Title	新古典派的経済成長モデルにおける競争均衡
Sub Title	Competitive equilibrium for a neoclassical model of economic growth
Author	長名, 寛明
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1970
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.63, No.11 (1970. 11) ,p.821(17)- 831(27)
JaLC DOI	10.14991/001.19701101-0017
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19701101-0017

い論議が展開され，結局，双方７人の社会民主党員と独立派から成る 14 名の委員会が選ばれたのである。その後，さまざまな経緯ののち，労兵会議執行委員会は，多数派社会民主党，独立派，(右派)，革命的オプロイテおよびスパルタクスから，40 名の代表を出して構成されることとなった。

以上にのべたような労働者の革命的組織にたいして，1918年11月15日，ドイツの労働組合は，ドイツの変動しつつある社会状勢のなかで，労働組合側を代表するレギエン (Legien) と雇主を代表するスティンネス(Stinnes)との間に，調停委員会の創設がとりきめられ，労資協議制(joint consultation)の慣行が一般化されるに至った。これは，労兵会議によって革命的方向におしすすめられる傾向にたいする反動であり，労働運動を統制し，保守的な方向にみちびく役割を演じたのであった。すなわち，1920年，ドイツの労働組合は，ウァイマール共和国を支える役割を果したのであって，1919年７月，ニュルンベルクの労働組合会議によって，自由労働組合 (freie gewerkschaften)[25] を再組織することを決定し，第１次大戦前のルーズな組織に代って，強固な全ドイツ労働組合同盟 (Allgemeine Deutsch Gewerkschaftsbund, General German Federation of Labour) が建設されたのである。[26] 15 名から成る執行委員会は，組織を統轄し，３年毎に大会が開かれることとなった。この労働組織の下に，工場委員会 (works' councils) が工場内において，労働者の賃金および労働条件を改善する目的をもって，労兵会議に対抗的な役割を果すものとして，1891年の産業法典 (Industrial Code)[27] の修正のもとに出現し，ウァイマール憲法にも規定されたことは，次第に労働者を企業内に封鎖する役割を果すこととなった。以上にのべたように，工場委員会は，工場および企業内における労使関係をおしすすめ，直接的に解決しえない紛争については調停委員会に提訴することによって，もっぱら労資協調の手段となったのである。このようにみてくると，戦後の日本の企業別組合は，ドイツの工場委員会にもかなり類似しているように思われる。しかし，当時の日本共産党は，革命的オプロイテおよび労兵会議の役割を，この企業別組合および工場代表者会議に期待していたようである。その意味では，日本の前衛政党は，国際的な労働運動の経験に充分学ばなかったといえるし，また，その問題が更めて顧みられるべき時期にきているように思われる。[28] その場合，1945 年から 47 年にかけての戦後労働運動における問題状況を正しく把握することなしには，その後の運動を理解することも困難となるであろう。

――1970. 10. 16――

注(25) 19世紀のドイツ労働組合運動は，大別して三つの傾向に分れていた。ひとつは，カトリック系のキリスト教労働組合 (Christriche Gewerkschaften)，つぎに協同組合運動の影響の根強いヒルシュ・ドゥンカー的組合 (Hilsch-dunkerische Gewerkschaften) そして社会民主党系の組合であって，最後のものが，自由労働組合 (Freie Gewerkschaften) である。

(26) Comparative Labour Movement, edited by Walter Galenson, 1952, New York, pp. 276—7.

(27) 1891年の Industrial Code によって，20人ないしそれ以上の労働者を雇用する工場においては，工場委員会をつくることが規定されたのであって，1918年12月には，政府は，「20人もしくはそれ以上の労働者を雇用する工場や店舗においては，工場委員会を強制する」ことが規定されたのである。

(28) 最近の著作として，西村豁通「日本の労働組合運動」ミネルヴァ書房，1970，および塩田庄兵衛，中林賢二郎，田沼肇「戦後労働組合運動の歴史」新日本出版社，1970年をあげておく。

