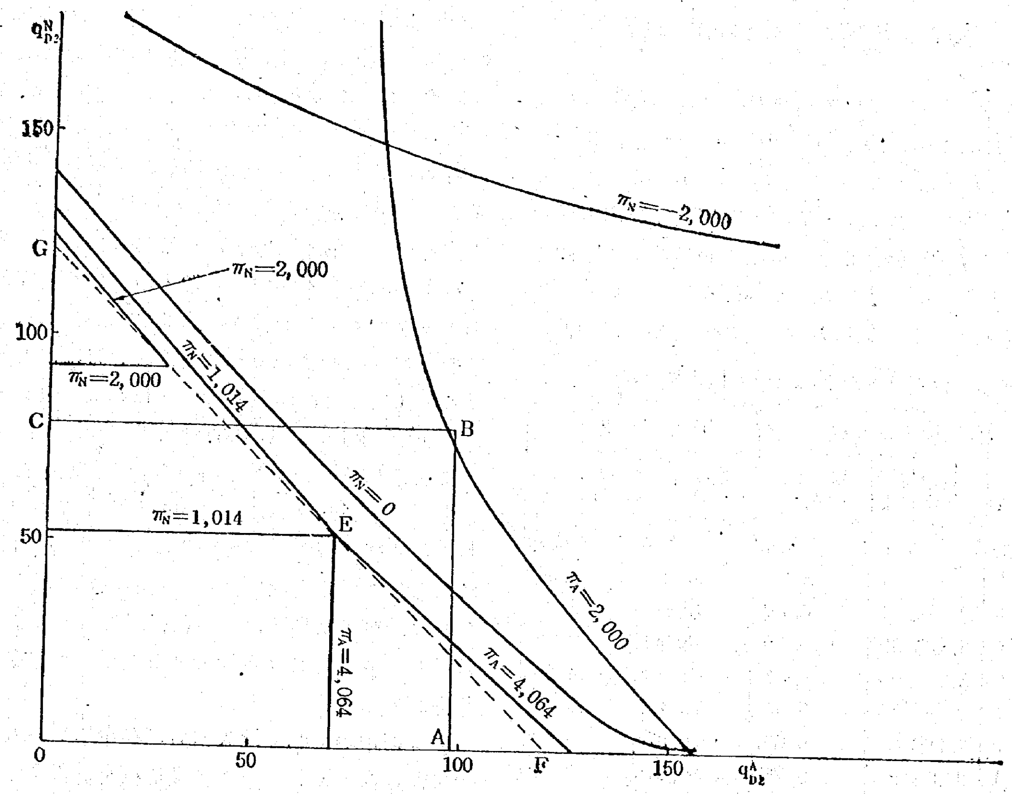
Title	分布ラグとアーモン・ウェイト
Sub Title	Distributed lag and Almon weight
Author	蓑谷, 千凰彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1969
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.62, No.8 (1969. 8) ,p.967(201)- 975(209)
JaLC DOI	10.14991/001.19690801-0201
Abstract	
Notes	寺尾琢磨教授退任記念特集号 研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19690801-0201

図 10 磨き板 1960 年上期



の供給量の増減は一方の企業の利潤に影響を与えないからである。

このような等利潤曲線群を想定すれば，市場均衡点Eは各企業にとって他企業の供給量を所与としたときの利潤最大点であることは明らかである。また例えば旭硝子が国内供給量 $q_{D2}{}^A$ を増せば，日本板硝子は直線 GF にそってE点からF点の方向へ移動せざるを得ないであろう。直線 FG からの垂直方向への離脱は日本板硝子にとり利潤の減少を意味する。また逆に日本板が供給量 $q_{D2}{}^N$ を増すとき，旭硝子は直線 GF にそってE点からG方向へ移らざるを得ない。かくして各企業の他企業の行動に関する臆測変動の値は -1（直線 FG の勾配）に等しくなるであろう。しかし実際には，一方の企業が供給量の増加を続行することに対し，他企業はその供給量の減少の割合を減少させることによりこれを阻止しようとするであろうから，臆測変動の値は -1 より若干大きくなる可能性がある。

表1において 1956 年から 1965 年にかけて磨き板の臆測変動の推定値が旭硝子が -0.9 前後，日本板が $-1 \sim -0.8$ 程度になっている。これらの結果に関する一つの解釈として上述のような説明を与えることができるであろう。

5. 結　論

以上の結果をまとめれば次のようになるであろう。

(1) 観測期間中，普通板・変り板ガラス市場では，輸入圧力は余り存在せず，各企業の供給量は，国内の競争相手の出方のみを考慮して決まっている。旭硝子は相手方企業の供給量の報復的な反応をほとんど無視して独自に利潤最大点に近く供給量を定めている。これに対し日本板硝子は旭硝子の報復的な反応を考慮に入れながら行動せざるを得ないようである。

(2) 分析の期間，磨き板ガラス市場では，旭・日本板が複占市場を形成していたが，製品の価格弾力性が低いため，2社の総供給量の減少はたちまち価格騰貴を招き，輸入圧力が強く存在する。このため，等利潤曲線群は市場均衡点を通るマイナス1の勾配の直線上に頂点を持つ図 10 のような曲線群となり，一つの企業の供給量の増加に対し，他企業は供給量の減少によって反応せざるを得ない。このようなことから各企業は他企業の供給に関し経験的にマイナス1に近い臆測変動を持つに至る。表1の臆測変動の推定結果はこのような事情と整合的である。

