Title	回帰線導出の方法（続）
Sub Title	The method of regression (supplement)
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1969
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.62, No.8 (1969. 8) ,p.942(176)- 949(183)
JaLC DOI	10.14991/001.19690801-0176
Abstract	
Notes	寺尾琢磨教授退任記念特集号 研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19690801-0176

回帰線導出の方法（続）

佐　藤　　保

(一)

本稿は先に三田学会誌に三回にわたって述べた回帰線導出の方法の続きである。前回までの結果をまとめておく。資料は

	Y_1	Y_2	X_1	X_2	X_3
昭和 27	7096	8330	1163.5	100.0	9241
28	8741	8250	1505.1	95.3	10575
29	10640	8000	150.76	90.8	12834
30	10519	7697	1469.0	88.1	16230
31	12969	6497	2044.9	90.8	17514
32	15107	7000	2684.3	97.6	18696
33	14904	6700	2665.3	95.7	21408
34	17169	6300	3263.2	91.4	23148
35	22425	6700	4339.9	88.4	29020
36	24484	6000	5985.2	86.6	31200
37	28662	6350	6534.6	84.9	35568
38	29766	6275	7083.5	82.2	43200

Y_1＝セメントの生産量，Y_2＝セメントの価格，X_1＝総投資量，X_2＝石炭価格指数（原材料価格，あるいは生産コストの代用)，X_3＝セメント容量（セメントの生産能力)，Y＝内生変数，X＝外生変数

方程式は

(1)　$Y_1=a_0+a_1Y_2+a_2X_1$

(2)　$Y_1=b_0+b_1Y_2+b_2X_2+b_3X_3$

(1)は需要函数，(2)は供給函数を示すものとする。資料は最初の 10 年間を使い，あとは2年間を予測するものとする。種々の方法の計算結果は，

(1)式について

古典的最小自乗法

$$Y_1=15937.915-\underset{(0.82297691)}{1.3428373}Y_2+\underset{(0.4590877)}{3.0288719}X_1$$

$R=0.9808$

二段階最小自乗法

$$Y_1=31993.518-\underset{(1.3896165)}{3.26840}Y_2+\underset{(0.69306376)}{2.16781}X_1 \quad R=0.9665$$

三段階最小自乗法

$$Y_1=31993.518-\underset{(1.3896344)}{3.26840}Y_2+\underset{(0.6930749)}{2.16781}X_1 \quad R=0.9655$$

（二段階でも三段階でも値が変らない）

情報制限最尤法

$$Y_1=33305.842-\underset{(1.74629419)}{3.4149039}Y_2+\underset{(0.86816577)}{2.1023280}X_1$$

$R=0.9629$

完全情報最尤法

$$Y_1=27012.646-2.662552Y_2+2.4387496X_1$$

$R=0.9736$

(2)式について

古典的最小自乗法

$$Y_1=-11426.029+\underset{(0.96216042)}{0.65972410}Y_2+\underset{(109.87524)}{53.979740}X_2$$

$$+\underset{(0.12400791)}{0.84805669}X_3 \quad R=0.9867$$

二段階最小自乗法

$$Y_1=-78983.355+\underset{(7.7681373)}{6.769584}Y_2+\underset{(274.95572)}{174.9051}X_2$$

$$+\underset{(0.86173357)}{1.518458}X_3 \quad R=0.8961$$

三段階最小自乗法

$$Y_1=-66134.1285+\underset{(7.7585786)}{6.5403}Y_2+\underset{(206.85008)}{72.450}X_2$$

$$+\underset{(0.85580928)}{1.46145}X_3 \quad R=0.8883$$

情報制限最尤法

$$Y_1=-78992.356+6.7576317Y_2+174.88979X_2$$

$$+1.5140387$$

（情報制限最尤法と二段階最小自乗法はこの場合原理的に一致すべきものであり，値の差は計算誤差によるものである。)

完全情報最尤法

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
X_1	1.0000000	−0.54398195	0.94679313*	0.97339518*	−0.80120823*
X_2	−0.54398195	1.0000000	−0.62157664	−0.59230707	0.48521478
X_3	0.94679313*	−0.62157664	1.0000000	0.98568452*	−0.88180014*
Y_1	0.97339518*	−0.59230707	0.98568452*	1.0000000	−0.85186380*
Y_2	0.80120823*	0.48521478	−0.88180014*	−0.85186380*	1.0000000

