

Title	不確実性と均衡分析
Sub Title	Uncertainty and equilibrium analysis
Author	市石, 達郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1969
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.62, No.3 (1969. 3) ,p.244(36)- 268(60)
JaLC DOI	10.14991/001.19690301-0036
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19690301-0036

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

不確実性と均衡分析

市 石 達 郎

I 序 論

1-1. 経済的諸量の相互依存関係を、一般均衡理論の体系内でとらえようとする試みは、その静学的分析 (static analysis) に関する限り、Walras [42] から Hicks [34], Samuelson [41] 等の古典を経て、近年の Debreu [4] [33] や Aumann [31] においてほぼ行き尽した観がある。これは高度に抽象的な (つまり、仮定のゆるい) 理論であり、したがって、広範な領域に対して適用可能である反面、そのままでは詳しい結論・主張の得られるはずのないものである。

これらを骨格として、純粋理論の分野で2つの方向の発展があるように思われる。

第1は仮定を現実に即して強め、より強い主張を得ることである。その代表としては、先ず、Keynes [36] が挙げられる (もっとも、これは以下に示すように、第2の方向の或る発展と密接な関連がある)。彼は、長年の観察から得たヴィジョンに基づき、経済的諸量の強く依存する関係だけに着目した。さらに、この強い依存関係を明快に表わすため、マクロ分析という手法を用い、国民所得水準の決定される因果関係を示したのである。これにより、失業等の経済的「病理」の根源を直截に示し、その後の経済政策の分野での基礎固めを行なった。その外、この種の発展としては種々の部分均衡論がある。

第2の方向の発展は、静学的一般均衡分析の枠組を検討し、それで分析できぬ事柄に対して新たな理論を用意することである。つまり、それまでの理論の或る仮定を取り除き、その代わりに異なる場面を想定してそれに応じた仮定を置き、そのもとで演繹——理論の構築——を行なう。とりわけ、完全競争市場についての静学的一般均衡理論がどのような経済を記述し得ていたかについては、Debreu [4] の Ch. 2 を参照されたい。

先ず、市場構造の想定を置き替える点では、古くから、独占、複占、寡占、独占的競争などの理論が、部分均衡分析の枠内ではあるが、種々提示されている。また、完全競争をも含め、種々の市場形態と主体行動とを広く統一的に取り扱うものとして、近年、von Neumann & Morgenstern

不確実性と均衡分析

[13] によるゲームの理論が盛んとなって来た。もっとも、問題の性質上、ゲームの理論自体も未だ整理されていない。

次に、静学的分析そのものによる制約に注意せねばならない。前記の Debreu [4] Ch. 2 を読めば、静学的分析が如何に動態経済 (non-stationary economy) を取り扱うか、とりわけ、異時点における財、利子率が如何に解釈されて論ぜられているか、読者はこれらを明確に知ることが出来るであろう。重要な点は、ここで「理論モデル」が「解釈」に先行している点である。正しくは、我々の経済ヴィジョン、すなわち「解釈」に添って「理論モデル」を作り、経済現象を分析せねばならない。「時」の概念を陽表的に取り入れ、それにふさわしい動学分析 (dynamic analysis) を与えることが課題となる。

例えば、von Neumann [38] は生産の側面を重視して動学分析を行なった。生産は本質的に時間のかかるものであり、その継続が資本ストック量の変動、成長へと至る。なお、この点に関しては、[38] 以降の発展を検討したものに筆者の修士論文 [35] がある。

また、「時」の導入に付随して「将来」の概念が必然的に入ってき、我々は「将来の不確実性」を考慮せねばならなくなる。通常の静学的理論における「完全予見」の仮定は非現実的である。本稿の主題は、経済理論が「不確実性」にまつわる事柄を如何に分析するか、を見ることにある。

1-2. 不確実な将来については、(i) 主体が何等かの意味で確率分布を抱いている場合、(ii) そのような確率分布すらも分からぬ場合、が考えられる。後者の想定が重要な意義を持つことは自明であるが、現在のところ、理論の立てようが無く、問題意識だけが残っている。ただ、ゲーム論における ψ -安定のように、制度的・技術的側面からの或る程度の分析は可能であろう。しかし、元来、非常に長期的な歴史的趨勢については、科学的理論の立てようがないのである。