分布ラグとアーモン・ウェイト

蓑谷　千凰彦

I

分布ラグのモデルにおいて，ラグ・ウェイトを推定する方法には，先験的にラグ・ウェイトの分布を仮定する方法（幾何級数的分布[(1)]，パスカル分布[(2)]，逆V字型分布[(3)]等々）と，先験的に分布を仮定しないでラグ・ウェイトそのものを推定する方法がある。シャーリー・アーモンによって開発された方法[(4)]は後者のタイプであるといえよう。この論文の目的はアーモンの方法で推定されたラグ・ウェイト（これをアーモン・ウェイトと呼んでおこう）の統計的安定性を確かめることにある。

IIでアーモン・ウェイトに関して簡単に概説を行なう。そこでは n 重の幾何級数的遅れを仮定したときの総時定数は n 次のパスカル分布の平均ラグに等しいことも示される。IIIでアーモン・ウェイトの推定結果が検討され，従属変数のラグ付変数を説明変数として含んでいるモデルから計算されるラグ・ウェイトとアーモン・ウェイトとはかなり異なる場合があることが示される。

II

次のような分布ラグのモデル

$$Y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\beta_i X_{t-i} \tag{1}$$

を考えよう。(1)を

$$Y_t=\beta\sum_{i=0}^{\infty}w(i)X_{t-i} \tag{2}$$

ここで $\beta=\sum_i\beta_i$, $w(i)=\dfrac{\beta_i}{\sum_i\beta_i}$, $\sum_{i=0}^{\infty}w(i)=1$ と書き直し，$\sum_i\beta_i<\infty$, β_i はすべての i に関して同符号であるという仮定を設けることによって，$w(i)$ は $w(i)\geqq 0$, $\sum_i w(i)=1$ を満足する確率と考えることができる。ラグ演算子を L，つまり

$$X_{t-i}=L^iX_t$$

とすると，(2)は

$$Y_t=\beta W(L)X_t \tag{3}$$

ここで $W(L)=w(0)+w(1)L+w(2)L^2+\cdots\cdots$

と書くことができる。そしてすべての $w(i)$ は非負で，$W(1)=1$ であるから，$W(L)$ を確率母関数（i という値をとる確率は $w(i)$）と解釈できる。確率母関数の性質より

$$\text{平均ラグ}\quad E\theta=\left.\frac{dW(L)}{dL}\right|_{L=1}$$

$$\text{ラグ分布の分散}\quad \mathrm{Var}\theta=\left.\frac{d^2W(L)}{dL^2}\right|_{L=1}+\left.\frac{dW(L)}{dL}\right|_{L=1}-\left\{\left.\frac{dW(L)}{dL}\right|_{L=1}\right\}^2 \tag{4}$$

となる。

ラグ・ウェイト $w(i)$ の分布に関しては幾何級数的分布，パスカル分布，逆V字型分布などを考えることができる。たとえば，n 次のパスカル分布を仮定すると，

$$w(i)=\binom{n+i-1}{i}(1-\lambda)^n\lambda^i \tag{5}$$

であり，(5)を(2)へ代入して

$$Y_t=\frac{\beta(1-\lambda)^n}{(1-\lambda L)^n}X_t \tag{6}$$

と書くことができる。

注（1）　参考文献 (6)
（2）　〃　(8)
（3）　〃　(2)
（4）　〃　(1)

$$W(L)=\frac{(1-\lambda)^n}{(1-\lambda L)^n} \qquad (7)$$

とすれば，

$$\text{平均ラグ}\ E\theta=\frac{n\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{ラグ分布の分散}\ \mathrm{Var}\theta=\frac{n\lambda}{(1-\lambda)^2} \qquad (8)$$

が得られる。

その他に，n 重の幾何級数的遅れを仮定して

$$Y_t=\beta\left(\frac{n\mu}{\Delta+n\mu}\right)^n X_t \qquad (9)$$

というモデルを考えることがある。ここで Δ は差分演算子である。この n 重の幾何級数的遅れを仮定することは n 次のパスカル分布を仮定することと同じである。なぜなら，差分演算子 Δ とラグ演算子 L との間には

$$\Delta Y_t=Y_t-Y_{t-1}=Y_t-LY_t=(1-L)Y_t$$

だから，$\Delta=1-L$ という関係があり，更に

$$1+n\mu=\frac{1}{\lambda}$$

とおいて，これを(9)へ代入して整理すると

$$Y_t=\beta\left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda L}\right)^n X_t$$