新古典派的経済成長モデルにおける競争均衡

長名　寛明

従来の集計的成長理論は消費あるいは貯蓄の決定に関する問題を陽表的に取扱わず，貯蓄函数の性質に関して何らかの仮定を置くことによって分析を進めていたが，D. Cass と M. E. Yaari は最近の論文[2]において，集計的消費函数を各消費者の効用最大化行動の仮定から導出し，そのもとで競争均衡成長経路の性質を分析した。彼等は均斉成長径路の存在と競争均衡の動学的有効性とそのパレート最適性の同値性を証明したが，競争均衡成長径路一般の動学的有効性は証明されていない。

本稿の目的は，D. Cass と M. E. Yaari のモデルに類似のモデルについて，均斉成長径路の存在の十分条件を簡単化すること，一般の競争均衡成長径路の均斉成長径路への単調収束を示すこと，および競争均衡成長径路のパレート最適性を証明することである。

I.　家計の行動

v 期に形成される家計（これを家計 v と呼ぶことにする）を考えよう。全ての家計は無限の寿命を持ち，無限の計画期間を持つものとする。家計 v は各時点に１単位の労働を提供し，実質賃金 $w(t)$ を t 期に受けとる。またそれが資産 $A(t, v)$ を持っているならば，t 期に $r(t)A(t, v)$ だけの収益を受けとる。ここで $r(t)$ は t 期に成立している利子率である。従って，その家計の経常所得は $w(t)+r(t)A(t, v)$ と書ける。家計はこれを消費 $C(t, v)$ と貯蓄 $A_1(t, v)\equiv\frac{\partial}{\partial t}A(t, v)$ に振り当てる。すなわち，その予算制約式は

(1)　$A_1(t, v)=w(t)+r(t)A(t, v)-C(t, v)$

となる。(1)を積分すると

$$A(t, v)=\int_v^t[w(s)-C(s, v)]\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds+A(v, v)\exp\int_v^t r(x)\,dx$$

となる。

本稿では，0 期を競争過程の出発点とし，簡単化のために，0 期以後に形成される家計は初期資産を持たないものとする。従って，

$$A(t, v)=\int_0^t [w(s)-C(s, v)]\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds + A(0, v)\exp\int_0^t r(x)\,dx \quad \text{for} \quad v \leqq 0,$$

(2)

$$A(t, v)=\int_v^t [w(s)-C(s, v)]\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds \quad \text{for} \quad v>0$$

となる。ここで $A(0, v)$ は歴史的に与えられた与件である。更に，消費の流れの現在価値は賃金所得の流れの現在価値と初期資産の和に等しくなければならないという資産制約条件が各家計に賦課されるものとしよう。ただし現在価値は市場利子率で計算される。すなわち，

$$\int_0^\infty [w(s)-C(s, v)]\exp\int_s^0 r(x)\,dx\,ds + A(0, v)=0 \quad \text{for} \quad v \leqq 0,$$

(3)

$$\int_v^\infty [w(s)-C(s, v)]\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds=0 \quad \text{for} \quad v>0.$$

各家計はこの資産制約のもとで効用を最大化するように消費計画をたてるわけであるが計画をたてる時には，将来の賃金率，利子率に関する知識が必要になる。本稿では，経済主体が将来を完全に予見できる場合と計画時点の賃金率と利子率が永久に維持されるものと予想する場合の二つの極端なケースを考える。前者，すなわち“完全予見”の仮定は，完全な先物市場の存在を仮定することと同値である。最初に，このケースを考えよう。その場合，v 時点の観点から最適な消費計画はそれ以後のどの時点の観点からも最適でなければならない。従って，家計が t 時点に解かねばならない問題は

$$\int_t^\infty C(s, v)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds=\int_t^\infty w(s)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds + A(t, v),$$

$$C(s, v) \geqq 0$$

の制約の下で

$$\int_t^\infty U[C(s, v)]\,e^{-\delta(s-t)}\,ds \quad (\delta>0)$$

を最大化することと定式化できる。ただし，瞬間的効用函数 U は

$$U'(C)>0, \ U''(C)<0 \quad \text{for} \quad 0<C<\infty, \ U'(0)=\infty$$

を満たすものと仮定する。

最適消費計画 $C(t, v)$ が

(5) $$C_1(t, v)=[\delta-r(t)]\frac{U'[C(t, v)]}{U''[C(t, v)]}$$

を満たすものでなければならないことは容易にわかるであろう。また，(5)をみたす実現可能な径路が最適であることも容易に証明できる。

Cass-Yaari に従って[(1)]，簡単化のために，瞬間的効用函数の限界効用の弾力性が恒等的に１である場合を考えると，最適消費計画は

注(1) D. Cass and M. E. Yaari [2], pp. 235~236.