前者の想定については古くから考察されており、最近急速に理論の展開を見た。ともかく、何等かの意味でこの想定さえ満たされるならば、我々は、不完全予見の世界で如何に資産を保有するか、といった問題を一般的に分析することが出来る。

ここで、前記の Keynes [36] を想起してみよう。§1-1 で述べられた貢献と密接に関連し、彼は新たな貨幣理論を提示している。彼の流動性選好説は、本来、不確実な世界を前提しているものではなかったか？ かくして彼のヴィジョンに強く影響され、貨幣のみならず、信用、証券、利子率といった概念は本質的に動学的であることが、現在の通説となっている。私見によれば、Keynes 革命と呼ばれる幾多の論争・研究を経過した後にも、彼のヴィジョンに添って無矛盾的な理論が今なお出来上っていないのは、静学的分析で済まそうとするからである。

不完全予見のもとでの資産選択の理論は、このような問題を特殊ケースとして説明する一般的な体系を志向している。

1-3. 不確実性と主体行動の理論については、例えば Arrow の適切な展望論文 [30] がある。本稿の目的は、それ以降に特に顕著な発展をみた2つの流れ、期待効用仮説と2パラメーター仮説、を展望することにある。同様の分野でも、例えば Roy [40] による安全第一原則や、Don Patinkin [39] の意味での貨幣理論は、一切割愛した。後者については根岸氏の展望 [37] がある。論述は平易となるよう努めたが、心ならずもその期待に背いたかも知れない。⁽¹⁾ 展望論文とはいえ、本稿は幾つかの積極的分析をも展開している。例えば、§2-2-1では、Arrow [2] の risk aversionに関する主張を厳密に考慮し、強い定理を打ち立てている。しかし、これらは全体の流れから見れば minor な寄与にすぎぬかも知れない。ともかく、本稿の読者の中から不確実性に対して興味を抱き、積極的分析に参加する人が現われるならば、筆者の本懐とするところである。文献のその1では期待効用仮説について、その2では2パラメーター仮説について、重要と思われるものだけを掲げておいた。その3は、本稿の主題とは直接関係ないが、ここで引用したものである。

II 期待効用仮説

2-1. 将来に実現する事象の確率を想定して、各主体はどのように対処するか？ この問題については、すでに18世紀、“St. Petersburg Paradox” という名のもとに特殊ケースが考えられていた。近年、それはゲームの理論、特に混合戦略との関連で再び取り上げられ、一般的検討が厳密に加えられた。本稿では §2-1-1 において “St. Petersburg Paradox” を、§2-1-2 において今日の期待効用仮説を説明する。

2-1-1. 数学者 D. Bernoulli [3] は次のような賭を考えた。

〔貨幣投げを行なう。これは貨幣の表が出るまで続けられる。毎回、表の出る確率は1/2であろう。現実には n 回目で初めて表が出たら、参加者はこの賭で 2^n 円受け取ることとする。〕

2円受け取る確率は $1/2$ 。

2^2 円受け取る確率は $(1/2)^2$ 。

2^n 円受け取る確率は $(1/2)^n$ 。

したがって参加者が賭から受け取る額の期待値は、

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 1 + 1 + \cdots = \infty$$

すなわち、賭の参加料が如何に高くとも、人は進んで参加するに違いない。〕

注(1) 内容の水準は落とさず、初心者にも分かるように気を配った。このため、小園江健治氏(慶大経済学部学生)には草稿に目を通して頂き、不適切な表現を指摘して頂いた。ここに感謝の意を表したい。無論、本稿における一切の責任は筆者が負うべきものである。

(2) ゲームの理論に関する最適な入門書としては、Luce & Raiffa [9]。

この逆説(事実、参加料を3億円として、誰が参加するであろうか?)に対する解答は、Bernoulli によって与えられた。

〔確率で加重平均されるものは、金額そのものでなく、金額から得られる効用 u である。前の例の場合、参加料 a 円が、〕

$$\sum_{n=1}^{\infty} u(2^n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq u(a)$$