＊印は有意水準 1% で有意。

$$Y_1=29156.153+2.246441Y_2+86.456960X_2$$

$$+1.0244547X_3 \quad R=0.9801$$

$$\left(R=\sqrt{1-\frac{\sum(\text{実際値}-\text{推定値})^2}{\sum y^2}}\text{，とした。} y=\sum(Y-\bar{Y})^2\right)$$

単純誘導形

$$Y_1=794.651+\underset{(0.547681)}{1.43705}X_1+\underset{(77.115504)}{6.68748}X_2+\underset{(0.121721)}{0.48275}X_3$$

$$Y_2=11792.495+\underset{(0.319284)}{0.21265}X_1-\underset{(44.956263)}{24.8907}X_2-\underset{(0.070966)}{0.15325}X_3$$

構造方程式より逆算した誘導形

$$Y_1=1087.165+\underset{(0.42915284)}{1.4454645}X_1+\underset{(59.827504)}{2.4141383}X_2$$

$$+\underset{(0.090416840)}{0.48697618}X_3$$

$$Y_2=10070.816+\underset{(0.25893716)}{0.22100888}X_1-\underset{(17.25572)}{7.3862992}X_2$$

$$-\underset{(0.051897159)}{0.14899526}X_3$$

単純な時間回帰

$$Y=a+bt \quad (t=\text{昭和 27 年を 1 とする})$$

$Y_1=4398.13+1819.50t \qquad r=0.969$

$Y_2=7536.56-70.76t \qquad r=0.482$

予測値（部分分析）

(1)式

Y_1	実際値	古典的最小自乗法	二段階最小自乗法	三段階最小自乗法	完全情報最尤法	時間変数
37	28662	27203	25405	25405	26041	24413
38	29766	28967	26840	29840	27580	26232

(2)式

37	28662	27510	32861	33529	28887	24413
38	29766	33787	43470	43996	36303	26232

（全部分析）

Y_1	実際値	二段階最小自乗法	三段階最小自乗法	情報制限最尤法	完全情報最尤法	単純誘導形	逆算誘導形
37	28662	28075	28112	27796	27585	27923	28058
38	29766	32255	32557	32283	32311	31589	32562
Y_2							
37	6350	5643	5522	5636	5770	5618	5588
38	6275	4618	4526	4660	4498	4515	4593

となった。以上に関する説明は前稿を参照されたい。

(1)式は over identify であり(2)式は just identify である。

単純相関は上表のようになっている。

(二)

次に行うことは，跡相関 (trace correlation) と over-identify の検定である。

変数間の変動・共変動行列は下表のようになる。

これまで重相関係数の定義として

$$R=\sqrt{1-\frac{(\text{実際値}-\text{推定値})^2}{\sum y_1{}^2}}=\sqrt{1-\frac{\sum u^2}{\sum y_1{}^2}}$$

($\sum y_1{}^2$＝その方程式の従属変数の変動)

を与えたが，通常の最小自乗法を用いれば $\sum u^2\leq\sum y_1{}^2$ であり，R^2 は0と1との間にある。

しかし連立方程式形を用いる場合は構造方程式を用いる場合，あるいは誘導形をそれより導いた場合共必ずしも $\sum u^2$ が $\sum y^2$ より小とは言えない。理論的には R^2 は $-\infty$ から1の間にあるとしか言えない。それはモデルが正しいと考えられるとき（主観的なことではあるが）でも起こることであるから，前記の式を用いることはあまり意味がないのではないかという議論もある(1)。バースマンは簡単なケインズ体系の例をあ

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
X_1	.20941569E+08	−.33240380E+05	.95561043E+08	.76003989E+08	−.93642286E+07
X_2	−.33240380E+05	.17830100E+03	−.18305971E+06	−.13494798E+06	.16547520E+05
X_3	.95561043E+08	−.18305971E+06	.48645469E+09	.37093833E+06	−.49672198E+08
Y_1	.76003989E+08	−.13494798E+06	.37093833E+09	.29112880E+09	−.37122290E+08
Y_2	−.93642286E+07	.16547520E+05	−.49672198E+08	−.37122290E+08	.65229498E+07

E+08＝10^8

注(1)　Basmann, R. L., Letter to the Editor, Econometrica, 1962. No. 4, p. 824-826.