(6) $$C(t, v)=\delta A(t, v)+\delta\int_t^\infty w(s)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds$$

によって与えられる。すなわち，t 期の消費は t 期以後の賃金所得の流れの現在価値と t 期の資産の和の δ 倍でなければならない。

II.　競争均衡の定義

本稿を通じて，t 期に形成される家計の数は一定率 n で指数的に増加するものと仮定する。単位を適当に選ぶことにより，その数は e^{nt} と書くことができる。従って，t 期の総家計数は

$$L(t)=\int_{-\infty}^t e^{nv}dv=\frac{1}{n}e^{nt}$$

となる。これは労働力の総供給量ともみなされ得る。社会全体の資産 $A(t)$ および消費 $C(t)$ は

$$A(t)=\int_{-\infty}^t A(t, v)e^{nv}dv, \quad C(t)=\int_{-\infty}^t C(t, v)e^{nv}dv$$

によって与えられる。家計当りの量を

$$a(t)=\frac{A(t)}{L(t)}, \quad c(t)=\frac{C(t)}{L(t)}$$

によって定義すると，(2)と(6)から

(7) $$a(t)=\int_0^t [w(s)-c(s)]\exp\int_s^t [r(x)-n]\,dx\,ds + a(0)\exp\int_0^t [r(x)-n]\,dx,$$

(8) $$c(t)=\delta a(t)+\delta\int_t^\infty w(s)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds$$

が得られる[(2)]。

ここで，新古典派的生産システムを考えよう。全ての生産者が同一の収穫不変の技術を所有していると仮定すれば，全体の生産は競争的に行動する１つの代表的企業によって行われると考えてよい。その集計的生産函数 f は

$$f'(k)>0, \ f''(k)<0 \quad \text{for} \quad 0<k<\infty, \ f(0)=0$$

をみたすものとする。ただし，k は資本労働比率である。新古典派体系において，投資総額は貯蓄総額に恒等的に等しい。競争過程の初期点において，全資本ストックが家計の資産として所有されている，すなわち，$a(0)=k(0)$ と仮定すれば，これは

(9) $a(t)=k(t)$

を含意する。企業は利潤を最大化するように行動すると仮定されるから，

(10) $r(t)=f'[k(t)]$,

注(2) 本稿では，同一世代のすべての家計は同じ行動をし，又すべての家計は同一の時間選好率を持つものと仮定する。

(11) $w(t)=f[k(t)]-k(t)f'[k(t)]$

が成り立つ。

本稿では，(7)～(11)が全ての $t\geqq 0$ に対して満たされる時，経済は競争均衡にあるといわれる。言うまでもなく，全ての経済量は均衡において非負値をとらねばならない。

次の二つの同値関係

$$\dot{a}(t)=[r(t)-n]\,a(t)+w(t)-c(t)$$

$\Longleftrightarrow$

$$a(t)=\int_0^t[w(s)-c(s)]\exp\int_s^t[r(x)-n]\,dx\,ds+a(0)\exp\int_0^t[r(x)-n]\,dx;$$

$$\dot{c}(t)=r(t)c(t)+\delta[\dot{a}(t)-r(t)a(t)-\dot{w}(t)]$$

$\Longleftrightarrow$

$$c(t)=\delta a(t)+\delta\int_t^u w(s)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds+[c(u)-\delta a(u)]\exp\int_u^t r(x)\,dx$$

