
（5） R.J. Aumann, "Market with a Continuum of Traders", *Econometrica*, January-April 1964.

うることを認めている点で，したがって一定個数の当事者の「型」という想定を不要ならしめている点で，スカーフ＝ドゥブリュー型の接近法より，たしかに一そう一般的である。しかし本稿では，つぎに述べる二つの理由から，前者の型の接近法は採用せず，もっぱら各当事者を discrete にとり扱う接近方法で終始するであろう。それは一つには，たんに本稿では前稿[(6)]で用いた経済モデルをそのまま基本的に踏襲したいからであり，またもう一つには，当事者の集合を連続体と考えなくても，なおその型を一定個数と仮定することなく，コアの配分と競争均衡の配分との距離を押えようとする研究が，さいきんの尖端的動向のなかに現われつつあるからである。

そこでそのような discrete な型のモデルに限定して，コアと競争均衡の状態との関連を考察し，そのことをつうじて競争均衡価格の新しい含意を明らかにしようとするのが，本稿の主要な目的である。但し前のパラグラフで言及した新動向に関しては，やがて稿をあらためて別個の形でとり扱うことにしたい。

2.　経済モデルの記述についてはまったく前稿どおり[(1)]であって，格別に付加することはないが，とくに本稿の読者のために記号を再記すれば，つぎのとおりである。当該の経済は n 種類の財，m 人の消費者，l 人の生産者から成っており，第 r 番目の消費者の消費ベクトルと可能な消費ベクトルの集合はそれぞれ x^r, X^r で，また第 s 番目の生産者の生産ベクトルと可能な生産ベクトルの集合はそれぞれ y^s, Y^s であらわされる。消費者の選好は各自の X^r について定義され，x^r が $x^{r\prime}$ より選好される場合は $x^rP^rx^{r\prime}$，両者が無差別な場合は $x^rI^rx^{r\prime}$，そのいずれかである場合は $x^rR^rx^{r\prime}$ のように記す。以下では分配が特定化された私有制経済を考えるから，各消費者は資源の初期保有量のベクトル $\bar{x}^r$ を与えられており，また各生産者から θ_{rs} の割合の利潤の配当を受けると仮定する。ここで $\theta_{rs} \geqq 0$, $\sum_{r=1}^{m} \theta_{rs} = 1$ であって，各生産者の利潤はかならずすべての消費者に配当されつくすものとする。

このような経済についてコアの概念を定義する場合，問題となるのは，生産のとり扱いをどうするかである。スカーフとドゥブリューは彼らの単独の論文ではいずれも純粋の交換経済を対象とし，生産の問題を無視している。またその共同論文では生産の問題をとりあげてはいるが，全経済の生産可能性集合 $Y (=\sum_{s=1}^{l} Y^s)$ を，原点を頂点とする凸錐体の形で導入するにとどまり，制度的に特定化された利潤の分け前が帰結に影響してくる可能性を考慮していない。全経済の生産可能集合を凸錐体に転換すること自体はある種の解釈の下では認めうるところであるが[(2)]，コアの問題の場合，消費者がどんな結託をむすんでも，つねに同一の生産可能性を支配しうると考えるのは，いささか興味に乏しいであろう。

注（6） 福岡正夫「競争均衡の存在」，『経済学年報』1970年および同「パレート最適と競争均衡」，『三田学会雑誌』1971年6月号。
（1） 注（6）参照。
（2） 福岡「競争均衡の存在」，pp. 36-38 以下参照。

そこでこの点については本稿ではレーダー[3]の示唆を活かした二階堂[4]の貢献にしたがい，θ_{rs} がたんに利潤の分配を規定するばかりでなく，また所有者による生産支配力の分配をも定めていると考えることにしよう。すなわち第 r 消費者は第 s 生産者の生産可能集合 Y^s の $\theta_{rs}Y^s$ の部分を所有し，それにもとづいてその部分を支配しうると考えるのである。結局利潤の配当は，この種の経済では企業の所有＝支配にもとづいて行なわれると考えられるから，上記の解釈は一応素直に承認できるであろう。そこで $\theta_{rs}Y^s$ を s について合計して，

$$(1)\qquad C^r=\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s$$

とおくとすれば，C^r が消費者 r の支配できる生産可能集合をあらわすことになり，他方また $\theta_{rs}Y^s$ を r について合計し $\sum_{r=1}^{m}\theta_{rs}=1$ であることを考慮すれば，Y^s が $\theta_{rs}>0$ のようなすべての消費者によって完全に所有＝支配されることが知られるのである。

