Title	コブ-ダグラス型生産函数のデュアルとしての利潤函数について
Sub Title	Profit function as a dual of Cobb-Douglas production function
Author	鳥居, 泰彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1969
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.62, No.12 (1969. 12) ,p.1268(56)- 1278(66)
JaLC DOI	10.14991/001.19691201-0056
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19691201-0056

コブ-ダグラス型生産函数のデュアルとしての利潤函数について*

鳥居　泰彦

1.　家計主体均衡の理論と利潤函数

私は，先進部門と在来部門の二つの部門概念からなる経済発展理論の研究の一環として，農家家計部門の主体均衡の図式を構築して実測する作業を行なって来た。(注1) 今までに示した主体均衡の理論図式は，はじめ，投入産出の技術条件（生産函数）所与の下で，名目所得と余暇に関する選好場（効用函数）の上で家計が効用極大化行動をしていると仮定するものであった。云い換えると，農業生産函数を技術的与件として，自家農業労働時間，外部兼業時間，余暇時間および所得を効用極大化行動を通じて決定する図式であった。(注2)

私が従来用いて来たこのモデルは，経済理論図式としての capacity あるいは説明能力という観点からみると幾つかの大きな不備を残している。第一に私のモデルは，これまで，農産物価格の概念を捨象して来ていた。農業生産函数を直接，金額表示の単位で測定して，価値限界生産力と名目

* 本稿は，1968年から1969年にかけて，Ford Foundation の援助を受けて，カリフォルニア大学（バークレイ）の Institute of International Studies で行なってきた共同研究の一部である。同研究所の所員として参加することを可能にして下さった，D. W. Jorgenson，辻村江太郎両教授に感謝する。カリフォルニア大学でのこの研究作業は，辻村教授が組織する KEO (Keio Economic Observatory) との密接な連帯の下に行なわれた。KEO のメンバーである西川俊作，井原哲夫，黒田昌裕，新井益洋の諸氏の協力に感謝する。バークレイの研究所で2年の間私のリサーチアシスタントをつとめてくれた Sei Jong Oh 君に心からの感謝を捧げる。彼の献身的とも云える助力は，率直に云って，近頃日本ではあまり見かけることのない優れたアシスタントであった。

注(1) 先進部門と在来部門の二つの部門概念からなるいわゆる dualism の経済発展理論の発生の事情とその理論的性格については鳥居〔6〕Jorgenson〔3〕に総括的なサーベイをしてある。
dualism の発展理論のシステムの中で農家家計部門の行動理論の図式がどのような位置を占めているか，また，具体的にそれらはどのようなものであるかも鳥居〔6〕に要約してある。

(2) この初期のモデル，すなわち，名目所得—余暇選好場と所得造出函数を用いて自家農業労働と農外兼業時間，余暇時間，所得の四者が同時決定する図式とその実測結果は，拙稿〔5〕,〔6〕,〔7〕,〔8〕,〔9〕,〔10〕に示して来た。

賃金率とを直接均衡させて来ていた。この省略は最近の拙稿〔12〕,〔13〕に示したように，新古典派的な物価指数理論と集計理論に基づいて農業生産物価格を正確に測定することによって，大きく修正しつつある。同じようにして，農村消費者物価指数および各種の投入資本財用役の価格についても測定作業を進めている。

第二に，効用函数を余暇時間と所得との間の選好場として定義するという従来私がとって来た方法は，モデルから消費支出の概念を捨象するということを意味していた。効用函数を余暇時間と現物消費および購入消費の三者間の選好場として新らしく定義しなおすことによって，モデルの説明能力が著しく増大することは，最近の拙稿〔13〕にその構想を示してある。(注3)

第三に，従来の農家家計主体の均衡モデルでは，農家主体の生産単位（企業）としての理論的な性格が不問に附されて来た。所得余暇選好函数（あるいは支出余暇選好函数）の極大化を保証している限界生産力条件が，同時に農家生産行動の利潤極大化過程の均衡条件を満たしているという保証はなかったのである。それは，云い換えれば，個々の農産物供給と投入要素需要の内生的決定の図式が組み込まれていなかったことを意味する。