を満たしているなら、人は参加するであろう。特に、

$$u' > 0, u'' < 0$$

なら、上式左辺の収束する可能性がある。例えば、 $u(x) \equiv \log_{10} x$ ならば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{10} 2^n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \log_{10} a$$

を解いて、

$$a \leq \prod_{n=1}^{\infty} 2^{2^n}$$

が満たされている限り、人は参加することになる。〕

上述の Bernoulli 理論に対し、今日の経済学者なら直ちに次の疑問を抱くであろう。

(i) 第 i 事象の生ずる確率を p_i 、それが現実に生じたときの収益を a_i としたとき、個人の目的関数は、何故、

$$\sum_i p_i u(a_i)$$

という形をとるのであろうか？ 一般の

$$U(a_1, a_2, \dots; p_1, p_2, \dots)$$

が、上の形に specify される理由如何？

(ii) そもそも個人の行動が効用関数 U の極大化によって記述され得るものであろうか？

こういった問題意識が後の von Neumann & Morgenstern [13] の期待効用定式化につながる。その説明は §2-1-2 の領域に属する。

2-1-2. 今、背反な事象全てが、論理的に r 種類考えられるものとする。 $i (=1, 2, \dots, r)$ で事象を表わし、 p_i, a_i はそれぞれ、第 i 事象の生ずる確率、第 i 事象の内容を表わすものとする。定義より、

$$p_i \geq 0 \text{ for all } i, \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

例で r, p_i, a_i を説明しよう(第I図参照)。

〔 τ 期間の消費計画を持つ主体は、〕

$$a_i \equiv (c_i(1), c_i(2), \dots, c_i(\tau), k_i(\tau))$$

を考える。ただし、 $c_i(t)$ は第 t 期の消費ベクトル ($t=1, 2, \dots, \tau$)、 $k_i(\tau)$ は子孫に残す財ストックのベクトルであり、それぞれ γ 次元 (γ は財の種類) とする。 a_i は $\gamma(\tau+1)$ 次元空間上の点である。富(wealth)、その他の制約条件を無視し、考え得るあらゆる計画のメニューが

$$(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

(3) となる。例えば、特に a_1, a_r については、

$$a_1 \equiv ([\infty], [\infty], \dots, [\infty]; [\infty])$$

$$a_r \equiv ([0], [0], \dots, [0]; [0])$$

としてもよい。ただし、 $[\infty], [0]$ はそれぞれ、全ての成分が $\infty, 0$ であるような γ 次元ベクトルであり、したがって、 a_r は「どの期にも何も消費できないし、 τ 期末に何も残せない」という事象である。

次に、その主体の提供する労働、等を定め、環境を予想すれば、それらに応じて a_i の実現する(主観的)確率 p_i を得る。]

さて、問題の性格上 $r \geq 2$ とし、先ず、

$$P \equiv \{p \equiv (p_1, \dots, p_r) \mid p_i \geq 0 \text{ for all } i, \sum_{i=1}^r p_i = 1\}$$

と定義しよう。 $r=3$ の場合の P は第 II 図において $p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}$ の 3 点を頂点とする正三角形である。von Neumann & Morgenstern [13] は、 P 上に選好 $\succsim$ を持っている主体の行動について研究した。 $\succsim$ とは、以下に示すように、preordering であり、 $p \succsim p'$ とは、「 a_i が p_i という確率で実現する状態 ($i=1, \dots, r$)」よりも、「 a_i が p'_i という確率で実現する状態 ($i=1, \dots, r$)」の方を、その主体が好ましく思うことはない」という意味である。

次に、 $p^{(i)}$ を P の特殊な元として次の如く定義する。

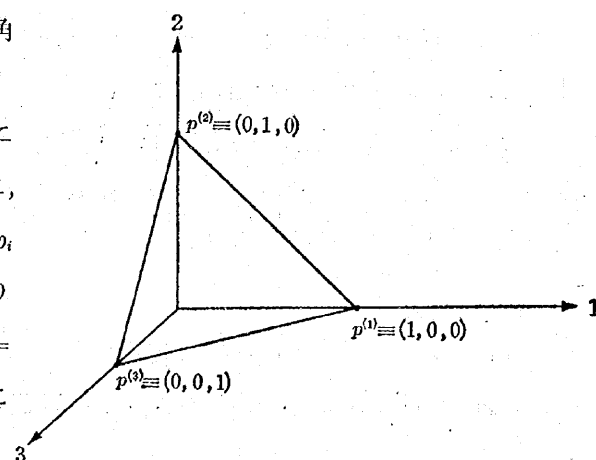
$$p^{(i)} \equiv (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$$