げ，

$$C(Y_t)=\beta_1 Y_t+r_1+u_t \quad (\text{消費})$$

$$0<\beta_1<1 \qquad r_1\geqq 0$$

$$I(Y_t r_t)=\beta_2 r_t+\beta_5 Y_t+v_t \quad (\text{投資})$$

$$\beta_2<0 \qquad \beta_5>0$$

$$L(Y_t r_t)=\beta_3 Y_t+\beta_4 r_t+w_t \quad (\text{流動性選好})$$

撹乱項は $t=1,2,\cdots\cdots,n$ で同一の分布をして，

$$f(u_t v_t w_t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{u_t^2}{\sigma_1^2}+\frac{v_t^2}{\sigma_2^2}+\frac{w_t^2}{\sigma_3^2}\right]\right\}$$

とする。Y_t^*，C_t^*，r_t^*，Q_t^* を所得，消費，利子率，貨幣供給量，とする。Q_t^* のみが外生変数とされる。

$$C(Y_t^*)=C_t^*$$

$$Y_t^*-C(Y_t^*)=I(Y_t^*,\ r_t^*)$$

$$L(Y_t^*,\ r_t^*)=Q_t^*$$

誘導形は

$$Y_t^*=\frac{\beta_2}{\varDelta}Q_t^*+\frac{\beta_4 r_1}{\varDelta}+\left\{\frac{\beta_4(u_t+v_t)-\beta_2 w_t}{\varDelta}\right\}$$

$$r_t^*=\frac{(1-\beta_1-\beta_5)}{\varDelta}Q_t^*-\frac{\beta_3 r_1}{\varDelta}+\left\{-\frac{\beta_3(u_t+v_t)+(1-\beta_1-\beta_5)w_t}{\varDelta}\right\}$$

$$C_t^*=\frac{\beta_1\beta_2}{\varDelta}Q_t^*+\left\{\frac{\beta_1\beta_4}{\varDelta}+1\right\}r_1+\left\{\frac{\beta_1[\beta_4(u_t+v_t)-\beta_2 w_t]}{\varDelta}+u_t\right\}$$

$$\varDelta=\beta_4(1-\beta_1-\beta_5)+\beta_2\beta_3\neq 0$$

σ_1^2，σ_2^2，σ_3^2 は極端に小さいが0でないとする。

$$S^2_{Q^*}=\sum_{t=1}^{n}(Q_t^*-\bar{Q}^*)^2$$

誘導形に対する重相関係数は

$$\rho^{*2}_{y^*}=\frac{\frac{\beta^2}{\varDelta}E\sum_{t=1}^{n}(Y_t^*-\bar{Y}^*)(Q_t^*-\bar{Q}^*)}{E\sum_{t=1}^{n}(Y_t^*-\bar{Y}^*)^2}$$

$$=\frac{\beta_2^2 S^2_{Q^*}}{\beta_2^2 S^2_{Q^*}+\left(1-\frac{1}{n}\right)[\beta_4^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+\beta_2^2\sigma_3^*]}$$

そこで

$$\rho_y^2\to 0 \qquad \beta_4\to-\infty$$

$$\rho_y^2\to 0 \qquad \beta_2\to 0$$

という結果を生ずると述べている。しかし現実の資料をあつかう段階ではおそらくこのような結果はありえないであろう。筆者の経験からは通常の構造式，あるいは誘導形を使うかぎり重相関がマイナスになるということは実際上の問題としては考えられないが，理論式が常数項を含まない場合はこの危険性があるといえる。（常数のつかない回帰については別の考え方をすればこの問題はない。これについては次の機会に述べたい。）このような場合，ある変数をノーマライズすることによって一応問題はさけることができるが，（丁度重複共線性をさけるためにノーマライズするのと同様に） 根本的な解決といえないであろう。しかし通常の常数のある回帰においては，重相関係数が0に近くなるということは一寸考えられない。そして理論的には相関係数がひくくしたがって fit が悪い場合でも，直ちにその構造式が悪いとはいえないが，あまりに fit が悪い場合には実際上の使用には耐え得ないであろう。この意味で通常の形の重相関の式を用いることも意義がないとはいえないであろう。

ともあれ通常の形の重相関の式を用いることに若干の問題があるとすれば，連立方程式体系全体を通じて，全体の独立変数（外生変数）によって全体の従属変数（内生変数）の分散がどの程度説明されるかを一つの指標と考えることができる。ホッパー(2)は正準相関(3)（canonical correlation） の和の平均を跡相関（trace correlation）と名付けて，これをもってその尺度とした。その計算は次のように行う。

注（2） Hooper, John, W., Simultaneous Equations and Canonical Correlation Theory. Econometrica 1959. No. 2, p. 245-256.