が成立することを考慮すると，競争均衡の条件は次のように書き換えられる。

(12) $\dot{k}=f(k)-nk-c,$

(13) $\dot{c}=[f'(k)-\delta]\,c-n\delta k,$

(14) $\lim\limits_{u\to\infty}[c(u)-\delta k(u)]\exp\int_u^t f'[k(x)]\,dx=0,$

(15) $k(0)=k_0,$

ただし，k_0 は歴史的与件である。

III. 均斉成長均衡

均衡条件が

(16) $$k(t)=\int_0^t[f[k(s)]-k(s)f'[k(s)]-c(s)]\exp\int_s^t[f'[k(x)]-n]\,dx\,ds$$
$$+k(0)\exp\int_0^t[f'[k(x)]-n]\,dx,$$

(17) $$c(t)=\delta k(t)+\delta\int_t^\infty[f[k(s)]-k(s)f'[k(s)]]\exp\int_s^t f'[k(x)]\,dx\,ds$$

と書き換えられることに注意し，この体系の定常解 $(k^*,\ c^*)$ に注目しよう。それは

$$\frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{nf'(k^*)}{f'(k^*)-\delta},$$

$$c^*=f(k^*)-nk^*$$

を満たすものでなければならない。このような $(k^*,\ c^*)$ は存在するであろうか。答は次の定理によって与えられる。

定理 1. $f'(0)>n+\delta$ かつ $f'(\infty)<n$ ならば，均斉成長均衡 $(k^*,\ c^*)$ が存在し，それは一意的である。なお，その均衡における利子率は割引率 δ より大きい。

(証明) 函数

$$g(k)=\frac{f(k)}{k},\quad h(k)=\frac{nf'(k)}{f'(k)-\delta}$$

を定義すれば

$$g(0)=f'(0),$$

$$g(0)-h(0)=\frac{f'(0)[f'(0)-(n+\delta)]}{f'(0)-\delta},$$

$$g'(k)=-\frac{f(k)-kf'(k)}{k^2}<0,$$

$$h'(k)=\frac{-n\delta f''(k)}{[f'(k)-\delta]^2}$$

が成り立つ。

仮定により，$g(0)>h(0)$ であることに先ず注意しよう。$f'(\infty)<n$ だから，$f'(\hat{k})=n$ となるような $\hat{k}$ が存在する。故に，$z(k)=f(k)-nk,\ k'=\hat{k}+v,\ v>0$ とすれば $f'(k')<n$ だから $z'(k')<0$ となる。z は厳密に凹であるから，k' と等しくない任意の k に対して，$z(k)-z(k')<(k-k')z'(k')$ となる。故に $(k''-k')z'(k')=-z(k')$ とすれば，$z(k'')<0$ 従って $g(k'')<n$ となる。他方，$f'(\bar{k})=\delta$ とすれば $0<k<\bar{k}$ なる任意の k に対して $h(k)>n$ である。g と h は $(0,\ \bar{k})$ において連続だから $g(k^*)=h(k^*)$，$0<k^*<\bar{k}$ なる k^* が存在することになる。更に，$(0,\ \bar{k})$ において，g と $-h$ は厳密な減少函数だから，k^* は一意的に定まる。 (証明終)

次に，Phelps の結果を用いて，以下の定理を証明することができる。

定理 2. 定理 1 の仮定の下で，

$$n>\delta,\quad \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}>\frac{n^2}{n-\delta}$$

であれば，一意的な均斉成長均衡は有効でない。但し，$f'(\hat{k})=n$ である。(3)

(証明) 先ず，次の事実

$$\frac{f(k^*)}{k^*}=\frac{n^2}{n-\delta}\,\frac{n-\delta}{n}\,\frac{f'(k^*)}{f'(k^*)-\delta}$$

に注目しよう。$m(x)=\dfrac{n-\delta}{n}\,\dfrac{x}{x-\delta}$ を定義すれば，$n>\delta$ かつ $x\neq\delta$ の時，$m'(x)<0$ となる。$n>\delta$ と仮定しよう。その場合，

$$f'(k^*)\gtreqless n\Longleftrightarrow\frac{f(\hat{k})}{\hat{k}}\lesseqgtr\frac{f(k^*)}{k^*}\lesseqgtr\frac{n^2}{n-\delta}$$