この稿では，この第三の点，すなわち生産者均衡の理論図式の導入の可能性について報告しようとしている。この目的の為に私が採用している最初のアプローチは，農家の主体行動全体を大きく生産者均衡と消費者均衡の二つのブロックに分割して両者を連動させることである。まず生産函数と生産物価格および投入要素価格が所与の下で，利潤極大化原理の仮定に基づいて農産物供給と投入要素需要を導びく。こうして決定される農業収益（利潤）と農業支出（費用）を，次に消費者均衡図式（労働時間と消費支出の選好図式）の所得支出勘定に組み込むという，ブロックリカーシヴの構想が基本になっている。

何故このような構想を採用しなければならないかは一度でも，経済理論を実際のデーターにあてはめるという作業を手がけたことのある者にとっては，およそ自明のことである。すなわち，多くの経済理論が，一方では公理系としての包容力を誇り乍ら，一方ではその非線型性の故に実証不可能のままで終っていることは周知のことである。とりわけ，生産函数や効用函数のように，Cobb-Douglas 型，CES 型，二次形式，ベルヌーイ・ラプラス型といった非線型の特定化を中心に発達して来た函数概念を含んでいる伝統的な家計主体行動の理論図式ではこの懸念は非常に大きい。まして，今私が手がけようとしているように，生産函数と効用函数の両方を含む体系を解くことは，紙とエンピツだけの世界に止まるうちはともかく，いったん実測の世界に持ち込むとなると何等かの工夫をしなければこの関門を突破することはできない。

工夫というのは，具体的には，生産者均衡図式の部分だけをまず家計主体均衡の他の部分から切

注(3) 最近の拙稿〔13〕では，現物消費支出と購入消費支出とを独立に効用函数の中に導入してある。これは，現物消費支出の価格は農業生産物価格であり，購入消費支出の価格は農村消費財物価であって同一物ではないという認識によっている。同じ構想は，ジョルゲンソン・ラウの報告論文〔4〕にも示してある。

り離して測定するという事を意味する。ところが忘れてならないことは，切り離して測定すると云っても測定の過程でモデル全体としての均衡条件が維持されて居なければならないという点である。すなわち，具体的には，独立に計測した生産者均衡の部分モデルで定義される各投入要素の限界生産力と価格が，モデルの他の部分で用いられる限界生産力と価格に均等するという条件を満たしていなければならない。通常の同時推定法を採ればモデルの中に非線型性が入り込んで来るし，生産者均衡のブロックを独立に推定すれば，斉合的な均衡条件が確保されないというディレンマがある。

この問題に対する一つの解決は，プロフィット・ファンクション（利潤函数）の概念(注4)を用いることによって与えられる。一般に生産函数のデュアルとしてプロフィット・ファンクションが導びけることを示したのは，シェファード〔16〕の貢献であった。その後，プロフィット・ファンクションの重要性は宇沢〔14〕によって再確認されて，最近マックファーデン〔15〕が具体的な導出の方法を示した。

2. 利潤函数の基本的性質

ここで，企業行動の均衡図式から導びかれる利潤函数の性質を簡単に説明する。まず，利潤極大原理の生産者均衡図式を整理することから始めよう。いま，説明を単純化するために2種類の要素を投入して1種類の生産物を得ている生産主体（企業）を想定する。この企業は生産函数で表現される投入産出のフロンティアに直面していると考えよう。生産函数を

(2. 1)
$$Y=f(X_1, X_2)$$

で定義する。

生産函数に関して以下の3つの仮定を置く。

(1) 生産函数は2度微分可能である。従って1次微係数 $\frac{\partial Y}{\partial X_1}$, $\frac{\partial Y}{\partial X_2}$ および2次微係数 $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2}$ の全てが存在する。この仮定によって生産函数が屈折点を持つ可能性を排除しておく。

(2) 生産函数は X_1, X_2 の増加函数である。すなわち1次微係数（限界生産力）は正であり，$\frac{\partial Y}{\partial X_1}>0$, $\frac{\partial Y}{\partial X_2}>0$ の条件が満たされていると考える。

(3) 生産函数は strictly concave である。すなわち2次微係数は

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}<0,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}<0,\quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2}\cdot\frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2}>\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \partial X_2}\right)^2$$