（3） 読者に便利のためホッパーの正準相関をその論文から引用しておく。正準相関とは正準変数（canonical variate）間の相関を言うが，今方程式体系で従属変数 $Y_1\cdots\cdots Y_n$，外生変数 $X_1,\cdots\cdots,X_\Lambda$ とする。行列の形で示せば Y は T 行 M 列，X は T 行 $\varLambda$ 列の行列で示される。$Y_1,\cdots\cdots,Y_n$ と $X_1,\cdots\cdots,X_\Lambda$ を一次変換して $h_1,\cdots\cdots,h_n$ と $\xi_1,\cdots\cdots,\xi_\Lambda$ にする。

（i） すべての ξ と η は平均 0，平方和1をもつ。

（ii） すべての ξ はすべての他の ξ と無相関であり，すべての η はすべての他の η と無相関である。

（iii） ξ と η との間の相関は，ξ_1 と η_1，ξ_2 と η_2 等の相関である $r_1, r_2,\cdots\cdots$ で $\varLambda$ 個あるいは M 個（もし $\varLambda\leqq M$ なら $\varLambda$，もし $\varLambda\geqq M$ なら M）を除いて 0 である。ξ と η は正準変数と呼ばれ $r_1, r_2,\cdots\cdots$ は正準相関と呼ばれる。そして

(1) $Yk=\eta,\ Xh=\xi$

誘導形として

$$Y=X\Pi+V$$

$$\hat{Y}=XP \qquad P=(X'X)^{-1}X'Y$$

$$\hat{Y}'\hat{Y}=Y'X(X'X)^{-1}X'Y=Y'SY$$

$$S=X(X'X)^{-1}X'$$

M 個の内生変数とすれば，M×M の行列を D とすると，

$$I-D\equiv(Y'Y)^{-1}Y'SY$$

とする。もし M=1 とすれば通常の重相関係数と一致する。

$$\bar{r}^2\equiv\frac{1}{M}\mathrm{tr}(I-D)$$

$\bar{r}^2$ は行列の対角数の和の平均である。これは I−D の特性根の平均でもある。ホッパーはM個の内生変数とK個の外生変数との間の正準相関の平方は正確に I−D の特性根であることをしめし，それ故に $\bar{r}^2$ はまた単に正準相関の単純平均に等しいということを示した。正準相関という意味からは，個々の正準相関を計算してその平均を求めるのが筋道であるが，単に跡相関を求めるという意味からは単に行列 I−D の対角線の値を

の対を考える。

(2) $\eta'\eta=k'Y'Yk=1 \qquad \xi'\xi=h'X'Xh=1$

η と ξ との相関は

(3) $r=\xi'\eta=h'X'Yk$

これは h と k の変化に対して安定的でなければならない。そこで条件のつかない安定的値を考えるため

(4) $h'X'Yk-\frac{1}{2}\lambda_1(h'X'Xh-1)-\frac{1}{2}\lambda_2(h'Y'Yk-1)$

をつくる。ここで λ はスカラーでラグランジュ乗数である。(4)を h と k で微分すると

(5) $X'Yk-\lambda_1 X'Xh=0$

$Y'Xh-\lambda_2 Y'Yk=0$

最初の方程式に h' を前から乗じ，二番目に k' を乗じ，(2)と(3)の値によって

(6) $\lambda_1=\lambda_2=r$

(5)の最初の式と(6)を結びつけて

$$h=\frac{1}{r}(X'X)^{-1}X'Yk$$

これを二番目の式と結合して

(7) $[(YY')^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y-r^2I]k=0$

をうる。そしてこの式から正準相関の自乗は行列 $(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y$ の固有根であることがわかる。母集団では，

(8) $|\{E(Y'Y)\}^{-1}E(Y'X)\{E(X'X)\}^{-1}E(X'Y)-\rho^2 I|=0$

さて同時方程式の体系に応用すると，

(9) $YB+X\Gamma=U$

B と Γ はパラメーター行列，（B は正方で非特異），U は T 行 M 列の撹乱行列。体系の誘導形は

(10) $Y=-X\Gamma B^{-1}+UB^{-1}=X\Pi+\bar{V}$

Π は母集団の誘導形の係数行列，V は撹乱行列である。最小自乗法による誘導形の推定は

(11) $Y=XP+V$

ここで $P=(X'X)^{-1}X'Y$ これから

(12) $(Y'Y)^{-1}P'X'XP=(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y=I-D$