これらの準備ののちには，この私有経済のコアの概念を正確に定義することができよう。消費者の結託をすべての消費者の集合 $M=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$ のある部分集合 S と定義すれば，コアとは，消費者がどんな結託 S をつくって，そこでの生産可能集合 $(\sum_{r\epsilon S}C^r)$ と初期保有量 $(\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r)$ とが許す再配分を行なっても，S 内の他の消費者の選好を損わずには，同じ S 内のどの消費者の選好をも向上させうる余地のない，極限的な配分の集合のことである。換言すれば，ある配分 $((x^{r*}), (y^{s*}))$ がコアに含まれるとすれば，何人の成員から成る S をつくって事態の変更を企てたとしても，

$$\sum_{r\epsilon S}x^r\leqq\sum_{r\epsilon S}c^r+\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r,\ \ x^r\epsilon X^r,\ \ c^r\epsilon C^r\equiv\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s$$

で，かつ

すべての $r\epsilon S$ について $x^rR^rx^{r*}$

少くとも一つの $r\epsilon S$ について $x^rP^rx^{r*}$

となるようにすることはもはや不可能なのである。その意味でコアとは，いかなる結託 S によっても “block” されえない配分の集合にほかならないといいうるであろう。

以上の定義から明らかなように，コアの概念はパレート最適の概念より，はるかにきつい概念である。いうまでもなく，コアに属する配分はパレート最適の配分になっている。なぜなら，どんな S によっても block されえない配分であれば，全消費者の集合 M によっても block されえないことは自明だからである。しかし逆に M によって block されなくても，それより小さい S によって block されること（つまり S に含まれない消費者の犠牲において S に含まれる消費者の一部がよりよくなること）はいくらでもありうるから，パレート最適の配分がコアに含まれねばならない必然性はまったくない。

注(3) J.T. Rader, "Edgeworth Exchange and General Economic Equilibrium", *Yale Economic Essays*, Vol. 4, No. 1, 1964, とくに p. 161 および pp. 175-176.
(4) H. Nikaido, *Convex Structures and Economic Theory*, 1968, pp. 283-296.

3. さてコアと競争均衡との関連については，まず前稿[1]で「競争均衡がパレート最適になる」ことを証明したのと類似の仕方で，「競争均衡がコアの配分になる」ことを証明することができる。

定　理

仮　定

C 3″　任意の $x^{r\prime}\epsilon X^r$ のどんな近傍 $V^r(x^{r\prime})$ にも $x^r\epsilon X^r\cap V^r(x^{r\prime})$ でかつ $x^rP^rx^{r\prime}$ となるような x^r が存在する

を満たす経済の競争均衡点を $((x^{r*}), (y^{s*}), p^*)$ とすれば，$((x^{r*}), (y^{s*}))$ はコアに含まれる。

証　明

いま $((x^{r*}), (y^{s*}))$ がコアには含まれなかったとしてみよう。するとコアの定義から $((x^{r*}), (y^{s*}))$ はかならずある結託 S によって block されねばならないから，その S については

$$(2)\qquad \sum_{r\epsilon S}x^{r\prime}\leqq\sum_{r\epsilon S}c^{r\prime}+\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r,\quad x^{r\prime}\epsilon X^r,\quad c^{r\prime}\epsilon C^r$$

で，しかも

すべての $r\epsilon S$ について　$x^{r\prime}R^rx^{r*}$

少くとも一つの $r\epsilon S$ について　$x^{r\prime}P^rx^{r*}$

となるような $((x^{r\prime}), (c^{r\prime}))_{r\in S}$ が見出されることになる。すると前稿の証明とまったく同様の推論で，$x^{r\prime}R^rx^{r*}$ のような $r\epsilon S$ については

$$p^*\cdot x^{r\prime}\geqq p^*\cdot\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}p^*\cdot y^{s*}$$