の三つの不等号条件を満たしている。このことは等量線が原点に凸（convex）であることを意味し，

注(4) 利潤函数の一般的性質については，稿を改めて〔資料〕として解説するが，〔1〕，〔14〕，〔15〕，〔16〕を参照されたい。

同時に規模拡大が一定比率以下の収穫をもたらす（less than proportional return to scale）ことを意味する。

利潤極大化の仮定は，産出の価格 p_0 と投入要素の価格 p_1, p_2 所与の下で，生産函数（2.1）を制約条件として，利潤 Π を極大化する非負の投入産出量が存在することを意味している。利潤は次のように定義される。

(2. 2)
$$\Pi=p_0Y-p_1X_1-p_2X_2$$

上の3つの仮定の下で利潤 Π の極大値が存在するためには，次の条件が満たされていなければならない。

(2. 3)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi}{\partial X_1}\leqq 0\\[2ex]\dfrac{\partial \Pi}{\partial X_2}\leqq 0\end{cases}$$

(2. 4)
$$X_1\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial X_1}+X_2\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial X_2}=0$$

ただし，$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i}<0$,（$i=1$ or 2）が生ずるのは $X_i=0$,（$i=1$ or 2）の時だけである。したがって投入 X_1, X_2 が共に正の場合だけを考えるならば，均衡解は

(2. 5)
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Pi}{\partial X_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial \Pi}{\partial X_2}=0\end{cases}$$

となる。利潤方程式（2.2）は X_1, X_2 に関して strictly concave な生産函数と線型の費用方程式の差であるからやはり strictly concave である。したがって，(2.5) の解は unique である。(2.5) の解は具体的には

(2. 6)
$$\begin{cases}p_0\dfrac{\partial f}{\partial X_1}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)-p_1=0\\[2ex]p_0\dfrac{\partial f}{\partial X_2}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)-p_2=0\end{cases}$$

という限界生産力条件式を与えることは周知の通りである。ただし，$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ はそれぞれ均衡要素投入量をあらわしている。極大利潤を与える生産量 $\bar{Y}$ は

(2. 7)
$$\bar{Y}=f(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$$

である。

(2. 6)式の2本の均衡方程式と（2.7）式を連立させて（生産物）供給方程式と（要素）需要方程式のセットを誘導することができる。

(2. 8. 1)
$$\bar{Y}=s\ (p_0,\ p_1,\ p_2)$$

(2. 8. 2)
$$\bar{X}_1=d_1(p_0,\ p_1,\ p_2)$$

(2. 8. 3)
$$\bar{X}_2=d_2(p_0,\ p_1,\ p_2)$$

この3本の誘導型はいずれも unique でありかつ continuous であることは，上に設定した3つの仮定によって保証されている。よく知られているように，(2.6) 式で限界生産力は，p_1/p_0，p_2/p_0 の価格比に依存しているので，供給函数も需要もともにゼロ次同次の函数である。

(2.8.1)，(2.8.2)，(2.8.3) の3本の誘導型方程式で与えられる $\bar{Y}$, $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ はいずれも，投入産出の価格体系が与えられた時に極大利潤を与える産出量と投入量の均衡水準をあらわしている。したがって利潤極大化の均衡解である均衡利潤 $\bar{\Pi}$ は

(2.9) $$\bar{\Pi}=p_0\bar{Y}-p_1\bar{X}_1-p_2\bar{X}_2$$

で定義される。

(2.9) 式に (2.8.1)，(2.8.2)，(2.8.3) 式を代入して (2.10) のように書き表わすことができる。

(2.10) $$\bar{\Pi}(p_0,\ p_1,\ p_2)=p_0\cdot s(p_0,\ p_1,\ p_2)-p_1\cdot d_1(p_0,\ p_1,\ p_2)-p_2\cdot d_2(p_0,\ p_1,\ p_2)$$

(2.10) 式はプロフィット・ファンクション（利潤函数）である。利潤函数は (2.2) 式の利潤方程式とは異なることに注意すべきである。利潤函数は，極大利潤自身が投入および産出の価格 p_0, p_1, p_2 の函数であることを示している。