I は M 次の単位行列，D は(14)式で示される。この行列の固有根は(7)で示されたものである。

(13) $|(Y'Y)^{-1}P'X'XP-r^2I|=0$ あるいは $|(I-D)-r^2I|=0$

$X'V=0$ であるから

$$Y'Y=P'X'XP+V'V$$

(14) $(Y'Y)^{-1}V'V=D$

(15) $|(Y'Y)^{-1}V'V-(1-r^2)I|=0$ あるいは $|D-(1-r^2)I|=0$

そしてこの r は Y と X との間の正準相関であり，普通の重相関の一般化であると考えられる。そして M 個の r^2 の和の平均をもってそれは (I−D) の跡を M で割ったものに等しいので，その値をもって跡相関とする。そして前述のように従属変数の総分散がどれだけ説明されているかの尺度としようとする。

加えてMで割ればよいことにする。

現在の場合

$$Y'X=\begin{pmatrix} .76003989E+08 & -.13494789E+06 & .37093833E+09 \\ -.93642286E+07 & .16547520E+05 & -.49672198E+08 \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} .143705E+01 & .21265449\ E+00 \\ .668748E+01 & -.248907\ E+02 \\ .48275082E+00 & -.15325198E+00 \end{pmatrix}$$

$$Y'XP=\begin{pmatrix} .28738985E+09 & -.37325495E+08 \\ -.37325495E+08 & .5269138\ E+07 \end{pmatrix}$$

$(Y'Y)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} .29112880E+09 & -.37122290E+08 \\ -.37122290E+08 & .65229498E+07 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} .1252115E-07 & .712582E-07 \\ .712582\ E-07 & .558837E-06 \end{pmatrix}$$

$I-D\equiv(Y'Y)^{-1}Y'SY$

$$=\begin{pmatrix} .287389853E+09 & -.37325495E+08 \\ -.37325495\ E+08 & .5209138\ E+07 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .1252115E-07 & .712582E-07 \\ .712582\ E-07 & .558837E-06 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0.93870387 & -0.3802383 \\ -0.096164324 & 0.25131147 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}^2=\frac{0.93870387+0.25131147}{2}=\frac{1.190}{2}=0.595$$

$$\bar{r}=0.771367$$

と計算される。この計算の途中で誘導形に対する通常の重相関を計算できる。すなわち

$$R_1{}^2=\frac{.287389853E+09}{.29112880\ E+09}=0.987 \quad R_1=0.994$$

$$R_2{}^2=\frac{.5209138E+07}{.65229498E+07}=0.799 \quad R_2=0.894$$

$\bar{r}^2$ は約 0.6 であり，全体の外生変数で全体の内生変数の説明力は6割となりかなりひくくなる。これは第2方程式の説明力がかなり低いためである。これに対して個々の重相関の値はかなり高い。$\bar{r}^2$ の値が非常にひくくなるときは，個々の誘導形の重相関が高く，その結果予測式としてかなり役立つと考えられても，構造推定式としては若干問題を残すことになろう。なお附言すれば

I−D より特性根を求めれば

$$r_1=0.988317 \qquad r_1+r_2=1.19$$
$$r_2=0.201698$$

となり先の計算結果と一致する。r_2 はやはり低い。$\bar{r}$ の分散を求めると，X が random variable と考えるとき，

$$\sigma^2_{\bar{r}}=\frac{1}{TM^2\rho^{-2}}\sum_{u=1}^{M}\rho_u{}^2(1-\rho_u{}^2)^2 \qquad \sigma^2_{\bar{r}^2}=4\rho^2\sigma^2_{\bar{r}}$$

$$\sigma^2_{\bar{r}^2}=\frac{4}{TM^2}\sum_{u=1}^{M}\rho_u{}^2(1-\rho_u{}^2)^2$$

X が fixed variable と考えるとき

$$\sigma^2_{\bar{r}}=\frac{1}{2TM^2\rho^{-2}}\sum_{u=1}^{M}\rho_u{}^2(1-\rho_u{}^2)^2(2-\rho_u{}^2)$$

$$\sigma^2_{\bar{r}^2}=\frac{2}{TM^2}\sum_{u=1}^{M}\rho_u{}^2(1-\rho_u{}^2)^2(2-\rho_u{}^2)$$

の式に値を代入すれば，X が random variable のとき

$$\sigma^2_{\bar{r}^2}=\frac{4}{10\times 4}[0.988317(1-0.988317)^2+0.201698(1-0.201698)^2]=0.013$$

$$\sigma^2_{\bar{r}}=\frac{0.013}{4\times 0.6}=0.0054$$

同様に X が fixed variable のときは，

$$\sigma^2_{\bar{r}^2}=\frac{2}{10\times 4}[0.000134892(2-0.988317)+0.128539(2-0.201698)]=0.001156$$

$$\sigma^2_{\bar{r}}=0.00048$$

となり有意となっている。

次に情報制限最尤法に対する overidentify の先験的制約の検定を行ってみる。この方法は次の統計量を計算しきめられた水準より大きければ overidentify についての仮説が正しいということを棄却することになる。[4]