が成立ち，$x^{r\prime}P^rx^{r*}$ のような $r\epsilon S$ については

$$p^*\cdot x^{r\prime}>p^*\cdot\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}p^*\cdot y^{s*}$$

が成立つから，これらを $r\epsilon S$ の r について辺々加えることによって，すべての $y^s\epsilon Y^s$ について

$$(3)\qquad p^*\cdot\sum_{r\epsilon S}x^{r\prime}>p^*\cdot\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r+\sum_{r\epsilon S}\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}p^*\cdot y^{s*}\geqq p^*\cdot\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r+\sum_{r\epsilon S}\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}p^*\cdot y^s$$

を得る。

ところが $c^{r\prime}\epsilon C^r$，$C^r=\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s$ から，$c^{r\prime}=\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^{rs\prime}$，$y^{rs\prime}\epsilon Y^s$ のように書けるから，これを(3)に代入することによって

$$(4)\qquad p^*\cdot(\sum_{r\epsilon S}x^{r\prime}-\sum_{r\epsilon S}c^{r\prime}-\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r)>0$$

となる。

他方 $p^*\geqq0$ であるところから，(2)から

$$(5)\qquad p^*\cdot(\sum_{r\epsilon S}x^{r\prime}-\sum_{r\epsilon S}c^{r\prime}-\sum_{r\epsilon S}\bar{x}^r)\leqq0$$

となり，これは(4)と矛盾する。

注(1) 福岡「パレート最適と競争均衡」pp. 4-5

依って $((x^{r*}), (y^{s*}))$ はコアに含まれるのでなくてはならない。Q.E.D.

この定理は，証明は簡単であるが，二つの重要な帰結を伴っている。その一つは，この主張によって競争均衡点が，たんなるパレート最適以上のものであることが明確にされている点である。すなわち競争均衡は，全消費者によって block されえないばかりでなく，彼らのいかなる結託によっても block されえないのである。つぎにもう一つの帰結は，この定理からコアがいかなる条件の下で非空となるかが判明することである。競争均衡がどのような条件の下で存在するかは，今日ではもはやよく知られているところである。そこでそれらとまったく同じ条件が満たされていさえすれば，コアの存在もまた保証されうるのである。

4. ここで本題であるコアから競争均衡へという方向の議論に移る。「競争均衡がコアの配分になる」ことは前述のごとくであるとしても，それの逆命題「コアの配分が競争均衡になる」は一般にはかならずしも真ではない。しかし序論で触れたように，主体の数を特定の仕方で増やしていき，ついにはそれを無限大に近づけるならば，その極限においてはこの逆命題が成立するのである。以下本節ではこの主要な命題の究明に専念することにしたいと思う。

そのためには，まず主体の数の増やし方ないしは経済の拡げ方について説明を加えておかねばならない。以下の議論ではまず m 通りの型の消費者，l 通りの型の生産者がいると考え，さらにそれぞれの型には消費者の場合も生産者の場合も ν 人ずつの人数がいると考える。そしてこの m, l という型の数は一定としておき，それらに属する ν という人数を一律に増やしていくと考えるのである。

上述の型の内容は，消費者の場合は消費可能集合 X^r，選好順序 R^r，初期保有量 $\bar{x}^r$ で，生産者の場合は生産可能集合 Y^s で規定されている。それゆえ上記の意味でそれぞれの型の人数を ν 人にするのは，畢竟「本来」の経済を ν 回「反復」("repeat") することによって拡大された経済を考えるのにひとしいであろう。いま便宜上，もとの経済を E，そのように拡大された経済を $E^\nu=\{E^{(1)}, E^{(2)}, \cdots\cdots, E^{(\nu)}\}$ で示せば，E とそれぞれの $E^{(q)}$ $(q=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$ とはまったく同一の与件構造をもち，それぞれ m 通りかつ m 人の消費者，l 通りかつ l 人の生産者から成っているが，これに対して拡大された経済 E^ν のほうは m 通りかつ $m\nu$ 人の消費者，l 通りかつ $l\nu$ 人の生産者から成っているわけである。それぞれの $E^{(q)}$ に含まれる消費者や生産者は一対の添字 (r, q) および (s, q) で識別するのが便利であり，そうすれば上記の構成から

