Title	価格調節関数と存在定理：一つの注解
Sub Title	The existence theorem and the price adjustment functions
Author	福岡, 正夫 宇佐美, 泰生
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1971
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.64, No.4 (1971. 4) ,p.137(1)- 143(7)
JaLC DOI	10.14991/001.19710401-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19710401-0001

価格調節関数と存在定理

——一つの注解——

福岡　正夫
宇佐美　泰生

1.　かつて東京大学経済学部の機関誌『経済学論集』（古谷弘教授追悼号）に寄稿した論文[1]において，筆者の一人はいわゆる価格調節関数のさまざまなタイプのものを考察し，それらが競争均衡の存在証明において果す役割について検討する機会をもった。

いま n 種類の財の社会的超過需要量を $z=(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n)$，それらの価格を $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$ のように記し，超過需要関数を $E(p)=(E_1(p), E_2(p), \cdots\cdots, E_n(p))$ のように記す。価格は価格シンプレックス・$P=\{p|p_i\geqq 0, \sum_{i=1}^{n}p_i=1\}$ の上で規準化されたものを考え，超過需要 z の集合 Z は非空，コンパクトかつ凸で，超過需要関数 $E(p)$ は P の各点に Z の非空，閉かつ凸の部分集合を対応させる上部半連続な写像であるとする。すると上記の論文でとり扱った価格調節関数の一つの型は

$$(1)\qquad p_i'=\frac{p_i+\max(kz_i,\ 0)}{\sum_{j=1}^{n}[p_j+\max(kz_j,\ 0)]}\qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

のように記され，これと交替的なもう一つの型は

$$(2)\qquad p_i'=\frac{\max(p_i+kz_i,\ 0)}{\sum_{j=1}^{n}[\max(p_j+kz_j,\ 0)]}\qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

のように記される[2]。いずれにおいても max(　) の項は，括弧のなかのより大きな数値のほうがその項の数値を定めるという約束であり，分母で割っているのは，いうまでもなく調節後の価格をふたたびシンプレックスに属さしめるための措置である。（1）の右辺の分子は，第 i 財に超過需要があるならば $(z_i>0)$，当初の価格 p_i はその超過需要に比例した大きさだけ（k は正の比例定数）引上げられること，また超過供給があるならば $(z_i<0)$，p_i はそのまま据置かれることを意味してお

注（1）　福岡正夫「均衡点存在問題の一考察」，『経済学論集』第26巻3・4合併号（1959年6月）。

（2）　（1）は H. W. Kuhn, "A Note on the Law of Supply and Demand," *Mathematica Scandinavica*, 3, 1955, p. 144 および H. Nikaido, "A Technical Note on the Existence Proof for Competitive Equilibrium", *Discussion Paper*, No. 12, ISER, Osaka University, November 1958, p. 2 において用いられた。但しこの型の関数をはじめて示唆したのは Nash である。他方（2）はかつて Samuelson が筆者の一人との私的な議論をつうじて示したことがあり，また H. Uzawa, "A Note on the Stability of Equilibrium", *Technical Report* No. 44, Stanford University, June 1957, p. 3 においても用いられている。

り，これに対して(2)の右辺の分子は，超過供給がある場合でも，p_iがともかくゼロ水準に達するまではその超過供給に比例して引下げられることを認めている[(3)]。