注(3) 有効性については，E. S. Phelps [6] を参照。

であるから，定理の結論は直ちに得られる。

IV. 一般的競争均衡：存在と一意性

本節では，歴史的に与えられた資本労働比率 k_0 を出発点とする競争均衡が存在するか否かを確めよう。

$$\phi_1(k)=f(k)-nk,$$

$$\phi_2(k)=\frac{n\delta k}{f'(k)-\delta},$$

$$\mathrm{M}(u)=[c(u)-\delta k(u)]\exp\int_u^t f'[k(x)]\,dx$$

を定義すると，

$$\phi_1(0)=\phi_1(\bar{k})=0,\ \text{但し}\quad f(\bar{k})-n\bar{k}=0,$$

$$\phi_2(k)\gtreqless 0\Longleftrightarrow f'(k)\gtreqless\delta,$$

$$\phi_2(k)>0\Longrightarrow\phi_2'(k)>0,$$

$$\mathrm{M}'(u)=\frac{\delta\,[f[k(u)]-k(u)\,f'[k(u)]]}{\delta k(u)-c(u)}\mathrm{M}(u)$$

となる。従って，全ての $u>t'$ に対して $c(u)>\delta k(u)$ となるような t' が存在すれば

$$\lim_{u\to\infty}\mathrm{M}(u)=0$$

になる。$c^*=\dfrac{\delta k^* f(k^*)}{k^* f'(k^*)}>\delta k^*$ だから，均斉成長均衡 (k^*, c^*) に収束するような微分方程式体系(12), (13)の全ての解は競争均衡であることがわかる。

先ず，体系(12), (13)の (k^*, c^*) における1次の Taylor 近似を考えよう。その線型体系の特性方程式 $x^2+ax+b=0$ の根を x_1, x_2 とすると，$a^2-4b=(n+\delta)^2-4c^*f''(k^*)>0$ だから2根とも実数である。他方，$x_1x_2=b=nf'(k^*)\left[\dfrac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}-1\right]+c^*f''(k^*)<0$ だから，その2根は異符号をもち，従って (k^*, c^*) は鞍点である。故に，f が3回連続微分可能であることを仮定すれば，(k^*, c^*) の近傍に (k^*, c^*) に漸近的に近づく体系(12), (13) の解が丁度2つ存在する。

ここで

$$\mathrm{D}_1=\{(k,\ c)\,|\,c<\phi_1(k),\ c>\phi_2(k),\ f'(k)>\delta\},$$

$$\mathrm{D}_2=\{(k,\ c)\,|\,c<\phi_1(k),\ ((c<\phi_2(k),\ f'(k)>\delta)\ \ \text{or}\ \ f'(k)\leqq\delta)\},$$

$$\mathrm{D}_3=\{(k,\ c)\,|\,c>\phi_1(k),\ ((c<\phi_2(k),\ f'(k)>\delta)\ \ \text{or}\ \ f'(k)\leqq\delta)\},$$

$$\mathrm{D}_4=\{(k,\ c)\,|\,c>\phi_1(k),\ c>\phi_2(k),\ f'(k)>\delta\}$$

を定義しよう。$c=\phi_1(k)$ をみたす曲線は D_1 と D_4 の境界また D_2 と D_3 の境界を形成している。(k^*, c^*) を除く D_1 と D_4 の境界では $\dot{c}>0$ かつ $\dfrac{d}{dt}\phi_1(k)=0$ だから，解が D_4 から D_1 に入ることはない。同様に解が D_2 から D_3 に入ることもない。他方，曲線 $c=\phi_2(k)$ は D_1 と D_2 の境界，D_3 と D_4 の境界を形成しており，D_1 と D_2 の境界では $\dot{c}=0$ かつ $\dfrac{d}{dt}\phi_2(k)>0$ だから，解が D_2 から D_1 に入ることはない。同様に解が D_4 から D_3 に入ることもない。結局，(k^*, c^*) を除く D_2 あるいは D_4 の境界に達したいかなる解もその内点に入り，永久にその中に留まる。然し，D_4 に入った解は究極的には(12)あるいは非負条件 $k\geqq 0$ をみたさなくなり，D_2 に入る解も(13), (14), 非負条件 $c\geqq 0$ の中，1つを究極的にみたさなくなる。従っていかなる競争均衡も D_1 あるいは D_3 の中に留まらねばならない。