次に，利潤函数からも生産物供給函数と投入要素需要函数を導びくことができることを示そう。利潤函数から供給函数と需要函数が導びけるというこの性質は，前の節で述べた目的にとって2つの意味で非常に重要である。すなわち第1にもし利潤函数を適当に特定化することによって誘導型（供給函数と需要函数）の線型性を維持することができれば，たとえ生産函数自身が非線型であっても，事実上推定すべきモデルの線型性を維持できる可能性がある。第2に，以下に示すように，利潤函数から導びかれる供給函数と需要函数は均衡価格の函数として定義されるから，利潤函数，供給函数および需要函数が構成する生産者主体均衡のブロックの推定に用いた価格データーは均衡価格として家計主体均衡のブロックに持ち込まれる。もともと前節で提起した問題点はこの2点であったのだから，この手続きによって問題が解決することになる。

生産物供給函数と投入要素需要函数は次のようにして利潤函数から導びかれる。利潤函数を生産物価格 p_0 で微分して，

(2.11) $$\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial p_0}=s+p_0\frac{\partial s}{\partial p_0}-p_1\frac{\partial d_1}{\partial p_0}-p_2\frac{\partial d_2}{\partial p_0}$$

ところで元の生産函数の別の表現は (2.7)，(2.8.1)，(2.8.2)，(2.8.3) を用いて書きなおせば

(2.12) $$s=f(d_1,\ d_2)$$

なのであるから $\frac{\partial s}{\partial p_0}$ は次のようになる。

(2.13) $$\frac{\partial s}{\partial p_0}=\frac{\partial f}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial d_1}{\partial p_0}+\frac{\partial f}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial p_0}$$

(2.13) 式を (2.11) 式に代入して次式を得る。

(2.14) $$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial p_0}&=s+p_0\left[\frac{\partial f}{\partial X_1}\cdot\frac{\partial d_1}{\partial p_0}+\frac{\partial f}{\partial X_2}\cdot\frac{\partial d_2}{\partial p_0}\right]-p_1\frac{\partial d_1}{\partial p_0}-p_2\frac{\partial d_2}{\partial p_0}\\&=s+\frac{\partial d_1}{\partial p_0}\left[p_0\frac{\partial f}{\partial X_1}-p_1\right]+\frac{\partial d_2}{\partial p_0}\left[p_0\frac{\partial f}{\partial X_2}-p_2\right]\\&=s\end{aligned}$$

すなわち，(2.14) 式は利潤函数の生産物価格に関する一次微分が供給函数そのものを与えることを示している。

次に利潤函数 (2.10) 式を投入要素 X_1 の価格 p_1 で微分し，上と同様の手続きをとると，

(2.15) $$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial p_1}&=p_0\frac{\partial s}{\partial p_1}-p_1\frac{\partial d_1}{\partial p_1}-d_1-p_2\frac{\partial d_2}{\partial p_2}\\&=\left[p_0\frac{\partial f}{\partial X_1}-p_1\right]\frac{\partial d_1}{\partial p_1}+\left[p_0\frac{\partial f}{\partial X_2}-p_2\right]-d_1\\&=-d_1\end{aligned}$$

(2.15) 式は利潤函数の p_1 に関する一次微分が第1投入要素 X_1 の需要函数の負値を与えることを示している。同様にして利潤函数の第2投入要素価格に関する1次微分は第2投入要素 X_2 の需要函数の負値を与える。(注5)

(2.16) $$\frac{\partial\bar{\Pi}}{\partial p_2}=-d_2$$

供給函数も需要函数もそれぞれゼロ次同次の函数であるから，さかのぼって利潤函数は1次同次函数であることがわかる。利潤函数の1次同次性は，生産函数が一般に n 次同次（n は必らずしも1ではない）の下で常に保証されていることに注意されたい。

よく知られているように，全ての投入要素についての収穫不変(constant return to scale) が存在する時には利潤函数は存在しない。

3. 利潤函数導出のための変換と基本定理

前節の説明で利潤函数の性質が明らかになった。と同時に，基本的には通常の生産者均衡の図式から誘導型たる要素需要方程式を導出してこれを目的函数たる利潤方程式に代入することによって利潤函数が得られることが判明したと思う。けれども，この方法は実際やってみると，元の生産函数の形式がちょっと複雑になると非常に複雑なことになってたいへんである。ここでは，この直接的な方法に替る方法についてみよう。