が得られ，これは n 次のパスカル分布(6)にほかならない。そして n 重の幾何級数的遅れを仮定したときの総時定数を T とすると

$$T=\frac{1}{\mu}=\frac{n\lambda}{1-\lambda}$$

となり，最後の項は n 次パスカル分布の平均ラグであるから，総時定数 T はパスカル分布の平均に等しい。

これまで述べてきた分布が，分布の型を先験的に仮定していたのにくらべ，アーモン・ウェイトはそうではない。アーモンの方法を簡単に記しておこう。

アーモンの方法は次の通りである。

仮定 1　ある期の X は n 期間にわたって Y に影響を与える。

この仮定により

$$Y_t=\sum_{i=0}^{n-1} w(i)X_{t-i} \qquad (10)$$

と書くことができる。

仮定 2　ラグ・ウェイト $w(i)$ は多項式上の点としてあらわされる。

いま，点 $x_i(i=0,1,2,\cdots\cdots,q+1)$ において，多項式 $w(x)$ は与えられた値 b_i をとるものとする。次数が高々 $q+1$ 次の二つの多項式が相異なる $q+2$ 個の点で一致すれば，二つの多項式は一致するから，このような多項式はただ一つしかあり得ない。このとき，区間 $[0,n]$ 内のすべての $w(i)$ は，

$$w(i)=\sum_{j=0}^{q+1}\phi_j(i)b_j \quad (i=0,1,\cdots\cdots,n-1) \qquad (11)$$

によって計算できる。ここで $\phi_j(i)$ はラグランジュ補間多項式の $x=i$ における値であり，

$$\phi_j(i)=\frac{\prod_{j\neq i}(x-x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_j-x_i)} \qquad (12)$$

である。ラグ構造を(10)と仮定したことは，$w(-1)=w(n)=0$ と仮定したことに等しいから $x_0=-1$，$x_{q+1}=n$，$b_0=b_{q+1}=0$ とおく。このとき(11)は

$$w(i)=\sum_{j=1}^{q}\phi_j(i)b_j \qquad (13)$$

となる。(13)を(10)に代入して次式を得る。

$$Y_t=\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\sum_{j=1}^{q}\phi_j(i)b_j\Big)X_{t-i}=\sum_{j=1}^{q}b_j\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\phi_j(i)X_{t-i}\Big) \qquad (14)$$

アーモン・ウェイトの計算は，独立変数 $X_{t-i}(i=0,1,\cdots\cdots,n-1)$ を変数変換して $\sum_{i=0}^{n-1}\phi_j(i)X_{t-i}$ $(j=1,\cdots\cdots,q)$ とし，(14)の b_j を最小自乗法で推定し，その推定された b_j を使って(13)より $w(i)$ を計算する。

以上述べてきたことから，アーモン・ウェイトの統計的安定性を云々する場合，次のことが問題となる。

（ⅰ）分布ラグの及ぶ範囲（n の大きさ）

（ⅱ）パラメータポイントの数（q の値）

（ⅲ）パラメータポイントの位置（q の位置）

これ以外に，時間に関する集計とアーモン・ウェイトの安定性，たとえば四半期データで推定されたアーモン・ウェイトの最大値が 2 期前であったとき，半年データで推定したときのアーモン・ウェイトの最大値が 1 期前となるかどうかというようなことも問題とすべきであろう。

アーモンの方法は，ラグの及ぶ範囲はどこまでかを推定するのではなく，先験的に決めるわけであるが，先験的に(12)の n の大きさについて何らかの情報をもっていることは少ないであろう。したがって，n の大きさをいくつにするかは，結局いろいろ n を動かしてみて $w(i)$ を推定するより他に方法がない。

（ⅱ）のパラメータポイントの数を決めることは $w(i)$ が存在している多項式の次数を決めることだが，これについても前もって何らかの知識をもっているとは考えることができないから，通常 q は 2 あるいは 3 ぐらいにおかれる。もし，この q をいろいろかえることによってアーモン・ウェイトの値が大きくかわるとすればアーモン・ウェイトの安定性が問われねばならない。しかし，本論文ではこの点に関しては考察していない。

（ⅲ）のパラメータポイントの位置をどこにきめるかということは，多項式近似による誤差の大きさに影響を与える。この点に関してはチェビシェフの基準があり，それによれば区間 $[-1,1]$ で真の関数 $w(x)$ を $q+1$ 次の多項式 $p(x)$ で近似するとき

$$\max_{-1<x<1}|w(x)-p(x)|$$

を最小にするためには，パラメータポイントの位置 q を $q+2$ 次のチェビシェフ多項式の根として選べばよい。たとえば $q=3$ とすると，$q+2=5$ 次のチェビシェフ多項式の根は

$$T_5(x)=\cos(5\cos^{-1}x)=0$$

で与えられる。これを解いて

$$x=\cos\frac{(2n+1)\pi}{10} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

これより $x=0.95,\ 0.59,\ 0,\ -0.59,\ -0.95$ を得るから，パラメータポイントの位置として，区間 $[-1,\ 1]$ で $-0.59,\ 0,\ 0.59$ をとる。

結局，n，q の値を決めれば，q の位置はチェビシェフの基準によって決定される。したがって，q の値によってアーモン・ウェイトの値が大きくかわることはないとすれば，アーモンの方法によって最適ラグを決定する基準は，通常の統計的な基準（決定係数，残差分散など）と符号条件ということになるであろう。

この論文で検討するのは，上記（ⅰ）～（ⅲ）に関するアーモン・ウェイトの統計的安定性ではなくて他の方法から得られるラグ・ウェイトとアーモン・ウェイトとの比較である。

Ⅲ.