$$X^{r(q)}=X^r,\quad R^{r(q)}=R^r,\quad \bar{x}^{r(q)}=\bar{x}^r \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots, m;\ q=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$$

$$Y^{s(q)}=Y^s \qquad (s=1, 2, \cdots\cdots, l;\ q=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$$

で，また

$$\theta_{r(q)s(q')}=\begin{cases}\theta_{rs} & (q=q')\\ 0 & (q\neq q')\end{cases} \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots, m;\ s=1, 2, \cdots\cdots, l;\ q, q'=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$$

ということになる。さらに $E^{(q)}$ における配分を $((x^{r(q)}), (y^{s(q)}))$ のように記せば，E^ν での配分は系列 $\{(x^{r(q)}), (y^{s(q)})\}_{q=1}^{\nu}\equiv\{((x^{r(1)}, y^{s(1)})), ((x^{r(2)}), (y^{s(2)})), \cdots\cdots, ((x^{r(\nu)}), (y^{s(\nu)}))\}$ で記され，いうまでもなく

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)}\leqq\sum_{s=1}^{m}\sum_{q=1}^{\nu}y^{s(q)}+\nu\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r$$

$$x^{r(q)}\in X^r,\quad y^{s(q)}\in Y^s$$

が満たされれば，その配分は達成可能である。

さてここで ν を ∞ としたときのある配分の無限系列 $\{(x^{r(q)*}), (y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\infty}$ を考え，それに含まれる $\{(x^{r(q)*}), (y^{s(q)})*\}_{q=1}^{\nu}$ が $\nu=1, 2, \cdots\cdots$, ad infのすべての ν についてそれぞれ E^ν のコアの配分になっていたとする。そのときには $((x^{r(q)*}), (y^{s(q)*}), p^*)$ がいずれも E の競争均衡点となるような価格 p^* がかならず存在するということを示すのが，以下での議論の眼目である。

主要な定理を述べるまえに，ひとつの補助定理を証明しておくのが便利であろう。

補助定理

仮定

C1 X^r は凸集合

C2 どんな $x^{r'}\in X^r$ に対しても $\{x^r\in X^r | x^r R^r x^{r'}\}$ は X^r のなかで閉じている

C4 もし $x^r P^r x^{r'}$ なら，任意の実数 $0<\alpha<1$ について $\alpha x^r+(1-\alpha)x^{r'}P^r x^{r'}$

が満たされているとする。そのとき $\{(x^{r(q)*}), (y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\nu}$ を E^ν のコアに含まれる配分であるとすれば，どの r についても

$$x^{r(q)*}I^r x^{r(q')*} \qquad (q, q'=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$$

となる。すなわち同じ型の消費者の消費は互いに無差別となる。(1)

証明

それぞれの消費者の型 r について，$\{x^{r(q)*}\}$ $(q=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$ のなかでもっとも選好されない消費を $x^{r(q_r)*}$ としよう。すると定義から

$$x^{r(q)*}R^r x^{r(q_r)*} \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots, m;\ q=1, 2, \cdots\cdots, \nu)$$

であるから，C2, C4 を用いて

$$(6)\qquad \frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)*}R^r x^{r(q_r)*} \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots, m)$$

となる。さらに，もし定理の主張に反して，ある r たとえば r' と，ある q について $x^{r(q)*}P^r x^{r(q_r)*}$ になったとすると，その r' については C4 から

$$(7)\qquad \frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r'(q)*}P^{r'}x^{r'(q_{r'})*}$$

とならねばならない。(2) ところがいま E^ν のなかで $S=\{1, q_1), (2, q_2), \cdots\cdots, (m, q_m)\}$ という結託をつ