まず情報制限最尤法の計算で求められた，最大根を λ_1 とすると，

$$1+\frac{1}{\lambda_1}=l_1$$

l_1 は最小根である。$T\log_e l_1$ を計算する。帰無仮説が正しいとき，T(観測期間)が増大するとき，$T\log_e l_1$ は漸近的に自由度 K−J−H+1 の χ^2 分布をする。このことはアンダーソンとルービンによって発見された。ここでKはモデル全体の外生変数（先決変数を含む）の数，J は推定される方程式に入っている外生変数の数，Hは推定される方程式に入っている内生変数の数である。just identify の方程式では K−J−H+1 は0になり検定は行えない。overidentify の検定を行ってこれが否定されたときでも直ちに just であるという理由にはならないのである。

バースマンは

注（4） Christ Econometric Theory and Models, p. 539-542.

$$(l_1-1)(T-K)/K-J-H+1$$

が自由度 K−J−H+1 と T−K の F 分布をすることを示してこの検定方法による方がよいということを示している。大標本による方法であることから，小標本に用いることは近似的意味しかないが多くの場合やむを得ない。クリストは自己のアメリカ経済のモデルで10 個の方程式に対して検定を行ったところ，95% 水準において，アンダーソン，ルービンの方法では2個，バースマンの方法では3個を除いてすべて棄却されてしまった。

現在の場合では，

$$l_1=1+\frac{1}{\lambda_1} \qquad l_1=1+\frac{1}{31.28778}=1.032$$

$$T\log_e l_1=10\log_e 1.032=0.31464$$

$$K-J-H+1=3-1-2+1=1$$

自由度1の χ^2 分布の 5% 点は 3.84 であるから勿論有意ではない。

$$\frac{(T-K)(l_1-1)}{K-J-H+2}=\frac{(10-3)(1.032-1)}{10-1-2+1}=0.224$$

$$F(K-J-H+1,\ T-K)=F(1\ 7)$$

自由度 1, 7 の F 分布の 5% 点は 5.59 であるから勿論有意ではない。

これで一応 overidentify の仮定の正しさが立証されたことになる。

（三）

次に統計的予測あるいは統計的回帰式という意味から逐次重回帰の計算を行ってみる。

ドレーパーとスミスはその著書の中で回帰式選定の方法として五つのものをあげている。[5]

(1) すべての可能な回帰式の検討

(2) 後退消去手順 (back ward elimination procedure)

(3) 前進選定手順 (forward selection procedure)

(4) 段階的（あるいは逐次）回帰手順 (stepwise regression procedure)

(5) 段階的回帰手順 (stagewise regression procedure)

それぞれについて簡単に説明すると，

(1)従属変数をYとし，独立変数を $X_1, \cdots, X_k$ とすれば，文字通り k 個の独立変数のすべての組合せについて回帰式をつくり，それぞれの R^2 を求めてそれから適当な組合せをみつける。しかし k が大きいときはすべてを計算することは非常にはんざつである。通常次の方法がとられる。例えば X_1, X_2, X_3, X_4 と4個の独立変数があるとき，まず1個選ぼうとすれば当然Yと最も相関の高い変数か選ばれるであろう。これが X_4 であったとする。次に2個の変数の組合せをつくり，最も相関の高い組を選ぶ。これが X_1, X_2 の組であったとする。次いで三変数の組では，X_1, X_3, X_4 であり，最後にY変数 X_1, X_2, X_3, X_4 が計算される。それぞれの相関をみて，一変数から二変数にしたときは相関が非常に高まったが，三変数にしてもあまり変らないときは二変数の組とする。二変数で同じくらい高い相関のものが何組かあるときは，他の情報，経済的知識等によって選ぶことにする。

また1変数，2変数，3変数，4変数の時の残差の不偏分散をそれぞれもとめ，その平均を計算して，その平均が急に小さくなる点で何個の変数を選んだらよいかをきめる方法もある。しかし前の相関からみた場合と異った結果を生ずることもある。

(2)はまず最初に全部の独立変数を入れた回帰をつくり，4変数なら X_1, X_2, X_3, X_4 を全部入れて回帰をつくる。そしてそれぞれの変数について，あたかもそれが一番最後に入れられたかのように考えて有意性の検定を行う。そして例えば X_3 が有意でなければ X_3 を除外して X_1, X_2, X_4 のみの回帰をつくり，更に X_4 が有意でなければ，X_1, X_2 とする。この方法は(1)よりも簡単であるが，最初にすべての回帰を計算するのでこのとき独立変数の分散行列が特異な形に近いとき，それ以後の手順が丸めの誤差の影響を受けるという欠点がある。