推定するラグ構造は法人利潤（税引後）と投資支出，所得と消費支出の間の関係であり，ラグ・ウェイトをアーモンの方法によって推定し，その最適ラグ構造と別の方法によって得られるラグ・ウェイトとを比較してみよう。使用したモデルは，

$$\frac{I_f}{p_i}=\sum_{i=0}^{n-1}w_1(i)\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_{-i}+\sum_{i=2}^{4}a_iQ_i+a_1 \qquad (15)$$

$$\frac{C}{p_c}=\sum_{i=0}^{n-1}w_2(i)\left(\frac{Y_d}{p_c}\right)_{-i}+\sum_{i=2}^{4}b_iQ_i+b_1 \qquad (16)$$

〔表-1〕　アーモン・ウェイト $w_1(i)$

i								
0	0.283	0.257	0.234	0.213	0.192	0.172	0.156	0.144
1	0.255	0.259	0.256	0.249	0.237	0.223	0.209	0.198
2	0.146	0.165	0.183	0.193	0.199	0.200	0.197	0.192
3	0.084	0.081	0.095	0.111	0.129	0.142	0.150	0.152
4	0.102	0.054	0.041	0.045	0.061	0.078	0.092	0.099
5	0.129	0.082	0.038	0.018	0.019	0.028	0.041	0.048
6		0.102	0.069	0.031	0.010	0.005	0.008	0.011
7			0.084	0.064	0.030	0.008	−0.002	−0.007
8				0.075	0.059	0.031	0.009	−0.005
9					0.065	0.056	0.033	0.014
10						0.058	0.055	0.040
11							0.053	0.060
12								0.054
S. W.	3.082	3.091	3.103	3.116	3.126	3.137	3.150	3.171
$\overline{R}$	0.986	0.987	0.987	0.988	0.987	0.987	0.986	0.986
$\overline{S}$	58.3	56.4	55.5	54.7	55.7	57.2	59.1	59.5

推定は 30/1-3～41/10-12 四半期データ季節調整前　パラメータポイント q は 3 である。

分布ラグとアーモン・ウェイト

である。ここで I_f は名目民間設備投資，p_i はそのデフレーター，Y_c は法人所得，T_c は法人税および税外負担，C は名目個人消費支出，p_c はそのデフレーター，Y_d は可処分所得，[5] Q_i は季節ダミー(Q_2 は 4…6月=100)である。

アーモン・ウェイトを〔表-1〕および〔表-2〕に掲げた。表で $\overline{R}$ は自由度修正済重相関係数，$\overline{S}$ は残差の標準偏差，S.W. はラグ・ウェイトの合計を示す。

アーモン・ウェイトはウェイト合計が1になるよう規準化してある。〔表-1〕より民間設備投資の税引後の法人利潤に対する時間的反応をみると，ある期の法人利潤は大体8期(2年)にわたって民間設備投資に影響を与えるものと考えられる。しかも，影響の約77%は始めの4期のうちにあらわれる。$\sum_{i=1}^{n-1} i w_1(i)$ によって平均ラグを計算することは多分に技巧的な意味しかもたないかも知れないが，この計算によると，平均ラグは約7カ月から8カ月となり，法人利潤に対する投資行動の反応は非常に早く行なわれることを示している。ウェイト合計はほぼ3.1ぐらいであるから，法人利潤の1単位(10億円)の変化が，究極的に(ということは完全にその効果を波及しつくした後には) 設備投資に与える影響の大きさは3.1(31億円)となる。

〔表-2〕 アーモン・ウェイト $w_2(i)$

i					
0	0.494	0.376	0.385	0.403	0.470
1	0.308	0.277	0.358	0.396	0.455
2	0.107	0.119	0.187	0.220	0.231
3	0.091	0.088	0.044	0.041	−0.005
4		0.140	−0.001	−0.050	−0.136
5			0.027	−0.035	−0.121
6				0.026	−0.001
7					0.106
S. W.	0.794	0.802	0.798	0.795	0.792
$\overline{R}$	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998
$\overline{S}$	33.2	30.5	42.2	43.5	44.2

推定は 30/1-3~41/10-12 四半期データ季節調整前
パラメーターポイント q は3である。

〔表-2〕より可処分所得と消費支出のラグ構造は4期前(1年前)まで考慮したものが最適であり，所得受取りから消費支出までのラグは1年をとれば十分であることが分る。そして約70%の効果が半年の間にあらわれ，平均ラグは4ヵ月であるから，支出と所得の間の反応はかなり早く行なわれる。ウェイト合計は約0.8であるから，可処分所得1単位(10億円)の変化が究極的には個人消費支出に0.8(8億円)の変化をもたらすことを示している。

さて，このようなアーモン・ウェイトによって示されるラグ構造が統計的に安定的なものかどうかを検討するために，次のような方程式に暗黙的に含まれるラグ・ウエイトを計算してみよう。いま

$$(I_f/p_i)_t = Z_1(L)\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_t \tag{17}$$

$$(C/p_c)_t = Z_2(L)(Y_d/p_c)_t \tag{18}$$

というモデルを考える。$Z_1(L)$，$Z_2(L)$ はラグ演算子 L に関する多項式である。

$$Z_1(L) = \frac{\gamma}{1-t_1L-t_2L^2} \tag{19}$$

とすると，(17)は

$$(I_f/p_i)_t = \gamma\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_t + t_1(I_f/p_i)_{t-1} + t_2(I_f/p_i)_{t-2} \tag{20}$$

となる。

$$\begin{cases} Z_1(L) = \beta W(L) \\ W(L) = w_0 + w_1L + w_2L^2 + \cdots\cdots \\ \beta = \dfrac{\gamma}{1-t_1-t_2},\ W(1) = \sum_i w_i = 1 \end{cases} \tag{21}$$