注(1) スカーフ=ドゥブリューのように C4 を強い意味での凸性の仮定にすれば，定理の結論は $x^{r(q)*}=x^{r(q')*}$ となる。Debreu-Scarf, *op. cit.*, p. 241, Theorem 2 参照。

くってみると，Sはそれぞれの消費者の型からちょうど1人ずつの消費者をあつめてつくってあるから，明らかに $\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r$ の初期保有量を左右することができ，また $\sum_{r=1}^{m}C^r$ の生産可能集合を自由にできるところから，$\sum_{s=1}^{l}Y^s$ の生産可能集合をも支配できることが分る[(3)]。しかも，

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)*}\leqq\sum_{s=1}^{l}\sum_{q=1}^{\nu}y^{s(q)*}+\nu\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r$$

であるから，当然

$$(8)\qquad \sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)*}\right)\leqq\sum_{s=1}^{l}\left(\frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}y^{s(q)*}\right)+\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r$$

となり，また X^r，Y^s の凸性から

$$(9)\qquad \frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)*}\epsilon X^r,\qquad \frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}y^{s(q)*}\epsilon Y^s$$

となるから，(8)，(9)から

$$\left(\left(\frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}x^{r(q)*}\right),\ \left(\frac{1}{\nu}\sum_{q=1}^{\nu}y^{s(q)*}\right)\right)$$

はEでの達成可能な配分であることが分り，したがって前述の帰結と併せて，それは結託Sが達成しうる配分となる。ゆえに(6)，(7)から $\{(x^{r(q)*}),\ (y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\nu}$ はSによって block されることになり，これはそれが E^ν のコアの配分であるという想定に反する。　Q. E. D.

以上の準備にもとづいて，本稿の基本定理にとり組もう。

定　理　（エッジワースの極限定理）

補助定理の仮定に加えて，さらに仮定

C3　X^r は飽和点をもたない

C6　$\bar{x}^r\epsilon\,\mathrm{int}\,X^r$

P1　$0\epsilon Y^s$

が満たされているとする。そのとき $E^{(q)}$ での配分 $((x^{r(q)*}),\ (y^{s(q)*}))$ $(q=1,2,\cdots\cdots)$ から成るある無限系列 $\{(x^{r(q)*}),(y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\infty}$ において，もし $\{(x^{r(q)*}),\ (y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\nu}$ が $\nu=1,2,\cdots\cdots$，ad inf のすべてについて E^ν のコアの配分になっているとすれば，$((x^{r(q)*}),(y^{s(q)*}),p^*)$ のいずれをもEの競争均衡ならしめるような非負の価格 $p\geq0$ が存在する。

証　明

前稿の記号を踏襲して，$X^{r\cdot x^{r(q)*}}\equiv\{x^r\epsilon X^r|x^rR^rx^{r(q)*}\}$，$\mathring{X}^{r\cdot x^{r(q)*}}\equiv\{x^r\epsilon X^r|x^rP^rx^{r(q)*}\}$ と定義する。ところが補助定理の結論から $x^{r(q)*}I^rx^{r(q')*}$ $(q,\ q'=1,2,\cdots\cdots,\nu)$ であるから，結局 $X^{r\cdot x^{r(q)*}}$，$\mathring{X}^{r\cdot x^{r(q)*}}$

注（2）注(1)に摘記したように，スカーフ＝ドゥブリューの場合は，$x^{r(q)*}I^rx^{r(qr)*}$ でも $x^{r(q)*}\neq x^{r(qr)*}$ なら，強い意味での選好の凸性が使えて(7)が導かれるのである。

（3）定義から，$C^r=\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s$，また $\sum_{r=1}^{m}\theta_{rs}=1$ であるところから，

$$\sum_{r=1}^{m}C^r=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s=\sum_{s=1}^{l}\left(\sum_{r=1}^{m}\theta_{rs}\right)Y^s=\sum_{s=1}^{l}Y^s$$