注(3) もっとも、この例で r が自然数(有限!)であるという仮定は納得的でないかも知れない。しかし、その場合には r を十分大きくとって 1 つの近似とする。

第 I 図 (第 i 事象において)

	第 1 期	第 2 期		第 τ 期
消費	$c_i(1)$	$c_i(2)$		$c_i(\tau)$
ストック				$k_i(\tau)$

第 II 図



つまり、 $p^{(i)}$ は事象 a_i が必ず生ずることを示す。

関係 $\succsim$ はどのような性質を満たしているであろうか? von Neumann & Morgenstern [13] は $\succsim$ についての公準を幾つか挙げ、そのもとで以下に示す定理を証明した。すなわち、これらの公準を満たす $\succsim$ を持ち、最も満足するように選択行動をする主体は、「合理的」に行動していると定義され、合理的主体に関する或る主張が得られたのである。

定 理 $\succsim$ が以下の公準 1-6 を満たしたとすると、

(i) 或る関数 u が存在し、任意の $p, p' \in P$ に関して、

$$p \succsim p' \iff \sum_{i=1}^r p_i u(a_i) \geq \sum_{i=1}^r p'_i u(a_i) \quad (1)$$

(ii) この関数 u は正の線形変換を除いて一意に定まる。すなわち、 $\alpha > 0$ として、

$$v = \alpha u + \beta; \quad \alpha, \beta = \text{定数} \quad (2)$$

で与えられる v も上の u の性質 (i) を満たし、逆に、上の u の性質 (i) を満たす任意の関数は下の v の如く (2) に書き表わされる。

主体は、全ての実現可能な状態の中から、彼が最も満足する状態を選ぶ(ゲーム論の言葉では、最適な戦略を選ぶ)、と想定される。前の例では、主体の提供する労働、等を変えると異なる $p \in P$ の状態を得るが、そのようにして実現可能な p の全ての集合 $P^\circ (\subset P)$ を得るであろう。もし、 $p^* \in P^\circ$ が存在し、任意の $p \in P^\circ$ に対して、

$$p^* \succsim p$$

が満たされるならば、その主体は p^* をもたらす状態を選択するに十分な理由がある。

上の定理の (i) は、こういった主体の行動を第三者が観察したとき、主体はあたかも確実な世界 $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ 上で定義された「効用関数 u 」を持っていて、その期待値 $\sum_{i=1}^r p_i u(a_i)$ を極大化するように行動するかの如く見える、と主張する。

u は選択行動を(第三者が)観察する場合の指標となるにすぎない。「満足の度合い」を表わすような必要は決していない。その点、これは、近年の序数的効用関数の概念と似ている。ただ、後者が order-preserving な変換をしても効用関数となり得たのに対し、ここでは正の線形変換に限られている。

von Neumann & Morgenstern [13] が或る種の公準のもとで定理の (i) (ii) を示した後、証明の改善、公準の吟味、等が Marschak [11], Herstein & Milnor [8] 等によってなされた。

本稿では Luce & Raiffa [9] を説明する。この公準はきついものであるが、その代わりに証明は

注(4) この公準は von Neumann & Morgenstern 自身 [13] によるものではない。

ほとんど必要とせぬ程に容易なものである。

「 a_i が p_i という確率で実現する状態 ($i=1, \dots, r$)」を「単純状態 p 」と呼ぶことにしよう。これに対して「複合状態」を定義して、「 s 個の単純状態 ($p^1, p^2, \dots, p^s$) の実現する確率がそれぞれ ($q_1, q_2, \dots, q_s$) $\equiv q$ である状態」とし、($p^1, \dots, p^s; q$) で表わすことにしよう。無論、

$$q_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad \sum_{i=1}^s q_i = 1$$