ところでこれらの超過需要関数 $E(p)$ と価格調節関数 $Q(p, z)$ とにもとづき，議論を展開する場合の写像のつくり方についても，相異なる二通りのものが考えられ，その一つはPとZとの直積集合 $P \times Z$ から同じく $P \times Z$ への写像として問題を構成するアプローチ，他の一つはPからPへの写像として問題を構成するアプローチである[(4)]。前者による場合は，まずある価格 $p \in P$ とある超過需要 $z \in Z$ とが並列的に与えられ，そのpとzとを(1)あるいは(2)のような価格調節関数$Q(p, z)$ に挿入して新しい価格 p' が定まると同時に，当初のpを超過需要関数 $E(p)$ に導入して新しい超過需要 z' の集合が定まる，という仕組みになっている。これに対して後者では，まずある価格 $p \in P$ が与えられると，そのpに応ずる超過需要関数 $E(p)$ の像としてzの集合が定まり，当初のpとそのようにして定まったzの集合に属するそれぞれのzとを用いて，(1)なり(2)なりの価格調節関数 $Q(p, z)$ を経由した新しい価格 p' の集合が定まる，と考えられる。この $P \to P$ 方式が前者 $(P \times Z) \to (P \times Z)$ 方式と異なる一つの点は，$P \to P$ 方式では価格調節関数に登場するzがかならず所与のpに対して超過需要関数 $E(p)$ を満たす（したがってワルラス法則 $p \cdot E(p)=0$ を満たす）zであるのに対して，$(P \times Z) \to (P \times Z)$ 方式の場合は，かならずしもそうではないことである。換言すれば $P \to P$ 方式では，zはつねに $E(p)$ の上にのっており，その意味で背後に潜められている主体的均衡を達成しているのに対して，$(P \times Z) \to (P \times Z)$ 方式では，むしろ主体的均衡の充足は，存在が証明されるはずの競争的市場均衡の充足とともに保証されればよいことになっているのである。

さて上記の(1)，(2)の価格調節関数と $(P \times Z) \to (P \times Z)$，$P \to P$ の二つの写像方式とを組合わせれば，結局

(a)　(1)と $(P \times Z) \to (P \times Z)$ 方式

(b)　(2)と $(P \times Z) \to (P \times Z)$ 方式

(c)　(1)と $P \to P$ 方式

(d)　(2)と $P \to P$ 方式

の都合四つのアプローチの可能性が生れることになる。それらのうち(a)を選んで角谷の不動点定理を用いるアプローチは，今日二階堂その他の業績をつうじてすでに確立しているところであり，これについてここで言葉を重ねる必要はない。これに対して(c)のルートを選び，アイレンベルグ＝モントゴメリーの不動点定理を用いることによって問題を解決しようとしたのはクーンであり，またクーンと平行して(d)による接近を試みたのは宇沢である。ところが後者の叙述では，$E(p)$ に対する価格調節関数の像が何ゆえに可縮となるのかがかならずしも明確に示されていない憾みがあり，そこで筆者の一人は冒頭に掲げた論文において，クーンの手法にもとづけば，後者の結論もまた肯定的に解決されうることを示そうと試みたのであった。ところが比較的最近になって，筆者たちはクーンの分析そのものがある推論の過程において基本的な誤謬を含み，支持しがたいものであることを発見した[(5)]。したがってこの点についてクーンの推論のどこが不適切であるかを明らかにし，前稿の記述を訂正しておきたいというのが，本稿の一つの目的である。

注(3)　その意味で(1)はいわば「片側伸縮型」，(2)は「両側伸縮型」とでも特徴づけることができるかもしれない。ただ，そのような区別をあまりに強調することは不適切であろう。なぜなら(1)の場合も，相対的な意味では，超過供給状態にある財価格の下落が考慮にいれられているからである。

(1)，(2)のような方式にしたがえば，ある財が超過需要状態にある場合でも，その価格は相対的には下りうることに注意しなくてはならない。つまりその財よりもっと超過需要の著しい財がある場合は，後者の価格のシェアが高まって前者のそれが低まることもありうるのである。しかしこれは決して分子での「需給法則」の定式化を無意味にするものではない。