利潤函数を導出するためのもう一つの方法をみるに先立って，あらかじめ二つの事柄を確認しておこう。第1に目的函数たる利潤方程式を通常とは多少異なった方法で記述することにしよう。い

注(5) 利潤函数を価格で微分すると供給函数と需要函数が導びかれるということは Shephard のレンマとして知られている。Shephard [16] 参照。

ま，通常の利潤方程式を

(3. 1) $$\Pi = p_0 F(X_1, \cdots\cdots, X_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i X_i$$

であらわす。Πは利潤，p_0 は生産物価格，p_i は第 i 投入要素価格，X_i は第 i 要素投入量をあらわす。

投入要素価格 p_i を生産物価格 p_0 で除した値を p_i^* であらわす。

(3. 2) $$p_i^* = p_i / p_0$$

(3.2) 式で定義した価格比をここで「単位価格」と呼ぶことにする。この単位価格を用いて (3.1) 式の利潤方程式を書き直すと，

(3. 3) $$\Pi = p_0 [F(X_1, \cdots\cdots, X_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i^* X_i]$$

さらに，利潤Πも単位価格表示にしたものをΠ* として (3.4) 式のように定義すれば

(3. 4) $$\Pi^* = F(X_1, \cdots\cdots, X_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i^* X_i$$

(3.4) 式は単位価格表示の利潤方程式である。この単位価格表示の利潤方程式に利潤極大化問題の均衡解である均衡要素投入量 $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots\cdots, \hat{X}_m$ を代入すると，単位価格表示の利潤函数（利潤方程式ではない）が (3.5) のように定義される。

(3. 5) $$\begin{aligned}\Pi^* &= F(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots\cdots, \hat{X}_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i^* \hat{X}_i \\ &= \Pi^*(p_1^*, p_2^*, \cdots\cdots, p_m^*)\end{aligned}$$

明らかに利潤Πと単位価格表示の利潤Π* との間の関係は

(3. 6) $$\Pi = p_0 \Pi^*$$

であるから利潤函数をこの表記法で書けば，

(3. 7) $$\begin{aligned}\Pi &= p_0 [F(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \cdots\cdots, \hat{X}_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i^* \hat{X}_i] \\ &= \Pi(p_0, p_1^*, p_2^*, \cdots\cdots, p_m^*)\end{aligned}$$

となる。ところで，(3.6) あるいは (3.7) 式を (3.5) 式と比較すればわかるように，Πの極大化とΠ* の極大化とは同値である。実際には，この後の説明でわかるように利潤Πの概念を用いるよりも単位価格表示の利潤Π* を用いる方が利潤函数の導出は容易である。

次にあらかじめ確認しておくべきもう一つの点をみよう。前節に示した利潤方程式から利潤函数へのデュアリティーの変換を，いま上で確認した単位価格表示の利潤 Π* と単位価格表示の価格変数 p_i^* を用いて書けば次のようになる。

(A) 単位価格当り利潤方程式 (3.8. P) のデュアルは単位価格当り利潤函数 (3.8. D) である。(注6)

注(6) 元の利潤極大化体系からその デュアルとして導びかれる利潤函数を Indirect Profit Function と呼ぶ。なお，これ以下の表記で式番号を (3.8. P) のようにあらわすのは変換の元の式 (Primal) の意味であり，(3.8. D) のようにあらわすのは変換後のデュアル (Dual) の式の意味である。

(3.8. P) $$\Pi^* = F(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m) - \sum_{i=1}^{m} p_i^* X_i$$

(3.8. D) $$\Pi^* = \Pi^*(p_1^*, p_2^*, \cdots\cdots, p_m^*)$$

(B) 変換を施こす前の均衡条件は (3.9. P)，(3.10. P)，(3.11. P) の三式で示され，それぞれのデュアルは (3.9. D)，(3.10. D)，(3.11. D) で示される。

(3. 9. P) $$\frac{\partial F}{\partial X_i} = \frac{p_i}{p_0} = p_i^*$$

(3.10. P) $$X_i = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*}$$

(3.11. P) $$F = \Pi^* - \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*} p_i^*$$