が成立する。

例えば、1つの複合状態 ($p^1, \dots, p^s; q$) を、「 a_i が p_i^j という確率で実現する状態 ($i=1, \dots, r$)」を q_j という確率で獲得する状態 ($j=1, \dots, s$) と解せば、これは条件付き確率の問題であり、結局、 a_i の実現する確率は、 $\sum_{j=1}^s p_i^j q_j$ である。

単純状態と複合状態との比較、あるいは複合状態間の比較も可能であると想定し、これを $\succsim$ で示すことにする。

公準 1 (i) (completeness) 任意の $p, p' \in P$ に対して

$$p \succsim p' \quad \text{または} \quad p' \succsim p$$

の少なくともどちらか一方の関係が必ず成立する。

(ii) (transitivity) $p \succsim p' \succsim p'' \Rightarrow p \succsim p''$.

特に、 $p^{(1)}$ に公準 1 を適用して、一般性を失わず、

$$p^{(1)} \succsim p^{(2)} \succsim \dots \succsim p^{(r)} \quad (3)$$

の成立するように、事象の番号づけを行なう。

さらに、 $p, p' \in P$ について、 $[p \succsim p' \ \& \ p' \succsim p]$ が成立しているとき、これを $[p \sim p']$ で表現し、「 p と p' とは無差別である」と言うことにしよう。 $\succsim$ についても $\sim$ を同様に定義し、次の公準 2 を置く。

公準 2 任意の複合状態 ($p^1, p^2, \dots, p^s; q$) に対し、 $p_i' \equiv \sum_{j=1}^s p_i^j q_j$ と定義して単純状態 $p' \equiv (p_1', \dots, p_r')$ を考えると、

$$p' \sim (p^1, p^2, \dots, p^s; q).$$

この公準 2 の妥当性は、複合状態についての先の解釈が示唆しているようである。

公準 3 i に応じて、実数 $u_i: 1 \geq u_i \geq 0$ が存在し、

$$p^{(1)} \sim u_i \cdot p^{(1)} + (1-u_i) \cdot p^{(r)}.$$

ただし、右辺は「 a_1 が u_i の確率で、 a_r が $(1-u_i)$ の確率で生ずる状態」を示す。任意の $p \in P$ に対しては、

$$p \sim (p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(r)}; p)$$

が公準 2 から導かれるが、次の公準 4 は、これを一層強める。

公準 4 (substitutability) $p' \sim p^{(1)}$ を満たす任意の $p' \in P$ についても、

$$p \sim (p^1, p^2, \dots, p^r; p)$$

が成立する。

公準 5 $\succsim$ は transitive, (定義は公準 1 (ii) を見よ)。

公準 6 任意の $\alpha, \beta: 1 \geq \alpha \geq 0, 1 \geq \beta \geq 0$ に対し、(3) を考慮し、

$$\alpha p^{(1)} + (1-\alpha) p^{(r)} \succsim \beta p^{(1)} + (1-\beta) p^{(r)} \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$$

以下、この節では定理の証明を示す。上の全ての公準を満たして、さらに $\succsim$ と無矛盾的な $\succ$ は非常に制約されたタイプであり、この特殊性を「合理性」と名付けるのであり、また、これを演繹すれば定理の (i) (ii) を得る。

補助定理 公準 1-5 のもとでは、任意の $p \in P$ に対し、

$$p \sim \left(\sum_{i=1}^r u_i \cdot p_i \right) \cdot p^{(1)} + \left(1 - \sum_{i=1}^r u_i \cdot p_i \right) \cdot p^{(r)}$$

補助定理の証明:

まず、右辺については公準 2 を使って実際に計算することにより、

$$(u_1 p^{(1)} + (1-u_1) p^{(r)}, u_2 p^{(1)} + (1-u_2) p^{(r)}, \dots, u_r p^{(1)} + (1-u_r) p^{(r)}; p)$$

$$\sim \left(\sum_{i=1}^r u_i p_i \right) \cdot p^{(1)} + \left(1 - \sum_{i=1}^r u_i p_i \right) \cdot p^{(r)}.$$

他方、公準 2, 3, 4 より、

$$p \sim (p^{(1)}, \dots, p^{(r)}; p)$$

$$\sim (u_1 p^{(1)} + (1-u_1) p^{(r)}, \dots, u_r p^{(1)} + (1-u_r) p^{(r)}; p)$$