(4)　たとえば前掲の二階堂の論文は前者のアプローチを，クーンや宇沢の論文は後者のアプローチを採択している。

つぎに(b)のアプローチに関しては，先述したようにワルラスの法則 $p \cdot E(p)=0$ が使えないところから，(2)の分母は正になることが保証されず，もしそれがゼロになれば(2)の関数自体が定義できないから，前稿ではこのルートは廃棄せざるをえなかった。ところがその後筆者たちは存在問題の再考察をつうじて，きわめて簡単な工夫がこの困難をとり除き，当該の道を開通させることを知った。そこでその結果を報告して，やはり前稿の記述を補足しておこうというのが，本稿のもう一つの狙いをなしている。

以下われわれは次節で第一の課題をとり扱い，ついで第三節で第二の課題をとり扱うであろう。

2.　既述のとおり，$p \in P$ に応ずる $E(p)$ の像は非空，コンパクトかつ凸で，その写像は上部半連続であり，またその $E(p)$ に属するzのそれぞれと当初のpとを新しい p' に写す(1)は一価連続である。したがってクーンのように(1)をつうじて $P \to P$ の写像を考える場合は，Pの各点に同じくPの非空でコンパクトな部分集合を対応させる上部半連続な写像が得られるわけであり，従ってその新しい p' の部分集合が1点に可縮という性質さえ満たすならば，アイレンベルグ＝モントゴメリーの不動点定理によって不動点の存在を主張することができるのである。

そこでクーンはまず所与のpについて $D=\{d | d=d(z),\ z \in E(p)\}$，但し $d(z)=[d_1(z_1), d_2(z_2), \cdots\cdots, d_n(z_n)]=[\max(kz_1, 0), \max(kz_2, 0), \cdots\cdots, \max(kz_n, 0)]$ と定義し，Dの可縮であることを証明したのちに，Dとそれに対応するPの像とが同位相になることを証明して，そのPの像の可縮性を導き出そうとしている。ところが肝心のDの可縮性を数学的帰納法で確立しようとする彼のレンマ3がスリップを含み，成立しえないのである。

いまその点を明らかにするために，該当部分のクーンの所論を摘記すれば，つぎのとおりである。まず上に定義したDならびにZのそれぞれについて，さらに

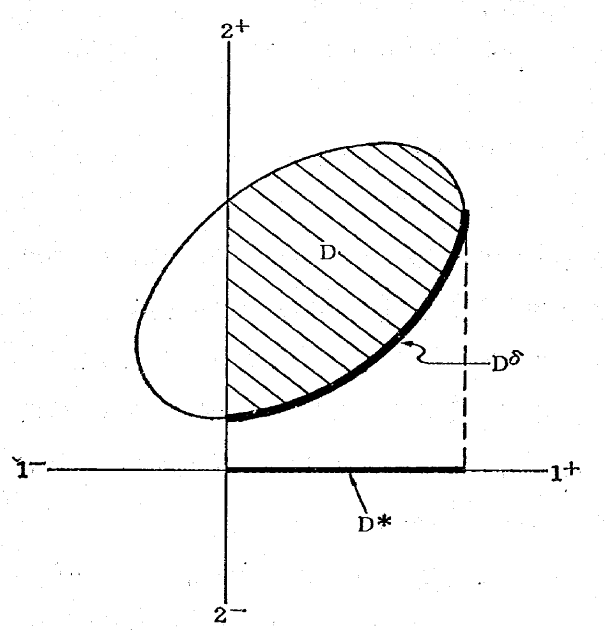
$D^*=\{d^* | d^*=(d_1, \cdots\cdots, d_{n-1}, 0) \text{ for } d=(d_1, \cdots\cdots, d_{n-1}, d_n) \in D\}$

$Z^*=\{z^* | z^*=(z_1, \cdots\cdots, z_{n-1}, 0) \text{ for } z=(z_1, \cdots\cdots, z_{n-1}, z_n) \in Z\}$