(3. 9. D) $$p_i^* = \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

(3.10. D) $$\frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*} = -X_i$$

(3.11. D) $$\Pi^* = F - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_i} X_i$$

(C) 単位価格表示の利潤函数は2回微分可能であり，単位価格 p_i^* に関して凸 (strictly concave) なる函数である。

(D) 単位価格表示の利潤函数は p_i^* に関して減少 (strictly decreasing) 函数である。

以上のことを承知した上で，利潤函数を導出するために次の定理を用いる。

〔定理〕 単位価格表示の利潤函数が $-\frac{k}{1-k}$ 次同次であれば，元の生産函数 (strictly quasi-concave production function) は k 次同次函数である。

この定理は次のようにして証明される。オイラーの定理によって

(3.12) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_i} X_i = kF$$

先程整理した (A)，(B) のデュアルの変換を用いて

(3.13) $$-\sum_{i=1}^{m} p_i^* \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*} = k\Pi^* - k\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*}$$

故に

(3.14) $$\sum_{i=1}^{m} p_i^* \frac{\partial \Pi^*}{\partial p_i^*} = -\frac{k}{1-k} \Pi^*$$

かくして，オイラーの定理によって，(3.14) 式はΠ* が $-\frac{k}{1-k}$ 次同次であることを示している。上の証明の過程は逆にたどって行くことも可能である。故にこの定理は必要充分条件を述べている。(注7)

注(7) $k=1$ の時 (Constant return to scale の時) strictly quasi-concave の仮定が満たされないことに注意せよ。

4. コブ-ダグラス型生産函数から導びかれる利潤函数

ここで，以上に整理したデュアルの変換手続きと〔定理〕を用いて，k 次同次のコブ-ダグラス型生産函数の仮定の下ではどのような利潤函数が存在するかをみよう。まず，生産函数を下のようにコブ-ダグラス型で定義する。

(4. 1) $$Q=\prod_{i=1}^{m} X_i^{\alpha_i},\quad \text{ただし}\quad \left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=k\right)$$

前節で整理した変換手続きと定理を用いれば全ての i について (4. 2) 式の関係が成立する。

(4. 2) $$\alpha_i(1-k)^{-1}\Pi^*=-p_i^*\frac{\partial\Pi^*}{\partial p_i^*}$$

いま $\alpha_i(1-k)^{-1}$ を改めて β_i とおけば (4. 2) 式は (4. 3) 式のように書ける。

(4. 3) $$\beta_i\Pi^*=-p_i^*\frac{\partial\Pi^*}{\partial p_i^*}\qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ m$$

(4. 3) 式は対数変換して次のように書ける。

(4. 4) $$-\beta_i=\frac{\partial\log\Pi^*}{\partial\log p_i^*}\qquad i=1,\ \cdots\cdots,\ m$$

(4. 4) 式を積分して (4. 5) 式を得る。

(4. 5) $$\log\Pi^*=-\beta_i\log p_i^*+h_i(p_1^*,\ \cdots\cdots,\ p_j^*,\ \cdots\cdots,\ p_m^*)\quad i\neq j$$

ここで函数 h_i は p_i^* 以外の全ての p_j^* に関する任意の函数である。すべての i についてこの関係が成立することに着目すれば (4. 6) あるいは (4. 7) が成立する。

(4. 6) $$\log\Pi^*=-\sum_{i=1}^{m}\beta_i\log p_i^*$$

(4. 7) $$\Pi^*=\prod_{i=1}^{m}p_i^{-\beta_i}$$

コブ-ダグラス型生産函数の仮定の下ではそのデュアルとしての利潤函数はやはりコブ-ダグラス型となることがわかる。

前節でみたように (4. 7) 式の利潤函数の一次微分は投入要素の需要函数を与える。また前節でみたように，需要函数は0次同次函数である。第 i 投入要素の需要函数は (4. 8) 式で与えられる。

(4. 8) $$X_i=-\frac{\partial A\Pi^*}{\partial p_i^*}=A\frac{\beta_i\Pi^*}{p_i^*}$$