故に，先にその存在が証明された (k^*, c^*) へ収束する解は各々 D_1 と D_3 の中になければならない。D_1 および D_3 において(12)および(13)の右辺は連続でありかつ有界であるから，その解は k の大小両方向にいくらでも延長できる。しかも D_1 と D_3 において特異点は原点を除いてないから，解はそれぞれにおいて一意であり，また，D_1 と D_3 の定義により，(k^*, c^*) への収束は単調である。従って次の定理が確立された。

定理 3. $f'(0)>n+\delta$, $f'(\infty)<n$ であり，f が3回連続微分可能であるならば，任意の k_0 を初期点とする一意的な競争均衡が存在し，それは均斉成長均衡 (k^*, c^*) に単調に収束する。

この定理の系として，均斉成長均衡の大域的安定性が得られる。

定理 4. 定理3の仮定のもとで，均斉成長均衡は大域的に安定である。

この結果は，(k^*, c^*) が鞍点であることを考えると奇妙に感じられるかもしれないが，これは競争均衡の我々の狭い定義の帰結であることに注意したい。我々の定義は，短期均衡が永久に継続することを要求している。短期均衡の有限期間の継続をも競争均衡の定義に容れるならば，競争均衡の一意性と，均斉成長均衡の安定性は直ちに失われる。[(4)]

V. 定常的予想

前節までは完全予見の仮定に基づいて議論を進めてきたが，ここで他の極端な仮定，定常的予想の含意を吟味しよう。この場合には，一般に予想は実現しないから，家計は各時点で計画の立て直しを余儀なくされる。従って，どの時点をとっても消費計画の中で実現される必然性のあるものは立案時のものだけである。このような場合に，資産が負になることを認めると，将来の返済（実現の必然性がない）を見込んで，現在いくらでも借入れるという計画が可能になり，問題が意味を持たなくなるので，前節までの仮定に加えて，各家計は各時点で非負の資産を持たねばならないものと

注(4) 新古典派体系の不安定性については，F. H. Hahn [3, 4], M. Kurz [5] および P. A. Samuelson [7] を参照。

考えることにする。

家計 v が t 期に解かねばならない問題は,

$$\int_t^{\infty}[C(s, v; t)-w(s; t)]\exp\int_s^t r(x; t)\,dx\,ds=A(t, v),$$

$$C(s, v; t)\geqq 0,$$

$$A(s, v; t)\geqq 0$$

の制約の下に

$$\int_t^{\infty}U[C(s, v; t)]e^{-\delta(s-t)}\,ds$$

を最大化することである。ここで $x(\ ;t)$ は変数 x の t 期における予想値あるいは計画値である。

定常的予想の仮定は

$$w(s; t)=w(t),\ r(s; t)=r(t)\quad \text{for}\quad s\geqq t$$

と定式化できる。その場合，最適消費計画 $C(s, v; t)$ は(6)と同様に

$$C(s, v; t)=\delta A(s, v; t)+\delta\int_t^{\infty}w(s; t)\exp\int_s r(x; t)\,dx\,ds$$

となるが，実現される消費 $C(t, v)$ は

$$C(t, v)=C(t, v; t)=\frac{\delta}{r(t)}[r(t)A(t, v)+w(t)] \tag{18}$$

によって与えられることが容易に導かれる。ただし，これは $C(t, v)$ が許容された領域の内部にある場合に限る。$U'(0)=\infty$ だから，$C(t, v)=0$ になることはない。許容領域の上限が存在するのは $A(t, v)=0$ の場合に限り，その場合の上限は $w(t)$ である。然し，$r(t)>\delta$ ならば，最適消費 $C(t, v)$ は許容領域の内点であるから，$r(t)>\delta$ の場合に注意を集中する限り，$C(t, v)$ は(18)によって与えられると考えてよい。このような消費に対しては

$$A(t, v)=\int_v^t\frac{w(s)}{r(s)}[r(s)-\delta]\exp\int_s^t[r(x)-\delta]\,dx\,ds$$