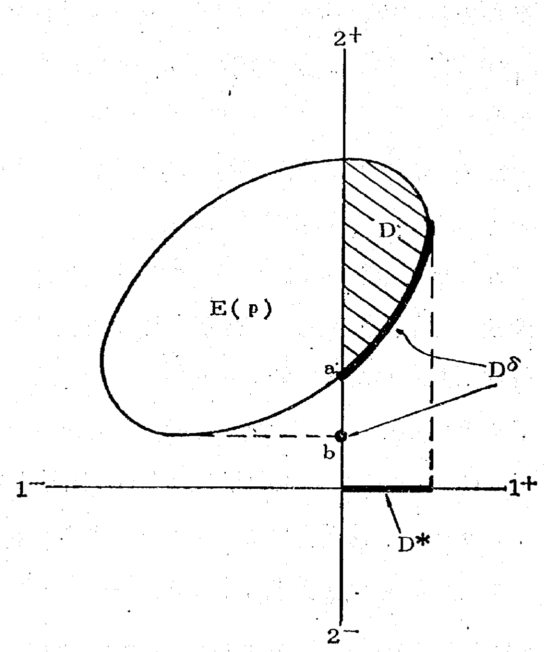
注(5)　この点について注意を喚起されたのは，渡部隆一教授である。ここに記して感謝の意を表しておきたい。

と定義すれば，D^*, Z^* はいずれも D, Z の線型変換であるから，Zがコンパクトかつ凸なら Z^* もコンパクトかつ凸となり，また $D^*=\{d^*|d^*=d(z^*),\ z^*\in Z^*\}$ となっている。ゆえに D^* も Z^* も $n-1$ 次元の空間でレンマの仮定を満たしており，帰納法の仮定から D^* は1点に可縮である。そこでつぎに $d=(d_1,\ \cdots\cdots,\ d_{n-1},\ d_n)\in D$ のそれぞれについて $(d_1,\ \cdots\cdots,\ d_{n-1},\ \delta)\in D$ となるような数 δ の最小値を $\delta_{\min}$ とし，すべての $d\in D$ に対する $d^{\delta}=(d_1,\ \cdots\cdots,\ d_{n-1},\ \delta_{\min})$ の集合を D^{δ} と定義すれば，$H(d,\ t)=td^{\delta}+(1-t)d,\ 0\leqq t\leqq 1,\ d\in D$ という写像をつうじて D は D^{δ} に可縮であることが分る。そして D^{δ} は明らかに D^* と同相であるから，D もまた可縮となり，レンマの証明は終了する。

このようなクーンの推論過程のうち，D が D^{δ} に可縮であるという主張と，D^{δ}が D^* に同相であるという主張は，いずれながら正しくない。いま彼に忠実に k を1とおき，2財の場合について第1図，第2図のような事例を考えてみよう。いずれの図でもある p に応ずる $E(p)$ を楕円形で示