ここでAは任意の定数である。ここでこのAの値を含めて (4. 7) 式と (4. 8) 式で与えられる体系から元のパラメターを識別できるのかという疑問が起る。このことを確かめるために $\beta_i=\alpha_i(1-k)^{-1}$ と (4. 8) 式を (4. 1) 式に代入する。

(4. 9) $$Q=A^k\left(\prod_{i=1}^{m}\beta_i^{\alpha_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{m}p_i^{-\alpha_i}\right)$$
$$=A^k(1-k)^{-k}\left(\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i}\right)\Pi^*$$

ところで〔定理〕によって

(4. 10) $$Q=A(1-k)^{-k}\Pi^*$$

であるから，(4. 9) と (4. 10) は同値でなければならないから (4. 11)，(4. 11)′ をへて (4. 12) を得る。

(4. 11) $$A^k(1-k)^{-k}\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i}=A(1-k)^{-1}$$

(4. 11)′ $$A^{1-k}=(1-k)^{1-k}\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i}$$

(4. 12) $$A=(1-k)\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i(1-k)^{-1}}$$

かくして単位価格表示の利潤函数はあらためて (4. 13) 式であらわすことができる。

(4. 13) $$\Pi^*=(1-k)\left[\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i(1-k)^{-1}}\right]\left[\prod_{i=1}^{m}p_i^{*\,-\alpha(1-k)^{-1}}\right]$$
$$=(1-k)\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{p_i}{\alpha_i}\right)^{-\alpha_i(1-k)^{-1}}$$

第 X_i 投入要素の需要函数をあらためて書けば

(4. 14) $$X_i=\alpha_i\left[\prod_{i=1}^{m}\alpha_i^{\alpha_i(1-k)^{-1}}\right]\frac{\Pi^*}{p_i^*}$$

(4. 13) 式と (4. 14) 式を見くらべればわかるように k の大きさが判っていれば α_i は識別可能である。

以上で，コブ-ダグラス型生産函数を仮定する利潤極大化過程のデュアルとしての利潤函数と需要函数群が導出された。これらの函数を実際のデーターで測定する作業については稿を改めて報告する。

文　献

[1] Debreu, G., *Theory of Value*, Cowels Commission Monograph, No. 17, Wiley, 1659.

[2] Jorgenson, D. W. "Testing Alternative Theories of the Development of a Dual Economy," in '*The Theory and Design of Economic Development*', ed. by Adelman and Thorbecke, the Johns Hopkins Press, Baltimore, 1966.

[3] Jorgenson, D. W., "Surplus Agricultural Labour and the Development of a Dual Economy," *Oxford Economic Papers*, Vol. 19, No. 3, November 1967.

[4] Jorgenson, D. W. and Lau, L. J., "An Economic Theory of Agricultural Household Behavior," paper presented at the Fourth Far Eastern Meeting of the Econometric Society, June, 1969, Tokyo.

[5] 鳥居泰彦 "農家家計構成員の労働供給スケジュール〔I〕，常住男子家族の労働供給スケジュールの計測"，「三田学会雑誌」，58巻5号，1965年5月。

[6] 鳥居泰彦「経済発展理論と労働供給主体の均衡図式」，経済学年報第9号，1966年。

[7] 鳥居泰彦，"農業部門の限界生産力測定"，「季刊理論経済学」，16巻3号，1966年。

[8] Torii, Yasuhiko, "Labor Supply Model of the Farm Household in the Dualistic Development Theory," Working Paper SANGYO KENKYU-JO, KEIO UNIVERSITY, 1967.

[9] Torii, Yasuhiko, "A Labor Supply Model of Traditional Sector," read at the Second Far-Eastern Meeting of the Econometric Society, Tokyo, 1967. Summary in *Econometrica* Vol. 36, No. 5, Supplementary Issue, 1968, pp. 10-10A.

[10] 鳥居泰彦,"農業限界生産力と賃金上昇",一橋大学「経済研究」

[11] 鳥居泰彦,"農業限界生産力と賃金" 有沢広已編『労働市場の長期展望』 東洋経済新報社,1968年,第7章。

[12] Torii Yasuhiko, "A Note on the Gross Incomes of Farm Households," Working Paper, Institute of International Studies, University of California, Berkeley 1969.