(3)この方法は(2)と反対に一つずつ加えてゆくという方法である。X_1, X_2, X_3, X_4 があるとき最初はYと最も高い相関のものを選ぶ，これが X_4 であるとすればそれを入れる。次に残りの X_1, X_2, X_3 のうち，X_4 を導入した後のYと最も高い偏相関のあるものを選ぶ。これが X_1 であるとすればそれを導入する。次に X_2 ならばそれを導入する。そして有意でない変数に達すればそこで止めるということになる。この方法は簡単なものから順次進んでゆくという点で計算上からも便利であるが，新しく変数を導入したときそれがすでに導入された変数に対してどのような影響を与えたかを考察していない。この欠点をとり除こうというのが段階的（あるいは逐次）回帰の手順となる。

(4)は(3)を改良しようとするもので新しい変数を導入したとき，その前に導入された変数についても再検討

注（5） N. R. Draper and H. Smith, Applied Regression Analysis. 中村慶一訳（応用回帰分析），p. 163-172.

を行う，として前の段階で導入された最良の変数であっても，後の段階では他の変数との関連で落されてしまうこともある。これをチェックするため各計算段階において回帰式に存在する各変数に対するFの値あるいは t の値を有意水準の値と比較して，有意でないものはとり除かれる。例えば X_1, X_2, X_3, X_4 があるとき最初は最も相関の高い変数が導入される。これが X_4 であればそれを入れる。つぎに X_4 が導入された後でYと最も高い偏相関のある変数が導入される。X_1 であればそれを導入する。その際先に入れた X_4 の有意性を再検討し有意であればそのまま残す。次に高い偏相関をもつものを入れる。これが X_2 であればそれを入れる。そしてこの際の X_4, X_1, X_2 について検定を行い，X_4 が有意でなくなればこれを落してしまう。残りの X_3 についてみてこれが有意でなければ，結局 X_1 と X_2 で回帰が形成されることになる。変数が多いときにはまずこの方法で入れるべき変数の数をきめて，そのうえですべての可能な組合せを検討することも考えられる。又有意水準を変えることによって当然入ってくる変数の数も異ってくる。

(5)の方法はまずYと最も相関の高い変数Xを用いた回帰方程式が当てはめられた後に，残差 $(Y_i-\hat{Y}_i)$ を計算し，これらの残差を従属変数と考えてこの値を最も高い相関をもつ X（残っているもののなかで）に対する回帰を考える。この手順はどの段階に対しても続けられる。この方法によって与えられた回帰式は最小自乗法によるものとは異なる。X_1, X_2, X_3, X_4 があるときまず最高の相関の X_4 が選ばれる。X_4 へのYの回帰を考える。$\hat{Y}=a+bX_4$. 残差 $z_i=Y_i-\hat{Y}_i$ を各 X_4 の値に対して計算する。この残差 z_i を従属変数として残ったXの中からこの残差に最も高い相関のものを選定する。X_1 が最も高い相関であるとすると，$z=a'+b'X_1$ を計算する。$Y_i=\hat{Y}_i+(Y_i-\hat{Y}_i)=\hat{Y}_i+z_i=a+bX_4+a'+b'X_1=(a+a')+bX_4+b'X_1$ でこれは普通の最小自乗法とは異った結果をあたえる。更に変数を加えていって残差と新変数の回帰が有意でなくなったら計算をやめる。この方法は通常の最小自乗法より精度が悪くなるが，Yとの相関度以外の理由によって変数を選択することが可能になるという利点もある。

以上の5つの方法を述べた後スミスとドレーパーは(4)の方法が最もすぐれているであろうと述べている。

このうち(1)と(4)の方法を用いてみよう。まず変数の数をきめるため残差不偏分散をみると，

一変数			決定係数
1382.2508	(X_1)	平均	94.75
4860.4621	(X_2)	2419.9296	35.08
1017.0760	(X_3)		97.16
二変数			
1396.6505	(X_1, X_2)	平均	95.31
731.2963	(X_1, X_3)	1067.4113	98.71
1074.2871	(X_2, X_3)		97.23
三変数			
789.3890	(X_1, X_2, X_3)		98.72