第 1 図

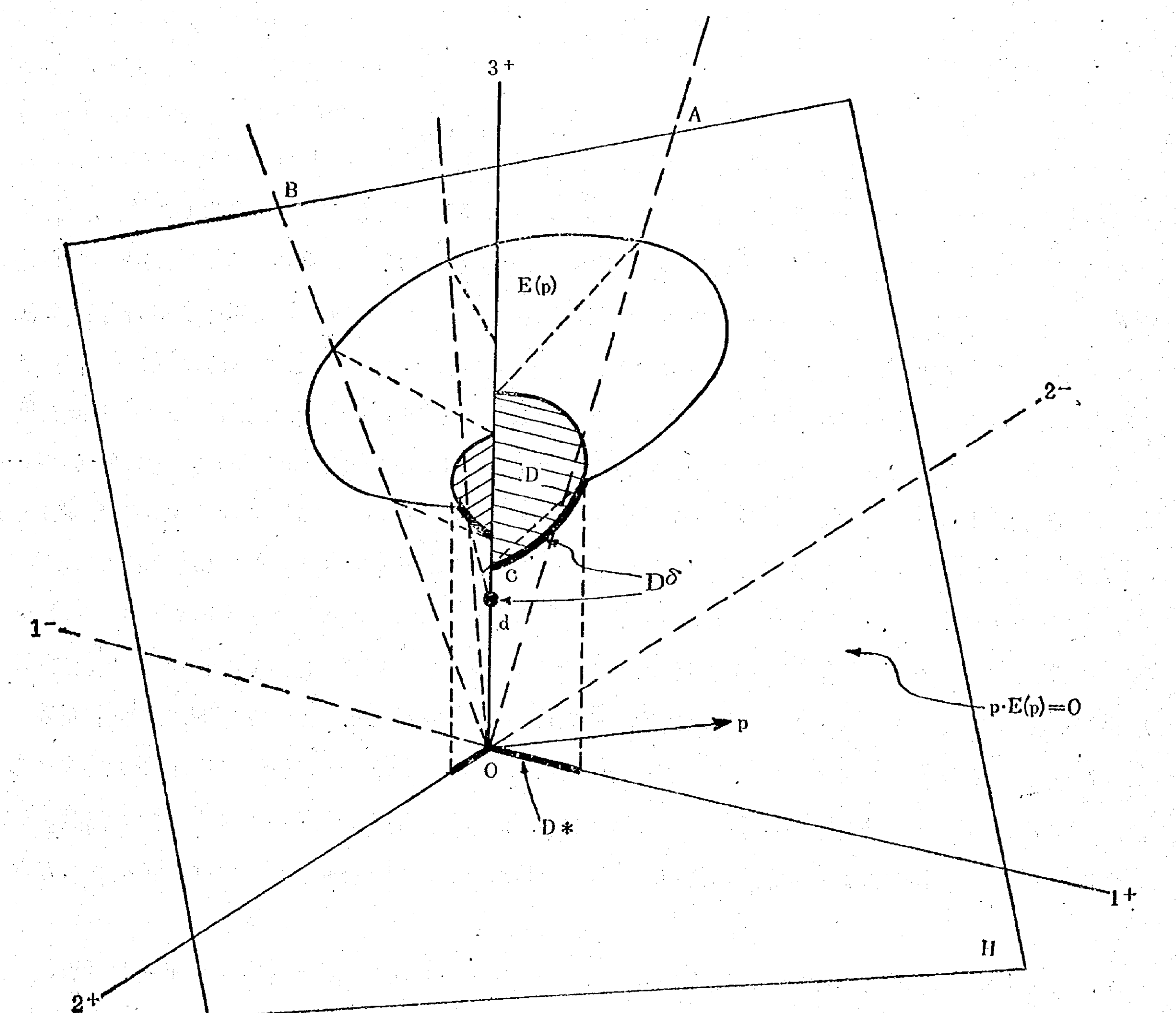


第 2 図

すと，第1図では D はその斜線部分から成っており，したがって D^{δ}はその下縁の太線部分，また D^* は横軸上の太線部分から成っている。この場合は，D が D^{δ} に可縮であること，また D^{δ} が D^* と同相であることは明白である。ところが第2図では D は斜線部分と線分 ab とから成っており，したがって D^{δ} は斜線部分の下縁と b 点から成っているから，この場合は D は D^{δ} に収縮できず，また D^{δ} は横軸上の D^* と同相でもない。したがって，D が D^* と同相になるというクーンの結論は，第2図のような事例では正しくないことになる。

彼のレンマ3は，それ自体を自足的なものと考えるかぎり，ワルラスの法則を前提としていない。しかし彼の全般の議論は弱い意味でのワルラス法則 $p\cdot E(p)\leqq 0$を仮定しているから，あるいはこの