[13] 鳥居泰彦,"農村物価指数の測定"「三田学会雑誌」,62巻8号,1969年8月。

[14] Uzawa, H., "Duality Principles in the Theory of Cost and Production," *International Economic Review*, May 1964.

[15] McFadden, Daniel, "Cost, Revenue, and Profit Functions: A Cursory Review," Working Paper No. 86, March 17, 1966, Institute of Business and Economic Research, Univ. of Calif.

[16] Shephard, R., *Cost and Production Functions*, Prinston University Press, 1953.

研究ノート

ヌルクセの均整成長命題について

— 多部門化の効果 —

中 沢 敏 明

序

低開発国が貧困であるのは何故か,また貧困から脱却する手段・戦略は如何なるものかという問に対して与えたヌルクセの答は夫々「貧困の悪循環」であり,「均整成長」であった。ヌルクセが〔2〕第一章で使用している"貧困"という言葉が,所得の水準に関してのものか成長率についてのものか,国民ベイスでとらえられたものか一人当りかなどは不明確であるが,それはさておくとすると,彼は低開発国が低生産力→低実質所得→低購買力→低投資誘因→低生産力という連鎖に陥っているが故に"貧困"なのだという。それはつきつめれば「低開発均衡」が存在し,そこで経済諸変数が内部無矛盾的になっているということに他ならないし,「経済の体系の内部には,一定水準にそれを繋ぎ止めておこうとする自動的な諸力があることは明らかである。……だが幸いにもその循環は破れないものではない。しかもそれがある点で一旦破られると,その関係が循環的であるというまさにその事実が累積的発展を助長する傾向を帯びるのである」というくだりは,経済体系が一つの安定な均衡点から新しい安定な均衡点へ移行する状況を示すものと解して妥当であろう。この安定な低位均衡点をシフトさせうる外的要因が,市場を広めて生産活動を促しそれによって購買力を高めうるような要因でなければならないことは,先の「悪循環」に照してみれば同義反復的に明かだが,その一つは今まで存在していなかった産業の導入である。しかし新しく設立された産業が唯一つでは,その産業自体が需要不足によって失敗に帰すだろう。何故なら「新産業に従事する人々は自らの生産物に全所得を支出しようとはしない」から。人間の消費需要の多様性が,単独の新産業が成功しえないことの理由ならば,多様な消費需要のパターンに合わせてさまざまな産業を興し同時的に生産を開始すれば,ある産業から支払われた要素所得が丸々自らに還流せず他産業へ流れようとも,他産業従事者からのこの産業製品への需要の流れが他方に存在することにより,結局全産業が成功しうると考えられる。これがヌルクセの主張する市場の全般的拡大の鍵であって,「均整成長」とか「釣合いのとれた成長」とよばれる。ここで"釣合い"とか均整という語の意味は,顕在的なものは勿論だが潜在的なものを含めて多様な消費需要のパターンに,生産のパターンを市場の拡大をもたらすべく合致させるの意であるから,「均整成長」を"消費財産業を多数興すことによる成長"すなわち多部門化と言い換えても大同小異であると考える。かかる「均整成長」によって,"貧困"からの脱却が所期の通り達成可能か否か,可能だとすればその条件は何かについて吟味することが小論の主題である。

高山〔7〕は二部門モデルによる比較静学分析を行い均整成長命題について総括的に扱っているが,そこにはヌルクセの"製靴産業"(新設産業)は登場しない。二部門は終始二部門のままである。この二部門経済で利用可能な資本の増加があったとする。それを,もし一方の産業にのみ投資すれば効率が悪いので全産業(今の場合,両産業)に適当に配分せねばならない。他方,資本ばかりでなく労働も増加した場合には資本レントは増加し,それが投資を誘発して,ヌルクセの言うように「広範囲の異種産業に多少とも同時的に資本を使用することによって,その困難(投資誘因の不足)は解消する」かもしれない。ではそのための条件は何か。それが高山の定理5 $\hat{K} \leq \delta \hat{L}$ である。資源の増加率の間にこの不等号関係が成立することが資本レントが減少しないための必要十分条件である。δ は生産構造・需要構造によって定まる値。(しかし明かなように