であるから，条件 $A(t, v)\geqq 0$ は満たされている。

(18)から家計当り消費は

$$c(t)=\frac{\delta}{r(t)}[r(t)a(t)+w(t)]$$

となるから，$f'(k)>\delta$ の領域では，競争均衡の条件は

$$\dot{k}=[f'(k)-\delta]\frac{k}{f'(k)}\left[\frac{f(k)}{k}-\frac{nf'(k)}{f'(k)-\delta}\right], \tag{19}$$

$$k(0)=k_0 \tag{20}$$

となる。従って，定理1はそのまま成立する。均斉成長均衡において完全予見と定常的予想とが同値であることを考えれば，このことは自明である。然し，定理1の証明は次の定理の証明にもなっ

ていることに注意しよう。

定理 5. $f'(0)>n+\delta$, $f'(\infty)<n$, $k_0<\bar{k}$ ならば，均斉成長均衡 (k^*, c^*) に単調に収束する一意的な競争均衡が存在する。

VI. 一般的競争均衡：最適性

最後に，競争均衡の有効性と Pareto 最適性を吟味しよう。Cass-Yaari に従って，次の定義を導入する。[5] 全ての $t\geqq 0$ に対して，$k(t)\geqq 0$, $\dot{k}(t)=f[k(t)]-nk(t)-c(t)$, $k(0)=k_0$ となるような非負の区分的に連続な $c(t), t\geqq 0$ が存在する時，径路 $\{k(t)|t\geqq 0\}$ は実現可能であると言われる。全ての $t\geqq 0$ に対して，$c(t)\geqq c^0(t)$ であり，ある $t\geqq 0$ に対して，$c(t)>c^0(t)$ となるような実現可能な他の径路 $\{k(t)|t\geqq 0\}$ が存在しない時，実現可能な径路 $\{k^0(t)|t\geqq 0\}$ は有効であると言われる。$s\geqq\max(0, v)$ をみたす全ての s に対して

$$\int_{\max(0, v)}^{s}\Big[U[C(t, v)]-U[C^0(t, v)]\Big]e^{-\delta(t-v)}dt\geqq 0$$

であり

$$\lim_{s\to\infty}\int_{\max(0, v)}^{s}\Big[U[C(t, v)]-U[C^0(t, v)]\Big]e^{-\delta(t-v)}dt>0$$

となるような分配 $\{C(t, v)|v\leqq t\}$ を伴った他の実現可能な径路 $\{k(t)|t\geqq 0\}$ が存在しない時，分配 $\{C^0(t, v)|v\leqq 0\}$ を伴った実現可能な径路 $\{k^0(t)|t\geqq 0\}$ は Pareto 最適であると言われる。ここで，全ての $v\leqq t$ に対して

$$C(t, v)\geqq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{t}C(t, v)e^{nv}dv=\frac{1}{n}e^{nt}c(t)$$

である時，$\{C(t, v)|v\leqq t\}$ は分配と呼ばれる。

さて，分配 $\{\bar{C}(t, v)|v\leqq t\}$ を伴った競争均衡径路 $\{\bar{k}(t)|t\geqq 0\}$ が Pareto 最適でないとすれば，

$$0<\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{T}\int_{\max(0, v)}^{T}\Big[U[C(t, v)]-U[\bar{C}(t, v)]\Big]e^{-\delta(t-v)}e^{nv}\bar{P}(0, v)\,dt\,dv$$

となるような分配 $\{C(t, v)|v\leqq t\}$ を伴った実現可能な径路 $\{k(t)|t\geqq 0\}$ が存在する。ここで

$$P(t, v)=\int_v^{\infty}w(s)\exp\int_s^t r(x)\,dx\,ds.$$

従って，Cass-Yaari によって与えられた証明を若干修正すれば，次の命題が得られる。

定理 6. 競争均衡が Pareto 最適でなければそれは有効でない。[6]

注(5) D. Cass and M. E. Yaari [2] pp. 249～263.

(6) D. Cass and M. E. Yaari [2], pp. 250～251, 264～265.