ワルラス法則を用いれば上記のような困難は生じないと考えられるかもしれない。なぜなら $p_1E_1+p_2E_2=0$ と仮定する場合は，たしかに第2図のような事態は生じないからである。けれどもさらに3財の事例を考えれば，$p_1E_1+p_2E_2+p_3E_3=0$ を仮定しても，なお同種の困難が生じることが可能である。その点を例示するために，いま第3図のような事態をとりあげてみよう。ここでは所与の p に対して $\sum_j p_jE_j=0$ を満たす平面Hが原点0をとおって p に垂直に描かれており，$E(p)$ はその平面上にのっている。OA, OB はこの平面がそれぞれ 1^-03^+ 平面，2^-03^+ 平面を截る截り口をあらわしている。さてこの事例でのDは 1^+03^+ 平面および 2^+03^+ 平面での斜線部分と，03^+ 軸上の線分 cd とから成っており，したがって D^{δ} は前と同様それらの斜線部分の下縁の太線部分と d 点とから成っている。他方 D^* は 01^+, 02^+ 軸上の太線部分であるから，Dが D^{δ} に収縮できないこと，D^{δ} が D^* に同相たりえないことは明らかである。依ってワルラスの法則も，事態を救う deus ex machina



第 3 図

とはなりえないのである。

(c)のルートがこのたぐいの障碍を免れえないものであれば，(d)のルートが類似の障碍に逢着することも，もはや詳論を要しないところであろう。今日 $P\to P$ 方式をつうじて p' の像の可縮性を導く問題は，少くとも $E(p)$ が一意関数である特殊な場合を除けば，依然として open question であるように思われる。

3. ここで翻って(b)のルートをとりあげてみよう。繰返して述べれば，この場合は当初の z が $E(p)$ に属するとはかぎらないから，ワルラスの法則が使用できず，したがって価格調節関数（2）の分母 $\sum_j \max(p_j+kz_j,\ 0)$ がゼロになる可能性がある。そこでこの点をどう解決するかが，本節での課題となるのである。それについては，以下に述べるような二通りの答案がある。

まず第一に，つぎの仮定

（3）　$\sum_{j=1}^{n}|z_j|<\frac{1}{k}$

をおけば，この難点は避けることができる。事実この仮定の下では，かならず $\sum_j \max(p_j+kz_j,\ 0) \geqq \sum_j(p_j+kz_j) =1+\sum_j kz_j \geqq 1-k\sum_j|z_j|>0$ となり，（2）を定義することがつねに可能となる。ただこの解決法は k の大きさに制約を賦課するから，あまり望ましいものとはいえないであろう。

そこで第二に，もし当初の $(p,\ z)$ に対して $\sum_j \max(p_j+kz_j,\ 0)>0$ となる場合は(2)と $E(p)$ とを適用するが，他方 $\sum_j \max(p_j+kz_j,\ 0)=0$ となる場合は，それに P の全体を対応させる写像 $P(p,\ z)$ と $E(p)$ とを適用すると考える。$P\times Z$ からそれ自体へのそのように拡大された写像を $\phi(p,\ z)$ と記せば，その定義域が非空，コンパクトかつ凸で，またその像も非空，閉，凸であることは自明である。そこで最後に ϕ の上部半連続性をいうためには，任意の点列 $(p^{(q)}, z^{(q)})$ を $P\times Z$ からとって，$(p^{(q)},\ z^{(q)})\to(p^0,\ z^0)$，$(p'^{(q)},\ z'^{(q)}) \in \phi(p^{(q)},\ z^{(q)})$，$(p'^{(q)},\ z'^{(q)})\to(p'^0,\ z'^0)$ とするとき，$(p'^0,\ z'^0) \in \phi(p^0, q^0)$ となることをいえばよい。そこでいま $\Gamma=\{(p,\ z)|\sum_j \max(p_j+kz_j,\ 0)>0\}$ と定義しよう。もし $(p^0,\ z^0) \in \Gamma$ ならば，Γ が開集合であるところから，ある q^0 より大きなすべての q に対して $(p^{(q)},\ z^{(q)}) \in \Gamma$ となり，ゆえにそのような $(p^{(q)},\ z^{(q)})$ のみを考えれば，$\phi(p,\ z)$ はかならず（2）と $E(p)$ のみから成る。そして(2)は一価連続であるから $p'^0=Q(p^0,\ z^0)$，また $E(p)$ は上部半連続であるから $z'^0 \in E(p^0)$ となり，$(p'^0,\ z'^0) \in \phi(p^0,\ z^0)$ がいえたことになる。他方もし $(p^0,\ z^0) \notin \Gamma$ ならば，$p'^0 \in P(p^0,\ z^0)$, $z'^0 \in E(p^0)$ から同じく $(p'^0,\ z'^0) \in \phi(p^0,\ z^0)$ がいえ，結局 ϕ の上部半連続性が成立する。ゆえに角谷の不動点定理が適用できて，不動点 $(p^*,\ z^*) \in \phi(p^*,\ z^*)$ が存在することになる。