はどのqについても同じ集合となり，したがって以下ではqの添字を省いてそれぞれ $X^{r\cdot x^{r*}}$，$\mathring{X}^{r\cdot x^{r*}}$ と記す。さて $\mathring{\Gamma}^r\equiv\mathring{X}^{r\cdot x^{r*}}-C^r-\{\bar{x}^r\}$ と定義し，Γ を $\bigcup_{r=1}^{m}\mathring{\Gamma}^r$ の凸包とする。$C^r=\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}Y^s$ であることを想起すれば，$\mathring{\Gamma}^r$ は $\mathring{X}^{r\cdot x^{r*}}$，$Y^s$，$\{\bar{x}^r\}$ の1次結合であるから，仮定から凸集合となり，したがってΓは

$$(10)\qquad v=\sum_{r=1}^{m}\alpha_rv^r,\quad \alpha_r\geqq0,\quad \sum_{r=1}^{m}\alpha_r=1,\quad v^r\epsilon\mathring{\Gamma}^r$$

のように書けるあらゆるベクトルvの集合となっている。

そのΓと負の象限とを分離する超平面があることを確立するのが，推論の急所である。事実もしΓが負のベクトルを含んでいるとすれば，それは上記の(10)の形に書けるはずであるから，$\mathring{\Gamma}^r$ の定義から，ある $x^r\epsilon\mathring{X}^{r\cdot x^{r*}}$，$c^r\epsilon C^r$，$\alpha_r\geqq0$，$\sum_{r=1}^{m}\alpha_r=1$ に対して

$$(11)\qquad \sum_{r=1}^{m}\alpha_r(x^r-c^r-\bar{x}^r)<0$$

とならねばならないはずである。ところが α_r は，ν_r を正の整数とするとき，$\nu_r/\sum_{t=1}^{m}\nu_t$ という形の正の有理数でいくらでも近似できるから，(11)の α_r をそれに置きかえても，なお

$$(12)\qquad \sum_{r=1}^{m}\nu_rx^r\leqq\sum_{r=1}^{m}\nu_rc^r+\sum_{r=1}^{m}\nu_r\bar{x}^r$$

を成立たしめることができる。そこで $\sum_{r=1}^{m}\nu_r=\nu$ として，1からνまでの正の整数の集合を互いに重複しないm個の非空の部分集合に分け，それらがそれぞれ $\nu_1,\nu_2,\cdots\cdots,\nu_m$ 個の元を含むとする。そして E^ν のなかで，それぞれr型の消費者が ν_r 人ずつ含まれるような結託Sを考えれば，Sは $\sum_{r=1}^{m}\nu_r\bar{x}^r$ の初期保有量をもち，また $\sum_{r\in S}C^r$ が $\sum_{r=1}^{m}\nu_rC^r$ を含むこともSの構成から明らかである。ゆえに(12)から，この結託内ではr型の消費者にそれぞれx^rを配分することができるわけであり，しかも $x^r\epsilon\mathring{X}^{r\cdot x^{r*}}$ であるから，

$$x^rP^rx^{r(q)*},\quad (r,\ q)\epsilon S$$

であって，Sは $\{(x^{r(q)*}),\ (y^{s(q)*})\}_{q=1}^{\nu}$ を block する。これは後者が E^ν のコアに含まれるという仮定に反し，依ってΓは負のベクトルを含まないことが証明された。

そこでよく知られた分離定理により，凸集合Γと負象限とを分離する超平面Hがあり，Γに含まれるすべての点vに対して

$$(13)\qquad p^*\cdot v\geqq0,\quad p^*\geqq0$$

とすることができる。ところでΓは $\mathring{\Gamma}^r$ を含むから，当然すべての $v\epsilon\mathring{\Gamma}^r$ に対しても $p^*\cdot v\geqq0$ が成立ち，また前稿のパレート最適の定理の場合とまったく同じ方法で，これはすべての $v\epsilon\Gamma^r\equiv X^{r\cdot x^{r*}}-C^r-\{\bar{x}^r\}$ に対しても拡張できる。ゆえに結局すべての $x^r\epsilon X^{r\cdot x^{r*}}$，すべての $y^s\epsilon Y^s$ に対して

$$(14)\qquad p^*\cdot x^r\geqq p^*\cdot\bar{x}^r+p^*\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^s$$