とすると

$$(I_f/p_i)_t = f(X_t) + a_2(I_f/p_i)_{t-1} + a_3(I_f/p_i)_{t-2} \tag{22}$$

ここで $f(X_t) = a_0 + a_1\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_t + \sum_{i=2}^{4} b_iQ_i$ を推定したとき，β, w_i, 平均ラグは

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{a_1}{1-a_2-a_3} \\ w_i = a_2w_{i-1} + a_3w_{i-2} \\ \text{但し}\quad w_0 = 1-a_2-a_3,\ w_1 = a_2(1-a_2-a_3) \\ \text{平均ラグ} = \dfrac{a_2+2a_3}{1-a_2-a_3} \end{cases} \tag{23}$$

によって計算できる。

30/1-3~41/10-12 までの48個の四半期データ(季節調整前)を使用して，(22)を推定した結果は[6]

$$(I_f/p_i)_t = -40.57 + 0.2125Q_2 + 1.2745Q_3 + 0.8886Q_4$$
$$+\underset{(0.16062)}{0.64684}\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_t + \underset{(0.15154)}{0.80336}(I_f/p_i)_{t-1}$$
$$-\underset{(0.13289)}{0.02631}(I_f/p_i)_{t-2} \tag{24}$$
$$\overline{R}=0.991,\ \overline{S}=47.62,\ d=2.12$$

である(d はダービン・ワトソン比)。(23)にしたがって，β, w_i, 平均ラグを計算すると〔表-3〕のようになる。

このラグ・ウェイトは(20)に暗黙的に含まれているという意味で I.L.W. としておこう。

〔表-1〕の10期前までとったアーモン・ウェイトと，〔表-3〕のラグ・ウェイトおよび各々の累積効果を図にしたのが〔図-1〕である。図から，アーモン・ウェイトは1期前にピークに達し，6期前に底となり，それから再び上り始めているのに対し，I.L.W. は幾何級数的に減少している。ラグ・ウェイトがほぼ等しいのは4期前と8期前の2つに過ぎない。このようにアーモン・ウェイトと I.L.W. との間には，ラグ・ウェイトの分布に関し，かなりの相違がみられる。累積効果で二つのラグ・ウェイトを比較してみよう。4期前までの累積効果では，アーモン・ウェイトが82%，I.L.W. が73%と約10%の違いがあり，アーモン・ウェイトで判断する方が効果が波及していくのは早いということになる。しかし，6期前までとると両者ともに84%ぐらいであり，それ以降は累積効果の大きさにそれ程大きな相違はみられない。しかも，アーモン・ウェイトは，先験的に，効果があらわれるのは n 期間だけであることを仮定しているから，n 期以降のラグ・ウェイトを無視しており，その無視されたウェイトがどこかにあらわれることになるから厳密に両者の比較は難かしい。

〔表-3〕 I.L.W.

i	w_i	累積効果
0	0.223	0.223
1	0.179	0.402
2	0.138	0.540
3	0.106	0.646
4	0.082	0.728
5	0.063	0.791
6	0.048	0.839
7	0.037	0.876
8	0.028	0.904
9	0.022	0.926
10	0.017	0.943
11	0.013	0.956
12	0.010	0.966
13	0.008	0.974
14	0.006	0.980
15	0.005	0.985
16	0.004	0.989
17	0.003	0.992
18	0.002	0.994
⋮	⋮	⋮
S. W.	2.90	
平均ラグ	10カ月	

ラグ・ウェイトの分布は両者の間でかなり違っているにもかかわらず，ウェイト合計すなわち税引後の利潤1単位の変化が究極的に民間設備投資に与える効果の大きさは，アーモン・ウェイト，I.L.W. ともに約3と安定している。平均ラグは I.L.W. が約10カ月でありアーモン・ウェイトとの間に2~3カ月の違いがあるが，10ヵ月という平均ラグも，民間設備投資の税引後の利潤に対するかなり早い反応を示している。

次に(18)において，$Z_2(L)$ も(19)と同じであると仮定する[7]と，前と同じように48個のデータを使用して推定された式

$$(C/p_c)_t = 60.09 - 0.2368Q_2 + 0.1631Q_3 + 0.1718Q_4$$
$$+\underset{(0.01820)}{0.36629}(Y_d/p_c)_t + \underset{(0.04013)}{0.41326}(C/p_c)_{t-1}$$
$$+\underset{(0.04733)}{0.13362}(C/p_c)_{t-2}$$
$$\overline{R}=0.999,\ \overline{S}=23.19,\ d=2.115 \tag{25}$$

から，β, w_i, 平均ラグを計算すると〔表-4〕のようになる。〔表-2〕の4期前までとったアーモン・ウェイトと〔表-4〕のラグ・ウェイトおよび各々の累積効果を〔図-2〕に示した。アーモン・ウェイト，I.L.W. ともラグ・ウェイトが一番大きいのは当期でそれからは次第に減少していく形を示しているが，アーモン・ウェイトに関しては4期前のウェイトは3期前よりも大きくなっている。この原因が5期以降の Y_d/p_c の影響を無視した結果によるものなのか，あるいは多項式近似による結果なのか，それとも別の理由にもとづくのか明らかではないが，4期前の方が3期前よりも大きくなるべき理由はない。累積効果で両者を比較すると，