不動点においては $z^* \in E(p^*)$ であるから，かならずワルラス法則 $p^*\cdot E(p^*)=0$ が満たされ，それゆえ $(p^*,\ z^*)$ は Γ に属している。事実もし $(p^*, z^*) \notin \Gamma$ とすれば，$\sum_j \max(p_j^*+kz_j^*,\ 0)=0$，$\max(p_j^*+kz_j^*, 0)\geqq 0$ から，すべての j について $\max(p_j^*+kz_j^*, 0)=0$，したがって $p_j^*+kz_j^*\leqq 0$ となる。そこで $p_j^*\geqq 0$ をそれぞれ両辺にかけて足しあわせれば $\sum_j p_j^{*2}+k\sum_j p_j^* z_j^*\leqq 0$ となり，ゆえにワルラスの法則から $\sum_j p_j^{*2}\leqq 0$ となる。ところが p^* が P に属することから $\sum_j p_j^{*2}>0$ とならなければならず，これは不合理である。

以上の議論によって，不動点では(2)の関数がかならず定義でき，したがって

$$p_i^*=\frac{\max(p_i^*+kz_i^*,\ 0)}{\sum_{j=1}^{n}\max(p_j^*+kz_j^*,\ 0)}$$

である。ゆえに $\sum_j \max(p_i^*+kz_i^*,\ 0)=\mu^*$ とおけば

$$\mu^* p_i^*=\max(p_i^*+kz_i^*,\ 0).$$

ここでいうまでもなく $p_i^*+kz_i^*>0$ の i については

（4）　$\mu^* p_i^*=p_i^*+kz_i^*,$

また $p_i^*+kz_i^*\leqq 0$ の i については

（5）　$\mu^* p_i^*=0$ すなわち $p_i^*=0.$

ゆえにこれらに p_i^* を辺々かけて加えれば，

$$\mu^*\sum_{i=1}^{n}(p_i^*)^2=\sum_{i=1}^{n}(p_i^*)^2+k\sum_{i=1}^{n}p_i^* z_i^*$$

を得る。ふたたびワルラス法則によって，右辺第二項は消え，

$$\mu^*=1$$

したがって（4），（5）から

$$z_i^*\leqq 0$$

である。依って不動点 $(p^*,\ z^*)$ は均衡点となっていることが判明した。

以上の議論をつうじて(a)のルートばかりではなく，また(b)のルートも終点に達しうることが知られたと思う。ところが(a)，(b)いずれの場合も，不動点 $(p^*,\ z^*)$ ではかならず $z^* \in E(p^*)$ となっていることを想起しよう。するといま，ふたたび(c)，(d)の立場に復帰して，当初の価格に p^* を選んだと考えれば，その p^* はいうまでもなく $P\to P$ の写像の不動点にもなっており，依って(a)に不動点があれば，(c)にもそれがあり，また(b)に不動点があれば，(d)にもそれがあることが明らかとなる。かくして $E(p)$ の像が可縮となるかどうかの検討とは別個に，(c)，(d)の道も目標に通ずるのである。