これから考えると二変数（X_1, X_3）の組であるとも考えられる。この回帰は

$$Y_1=1469.7360+1.4454246X_1+0.47858956X_3$$

とする。これより予測を試みれば

昭和	37	27937
	38	32384

となる。

X_3 のみを使うときは，

$$Y_1=-72.533+0.76253431X_3$$

昭和	37	27049
	38	32868

となる。

次に逐次回帰を用いてみよう。

X_3 が最も高い相関をもっているから

step 1.

$$Y_1=-72.533+\underset{(0.046113910)}{0.76253427X_3} \quad R^2=0.9716$$

step 2.

$$Y_1=1469.7350+\underset{(0.49652885)}{1.4454222X_1}+\underset{(0.10302150)}{0.47858995X_3}$$

$$R^2=0.9871$$

この段階で計算は終る。従ってこの場合(1)も(4)も同じ結果を与えることになり，統計的予測という面からは X_1 と X_3 を独立変数とすることがよいと言えよう。なお独立変数として Y_2 を加えた場合も逐次回帰の結果は全く変らず X_1 と X_3 が選ばれた。

次にこれまでは標本の大きさ 10 ですべての計算が行われたが，これを 12 にする[6]。昭和 37，38 年まで計算期間としたときどの程度の変化が起きるかをみてみよう。逐次回帰を計算してみると，（独立変数 X_1, X_2, X_3 のとき）

step 1

$$Y_1=4829.3180+\underset{(0.17766876)}{3.5911599X_1} \quad R^2=0.9761$$

step 1 をもってはやくも終ってしまう。そして前とは異った X_1 という変数が入ってくる。Y_2 を独立変数

に加えたときは，標本 12 のとき

step 1

$$Y_1=4829.3180+\underset{(0.17766876)}{3.5911599X_1} \quad R^2=0.9761$$

step 2

$$Y_1=13584.780-\underset{(0.66034577)}{1.0903475Y_2}+\underset{(0.25959234)}{3.2589932X_1}$$

$$R^2=0.9817$$

この結果も標本 10 の場合と大きく異っている。独立変数 X_1, X_2, X_3 全部を考えたときについて標本 10 と 12 を比較してみると，

標本 10

$$Y_1=794+\underset{(0.54)}{1.437X_1}+\underset{(77)}{6.69X_2}+\underset{(0.121)}{0.4828X_3}$$

標本 12

$$Y_1=3114+\underset{(0.64)}{1.980X_1}-\underset{(98)}{3.998X_2}+\underset{(0.14)}{0.3342X_3}$$

X_2 の値は有意ではないが（5%で）プラスからマイナスに変っている。Y_2 を加えたときは

標本 10

$$Y_1=-1030+\underset{(0.75)}{0.1547Y_2}+\underset{(0.62)}{1.4041X_1}+\underset{(86)}{10.5412X_2}$$

$$+\underset{(0.175)}{0.5065X_3}$$

標本 12

$$Y_2=10062-\underset{(0.66)}{0.5914Y_2}+\underset{(0.65)}{2.066X_1}-\underset{(102)}{22.5122X_2}$$

$$+\underset{(0.158)}{0.2714X_3}$$

有意でない X_2 がプラスからマイナスに変っているほか有意に近い Y_2 も又符号が変ってきている。最初の資料をみるかぎりにおいて，この2年間に大きな変化はないと考えられるであろう。どの系列もきわだって特異な変化，動きはみせていない，それにもかかわらず式の上でこの程度の大きな変化があり，式の解釈も異にしてくるであろう。X_2 と Y_1 との相関は 10% では有意な値であり，Y_1 と Y_2 は 1% で有意である。この式からみるかぎり 10% 程度で有意な値では式に導入することが危険であるようにみえるがこの程度の値の変数を用いることはむしろ普通であろう。そして理論的関係ありと判断される時はこの程度（10%）の値あるいは更に低い程度の相関をもつ変数も用いられるであろう。そこに又，経済変量の回帰分析の問題点があると言えるであろう。

注(6)　標本が12の場合の相関行列は次の如くなり，5% 水準ですべて有意となっている。これから標本の大きさが小さいときは，かなりの変動のあることがわかる。

	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
X_1	1.00000000	−0.76442904*	0.97297765*	0.98798193*	−0.77494435*
X_2	−0.76442904*	1.00000000	−0.80528125*	−0.78426861*	0.59097228**
X_3	0.97297765*	−0.80528125*	1.00000000	0.98561912*	−0.81261437*
Y_1	0.98798193*	−0.78426861*	0.98561912*	1.00000000	−0.81273610*
Y_2	−0.77494435*	0.59097228**	−0.81261437*	−0.81273610*	1.00000000

*印は 1% で有意。　**印は 5% で有意。