注(5) データはいずれも「国民所得統計年報」(経済企画庁)による。

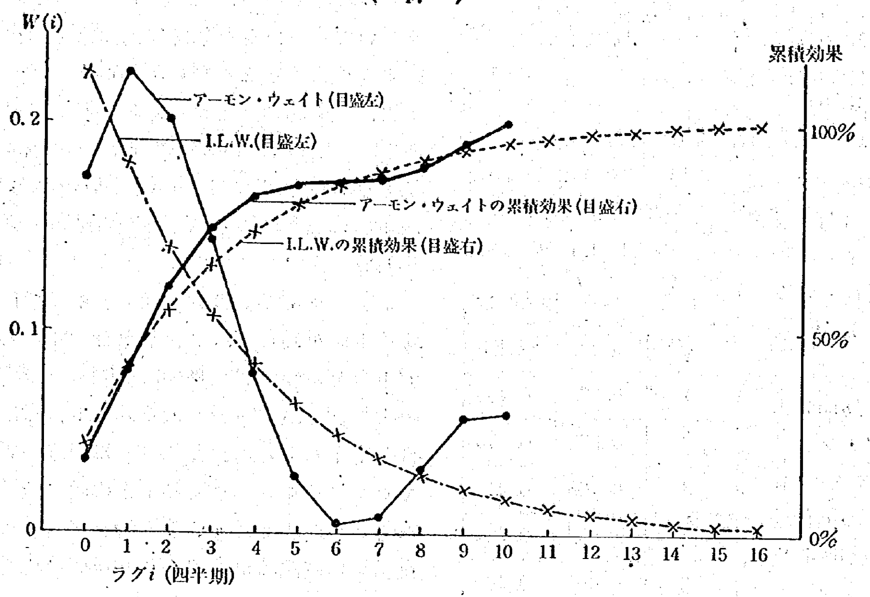
(6) $(I_f/p_i)_{t-2}$ の係数 −0.02631 の標準偏差は，0.13289 であるから，係数は0と有意に異ならない。したがって2期前の (I_f/p_i) を除いて，次のような式を推定した。

$$(I_f/p_i)_t = -40.2165 + 0.1951Q_2 + 1.2624Q_3 + 0.9114Q_4$$
$$+\underset{(0.15582)}{0.65294}\left(\frac{Y_c-T_c}{p_i}\right)_t + \underset{(0.05457)}{0.77542}(I_f/p_i)_{t-1}$$
$$\overline{R}=0.991,\ \overline{S}=47.07$$

この式からもラグ・ウェイトを計算したが，結果は〔表-3〕と殆んど同じなので，2期前の係数も考慮に入れたラグ・ウェイトを〔表-3〕に掲げた。

分布ラグとアーモン・ウェイト

〔図-1〕 I_t/p_i の $\left(\frac{Y_t-T_t}{p_i}\right)$ に対する時間的反応



アーモン・ウェイト，I.L.W.とも1期前までで約65%，2期前までで77%，3期前までで86%の効果があらわれることは同じであり，かなり安定的である。4期以降大きく異なってきているのは，アーモン・ウェイトの方は5期以降の影響を0とおいたからであろうと思われる。ラグ・ウェイトの合計は両者とも約0.8であり，平均ラグも大体4ヵ月程度であることも共通している。

〔表-4〕 I. L. W.

i	w_i	累積効果
0	0.453	0.453
1	0.187	0.640
2	0.138	0.778
3	0.082	0.860
4	0.052	0.912
5	0.032	0.944
6	0.020	0.964
7	0.013	0.977
8	0.008	0.985
9	0.005	0.990
10	0.003	0.993
11	0.002	0.995
12	0.001	0.996
⋮	⋮	⋮
S. W.	0.809	
平均ラグ	4.5ヵ月	

Ⅳ 結論といくつかの問題点

以上，検討してきたようにアーモン・ウェイトが描くラグ構造は，I.L.W.と比較して投資支出と法人所得の場合のように，ラグ・ウェイトの分布に関しかなりの相違がみられるときと，所得と消費支出の場合のようにかなり似かよっているときがあり，アーモン・ウェイトによって示されるラグ・ウェイトの分布が必ずしも安定的であるとはいえない。しかし，ラグ・ウェイトの合計，平均ラグについては，アーモン・ウェイト，I.L.W.ともほとんど同じであり，更にラグ・ウェイトの分布に関してはかなりの違いがみられても，累積効果で判断していくならば両者の間にそれ程大きな違いは出てこない。正しいラグ構造を推定し，効果が波及していく過程と効果の大きさを明らかにしていくことは，特に政策的観点から重要な課題となろう。正しいラグ構造とはラグ・ウェイトの分布，累積的効果，平均ラグ，ラグ・ウェイトの合計について"安定的"なものでなければならないが，アーモン・ウェイトはこれらの諸条件を十分満たすものではない。

税引後の法人利潤と投資支出との平均ラグは約8～10ヵ月と，利潤に対する相当早い反応を示している。法人利潤1単位の効果が波及しつくすと投資支出に3倍の変化をもたらす。