が成立つことになる。

さて $x^{r(q)*}\epsilon X^{r\cdot x^{r*}}=X^{r\cdot x^{r(q)*}}$, $y^{s(q)*}\epsilon Y^s$ であるから，(14)の x^r, y^s にそれぞれ $x^{r(q)*}$, $y^{s(q)*}$ を代入すれば，

$$(15)\qquad p^*\cdot x^{r(q)*}\geqq p^*\cdot\bar{x}^r+p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^{s(q)*}$$

ゆえにこれを r について合計すれば

$$(16)\qquad p^*\cdot\sum_{r=1}^{m}x^{r(q)*}\geqq p^*\cdot\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r+p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}y^{s(q)*}$$

を得る。ところが

$$(17)\qquad \sum_{r=1}^{m}x^{r(q)*}\leqq\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r+\sum_{s=1}^{l}y^{s(q)*}$$

であり，また $p^*\geqq 0$ であるから，(16)の左辺は右辺より大きくなることはできず，結局

$$(18)\qquad p^*\cdot\sum_{r=1}^{m}x^{r(q)*}=p^*\cdot\sum_{r=1}^{m}\bar{x}^r+p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}y^{s(q)*}$$

が成立つ。したがって(15)もまた等式で成立たねばならず

$$(19)\qquad p^*\cdot x^{r(q)*}=p^*\cdot\bar{x}^r+p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^{s(q)*},$$

依って(14)と(19)から $y^s\epsilon Y^s$ のようなすべての y^s に対して

$$(20)\qquad p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^{s(q)*}\geqq p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^s$$

となり，$x^r\epsilon X^{r\cdot x^{r(q)*}}$ のようなすべての x^r に対して

$$(21)\qquad p^*\cdot x^{r(q)*}\leqq p^*\cdot x^r$$

となる。

(20)を r について合計すれば，すべての $y\epsilon Y$ に対して $p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}y^{s(q)*}\geqq p^*\cdot y$ となるから，それを s についてふたたび分解すれば，すべての $y^s\epsilon Y^s$ に対して $p^*\cdot y^{s(q)*}\geqq p^*\cdot y^s$ となり，依って $y^{s(q)*}$ は $s=1, 2, \cdots\cdots, l$, $q=1, 2, \cdots\cdots$, ad inf のそれぞれについて Y^s のなかで $p^*\cdot y^s$ を最大ならしめていることが分る。

つぎに(21)から $x^{r(q)*}$ は $X^{r\cdot x^{r(q)*}}$ のなかで $p^*\cdot x^r$ を最小ならしめているが，仮定の C6, P1 から $p^*\cdot x^r<p^*\bar{x}^r\leqq p^*\cdot\bar{x}^r+p^*\cdot\sum_{s=1}^{l}\theta_{rs}y^{s(q)*}$ のような x^r が X^r に含まれるから，アローの反例の事態は回避でき，$x^{r(q)*}$ は $r=1, 2, \cdots\cdots, m$, $q=1, 2, \cdots\cdots$, ad inf のそれぞれについて，所得の制約に服しつつ X^r のなかでもっとも選好される元となっている。

最後に(17)，(18)から $q=1, 2, \cdots\cdots$, ad inf のそれぞれについて市場均衡の条件が満たされることも明らかである。

ゆえに $((x^{r(q)*}), (y^{s(q)*}), p^*)$ は E の競争均衡点となっていることが判明した。

「生産と消費の矛盾」と産業循環 (2)

井 村 喜 代 子

第3章 恐 慌

第2章では，好況局面の特徴が，新投資に主導されつつ，「I部門の不均等的拡大」という内容をもって，社会的総資本が急激な拡大再生産を展開するところにあることを明らかとした。

第3章の課題は，この好況の進展過程で，恐慌となって爆発する矛盾が累積・成熟していく機構とその過程を考察することを通じて恐慌の原因を明らかとすること (第1節) と，恐慌の爆発過程の解明を通じて恐慌の機能を明らかにすること (第2節) である。