他方，Cass-Yaari は $\lim_{t\to\infty}\sup \exp\int_0^t[r(x)-n]\,dx\geqq K>0$ ならば，実現可能な径路 $\{k(t)\mid t\geqq 0\}$ は有効であることを証明した[7]。故に次の命題を証明することができる。

定理 7. f は3回連続微分可能であり，かつ $f'(0)>n+\delta$ および $f'(\infty)<n$ をみたすものとする。次の3条件の中1つが満たされれば，競争均衡は Pareto 最適である。

(i) $n\leqq\delta$.

(ii) $n>\delta$, $\dfrac{f(\hat{k})}{\hat{k}}<\dfrac{n^2}{n-\delta}$,

(iii) $n>\delta$, $\dfrac{f(\hat{k})}{\hat{k}}=\dfrac{n^2}{n-\delta}$, $k(0)<\hat{k}$,

ただし，$f'(\hat{k})=n$ である。

(証明) 定理2の証明および定理1より，均斉成長均衡は $f'(k^*)\geqq n$ をみたすものである。さらに，定理3により，競争均衡は均斉成長均衡に単調に収束する。従って，(i)が成り立てば $f'(k^*)>n$ であり，全ての $t\geqq T$ に対して $r(t)>n$ となるような T が存在する。故に，

$$\lim_{t\to\infty}\sup\exp\int_0^t[r(x)-n]\,dx\geqq K>0.$$

(ii)の場合も同様である。(iii)の場合は，収束の単調性により，全ての $t\geqq 0$ に対して $r(t)>n$ であるから，同じ不等式が成り立つ。　(証明終)

最後に，最適成長理論の文献においてしばしば用いられる非個人主義的な社会的厚生函数を最大化する問題を考えよう。その場合の問題は(12)と(15)の制約の下に

$$(21)\quad \int_0^\infty W[c(t)]\,e^{-\delta t}\,dt$$

を最大化することである。ただし，

$W'(c)>0$, $W''(c)<0$ for $0<c<\infty$,

$W'(0)=\infty$

とする。さらに，計画当局の主観的割引率は家計の共通の割引率と等しいものとする。この場合，次の命題が得られる。

定理 8. $n>0$ の場合，競争均衡は(12)と(15)の制約の下に(21)を最大化するという意味において最適ではない。特に，均斉成長均衡における資本量は過剰になる。

(証明) 周知の如く，この最適問題の解は

$$\dot{c}=[n+\delta-f'(k)]\frac{W'(c)}{W''(c)},$$

$$\lim_{t\to\infty}k(t)=k^{**},\quad f'(k^{**})=n+\delta$$

をみたす[8]。然し，競争均衡は

注(7) D. Cass and M. E. Yaari [2], pp. 265～267.

$$f'(k^*)=n+\delta-n\left[1-\frac{k^*f'(k^*)}{f(k^*)}\right]$$

をみたす k^* に収束する。故に $k^*>k^{**}$ である。最適性の必要条件がみたされないのであるから，競争均衡は最適ではない。

定理 9. $n=0$ かつ $W(c)=\log c$ ならば，競争均衡は(12)と(15)の制約の下に(21)を最大化するという意味において最適である。

(証明) 競争均衡も最適径路も，同じ微分方程式体系

$\dot{c}=[f'(k)-\delta]c$,

$\dot{k}=f(k)-nk-c$

によって特徴づけられるから，両者は一致する。

引用文献

[1] Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, 32 (1965).

[2] Cass, D. and M. E. Yaari, "Individual Saving, Aggregate Capital Accumulation, and Efficient Growth," in K. Shell (ed.) *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* (M. I. T. Press, 1967).

[3] Hahn, F. H., "Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods," *Quarterly Journal of Economics*, 80 (1966).

[4] Hahn, F. H., "On Warranted Growth Paths," *Review of Economic Studies*, 35 (1968).

[5] Kurz, M., "The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes," *Review of Economic Studies*, 35 (1968).

[6] Phelps, E. S., "Second Essay on the Golden Rule of Accumulation," *American Economic Review*, 55 (1965).

[7] Samuelson, P. A., "Indeterminacy of Development in a Heterogeneous-Capital Model with Constant Saving Propensity," in K. Shell (ed.) *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* (M. I. T. Press, 1967).

注(8) D. Cass [1].