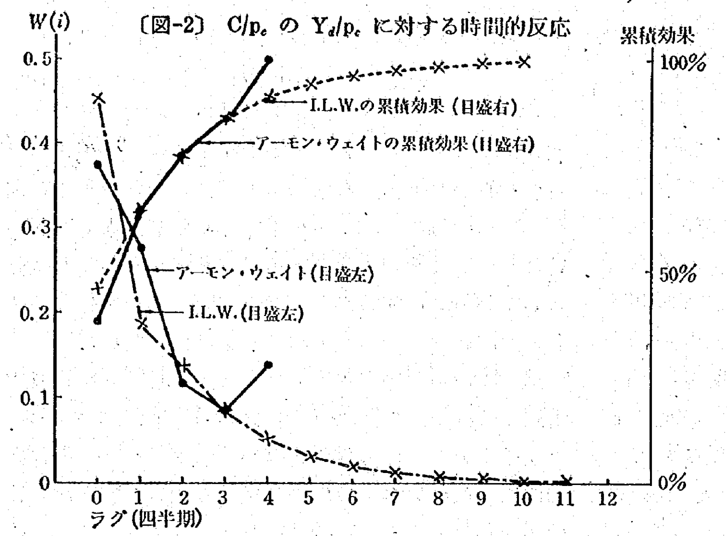
可処分所得と消費支出との平均ラグは約4ヵ月と早い。所得の消費支出に与える影響の大きさは，当期の所得が一番大きく，時間が経過するにつれてその影響は次第に小さくなり，1年前までの所得のラグをとれば現在の消費支出はほとんど説明される。所得1単位の変化が究極的には消費支出に0.8の変化をもたらす。

最後に，本論文では扱わなかったいくつかの問題点を指摘しておこう。第1に，(20)式のパラメータ推定にあたって，通常の最小自乗法を用いたが，これは

$$Y_t=\gamma X_t+t_1Y_{t-1}+t_2Y_{t-2}+v_t \qquad (26)$$

の誤差項 v には系列相関がないという仮定の下でのみ，パラメータの推定量は系

〔図-2〕 C/p_c の Y_d/p_c に対する時間的反応



注(7) (18)式において

$$Z_2(L)=\frac{\gamma}{1-t_1L-t_2L^2-t_3L^3} \qquad (\mathrm{i})$$

とすると，(18)式は

$$(C/p_c)_t=\gamma(Y_d/p_c)_t+t_1(C/p_c)_{t-1}+t_2(C/p_c)_{t-2}+t_3(C/p_c)_{t-3} \qquad (\mathrm{ii})$$

となる。

$$\begin{cases} z_2(L)=\beta W(L) \\ W(L)=w_0+w_1L+w_2L^2+\cdots\cdots \\ \beta=\dfrac{\gamma}{1-t_1-t_2-t_3},\ W(L)=\sum_i w_i=1 \end{cases} \qquad (\mathrm{iii})$$

とすると

$$(C/p_c)_t=g(X_t)+a_2(C/p_c)_{t-1}+a_3(C/p_c)_{t-2}+a_4(C/p_c)_{t-3}$$

ここで $g(X_t)=a_0+a_1(Y_d/p_c)_t+\sum_{i=2}^{4}b_iQ_i$ を推定したとき，β, w_i, 平均ラグは

$$\begin{cases} \beta=\dfrac{a_1}{1-a_2-a_3-a_4} \\ w_i=a_2w_{i-1}+a_3w_{i-2}+a_4w_{i-3} \\ \quad \text{但し}\ w_0=1-a_2-a_3-a_4,\ w_1=a_2(1-a_2-a_3-a_4) \\ \quad\quad w_2=(a_2^2+a_3)(1-a_2-a_3-a_4) \\ \text{平均ラグ}=\dfrac{a_2+2a_3+3a_4}{1-a_2-a_3-a_4} \end{cases} \qquad (\mathrm{iv})$$

によって計算できる。上記の（i）式の $Z_2(L)$ のもとで推定した結果は

$$\begin{aligned}(C/p_c)_t=&46.027+0.3751(Y_d/p_c)_t-0.0927Q_2+0.6779Q_3\\ &+0.2290Q_4+\underset{(0.0486)}{0.4662(C/p_c)_{t-1}}+\underset{(0.0480)}{0.1584(C/p_c)_{t-2}}-\underset{(0.0508)}{0.0927(C/p_c)_{t-3}}\end{aligned}$$

$$\bar{R}=1.00,\ \bar{S}=22.56,\ d=2.066$$

となる。$(C/p_c)_{t-3}$ の係数が信頼係数0.95で有意であるので，$Z_2(L)$ を本文のような形にしたが，信頼係数0.90では $(C/p_c)_{t-3}$ の係数も有意でないので，上記の推定式からも（iv）にしたがってラグ・ウェイトを計算した。結果は〔付表-1〕であるが，本文の方とは若干異なっている。しかし，当期のウェイトを最大にして次

〔付表-1〕

i	0	1	2	3	4	5	6
w_i	0.468	0.218	0.176	0.073	0.042	0.016	0.007
累積効果	0.468	0.686	0.862	0.935	0.977	0.993	1.000

S. W. =0.802, 平均ラグ=3.2ヵ月

第に減少していくパターンは同じであり，ラグ・ウェイトの合計も同じく約0.8と安定している。平均ラグは1ヵ月程早い結果が出ている。

列相関バイアスをもたない。この仮定は，

$$Y_t=Z(L)X_t+u_t$$

$$Z(L)=\frac{\gamma}{1-t_1L-t_2L^2} \tag{27}$$

と定式化したとき，誤差項 u に

$$u_t=t_1u_{t-1}+t_2u_{t-2}+v_t \tag{28}$$

という２階の系列相関を仮定していることに等しい。他方，もし u に系列相関なしと仮定すれば v が２階の系列相関をもつことになる。我々は誤差項に系列相関なしという仮定が(26)式で成立するのか，(27)式で成立するのかについて，通常先験的には何も情報をもっていないが，もし，(27)式の u が系列相関をもっていないならば，(26)式に通常の最小自乗法を当てはめたのでは，パラメータ推定量は系列相関バイアスをもつ。本論文ではこの問題を扱っていない。

第２に，この論文では四半期データを使用してラグ構造を推定したが，もし真のラグ構造が仮りに月を単位としてあらわされるならば（同じことだが，真の調整の単位期間が月であるならば）集計された四半期データを使用してラグ・ウェイトを推定すれば，バイアスをもつ。(8) 真のラグ構造を求めるときには，どのような期間（年，四半期，月など）を単位としてラグ構造が表わされ，そしてその中でラグ・ウェイトがどのように分布しているかが問われねばならない。集計に伴うバイアスの問題をこの論文ではとり上げていない。

第３に，単一方程式でアーモン・ウェイトを検討するだけではなくて，同時方程式体系の中に，アーモン・ウェイトをもった方程式を含めたとき，モデルの動学的性質，最終テストの誤差の累積の仕方に何らかの特徴が表われてくることはないかというようなことも検討する必要がある。

注(8)　いま，真のラグ構造が

$$y_{tj}=\sum_{i=0}^{n-1}w(i)x_{t,\,j-i},\ (j=1,2,\cdots\cdots,k) \tag{v}$$

によって与えられるものとしよう。ここで t を年，k を 12 とすれば，x_{tj}, y_{tj} は t 年 j 月を示し，t を年，k を４とすれば，x_{tj}, y_{tj} は t 年の第 j 四半期を示すものとする。そして

$$(t,-i)=(t-1,\ k-i) \tag{vi}$$

$$X_t=\sum_{j=1}^{k}x_{tj},\quad Y_t=\sum_{j=1}^{k}y_{tj}$$

とする。

さて，t を半年，k を２とすると x_{tj}, y_{tj} は四半期データ，X_t, Y_t は半年データを示す。

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2}x_{tj}=X_t\\&\sum_{j=1}^{2}x_{t,\,j-1}=X_t-(x_{t,\,2}-x_{t-1,\,2})\\&\quad\vdots\\&\sum_{j=1}^{2}x_{t,\,j-(n-1)}=\begin{cases}X_{t-m},\ n-1=2m\\X_{t-m}-(x_{t-m,\,2}-x_{t-1-m,\,2}),\ n-1=2m+1\end{cases}\\&\qquad(m\text{ は自然数})\end{aligned} \tag{vii}$$

であるから，(vii) を (v) に代入して，j について和をとり

$$\begin{aligned}Y_t=\sum_{j=1}^{2}y_{tj}&=[w(0)+w(1)]X_t+[w(2)+w(3)]X_{t-1}+\cdots\cdots\\&\quad+[w(2m)+w(2m+1)]X_{t-m}-[w(1)(x_{t,\,2}-x_{t-1,\,2})+\\&\quad w(3)(x_{t-1,2}-x_{t-2,\,2})+\cdots\cdots+w(2m+1)(x_{t-m,\,2}-x_{t-1-m,\,2})]\\&=\sum_{i=0}^{m}[w(2i)+w(2i+1)]X_{t-i}-\sum_{i=0}^{m}w(2i+1)(x_{t-i,\,2}-x_{t-1-i,\,2})\end{aligned} \tag{viii}$$

と書くことができる。

真のラグ構造が (v) にしたがっているとき，集計されたデータ X_t, Y_t を使用して，

$$Y_t=\sum_{i=0}^{m}v(i)X_{t-i}$$

の $v(i)$ を推定するならば，(viii) の第２項対前年同期増加額を無視することになり，$v(i)$ の推定量には“特定化の誤まり”が入りこむことになる。

第４に，税引後の法人利潤と投資支出との間の平均ラグは約 8～10ヵ月とかなり早いことが分ったが，このように，利潤に対して早い反応を示す投資行動がなされてきたのは何故かが問われねばならない。

参考文献

(1)　Almon, S.: "The Distributed Lag between Capital Appropriations and Expenditures," *Econometrica*, January, 1965.

(2)　De Leeuw, F.: "The Demand for Capital Goods by Manufacturers: A Study of Quarterly Time Series," *Econometrica*, July, 1962.

(3)　Griliches, Z.: Distributed Lags: A Survey, *Econometrica*, January, 1967.

(4)　Griliches, Z. and N. Wallace: "The Determinants of Investment Revised," *International Economic Review*, September, 1965.

(5)　Jergenson, D. W.: "Capital Theory and Investment Behavior," *American Economic Review*, May, 1963.

(6)　Koyck, L. M.: *Distributed Lags and Investment Analysis*: North-Holland Publishing Co., 1954.

(7)　Mundlak, Y.: Aggregation over Time in Distributed Lag Models," *International Economic Review*, May, 1961.

(8)　Solow, R. M.: "On a Family of Lag Distributions," *Econometrica*, April, 1960.