公準 1, 5 の transitivity より求める結果を得る。

Q. E. D.

定理の証明:

(i) に関しては補助定理と公理 6 から自明。 $u(a_i) \equiv u_i$ と置けばよい。

(ii) について。まず、(2) の形の任意の関数 v は (1) の性質を満たすことを示そう。

$$\alpha > 0, \sum p_i = \sum p_i' = 1 \quad \text{だから}$$

$$p \succsim p' \Leftrightarrow \sum p_i u(a_i) \geq \sum p_i' u(a_i)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \left(\sum p_i u(a_i) \right) + \beta \geq \alpha \left(\sum p_i' u(a_i) \right) + \beta$$

$$\Leftrightarrow \sum p_i (\alpha u(a_i) + \beta) \geq \sum p_i' (\alpha u(a_i) + \beta)$$

次に、(1) の性質を持つ任意の関数 v は、(2) の如く書けることを示せばよい。以下、(3) の関係、

$u(a_i) \equiv u_i$ という事実、公準 3 を使う。まず、(3) より、

$$v(a_1) \geq v(a_2) \geq \dots \geq v(a_r)$$

$$u(a_1) \geq u(a_2) \geq \dots \geq u(a_r)$$

に注意しておこう。さて、連立方程式、

$$\begin{cases} v(a_1) = \alpha u(a_1) + \beta \\ v(a_r) = \alpha u(a_r) + \beta \end{cases}$$

を解いて、定数 α, β を得る。 $\alpha > 0$ は自明。公準3と v の性質より、

$$v(a_i) = u_i v(a_1) + (1 - u_i) v(a_r)$$

を得るが、この右辺に α, β の定義を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= u_i (\alpha u_1 + \beta) + (1 - u_i) (\alpha u_r + \beta) \\ &= \alpha \{u_i u_1 + (1 - u_i) u_r\} + \beta \end{aligned}$$

再び公準3より、上式の $\{ \}$ 内は $u(a_i)$ に等しく、かくして、

$$v(a_i) = \alpha u(a_i) + \beta$$

が示された。これは任意の $i=1, \dots, r$ について示された。

Q. E. D.

2-2. 主体的均衡については §2-1 で論ぜられた。次に、合理的主体が市場において多数出会ったとき、そこにどのような法則が見出されるであろうか？ その第一歩として、純粋競争を想定した市場（したがって価格が最も純粋な形で動く市場）での均衡状態を調べるのが経済分析の定石である。これを調べ尽くすことが、純粋性を阻害する要因（例えば、独占）の帰結を正しく調べることの助けともなる。

さて、このような均衡分析が無意味でないために、我々は根本的な点——市場均衡が成立するための十分条件を知らねばならない。そもそも市場均衡は存在するであろうか？

これに対する答えは、通常、完全予見の一般均衡理論（例えば Debreu [4] の Ch. 6 に至るまでの応用という形で、主に、モデルの解釈学が展開されて来た。最初の重要論文は Arrow [2] であり、本稿の §2-2-1 ではこれを説明し、加うるに、筆者自身の若干の分析をも展開する（定理(ii)）。

§2-2-2 ではその後の学説史に触れておく。

2-2-1. Arrow [2] は、不確実な世界において、先ず、実物財の純粋交換の先物市場を取り扱い（これを、以下、「モデルⅠ」と呼ぶ）、次に、有価証券を導入した市場のモデル（これを、以下、「モデルⅡ」と呼ぶ）を考えた。以下、先ず、前者について。

財が m 種類あり、主体が n 人居るものとし、将来に生ずる背反な事象が s 種類あるとしよう。

x_{ij} ≡ 第 i 事象が実現したときに供給される第 j 財の量で、これはその社会に所与。⁽⁵⁾ ($i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, m$).

注(5) 便宜上、財供給ベクトル $(x_{i1}, \dots, x_{im})$ のとる値によって事象を定義した。しかし、§2-1-2 の意味で定義した r 種類の事象とこの定義とは、全然意味が異なる点に注意。この点については、以下、本節モデルⅡにおいて効用関数を論ずるときに、より明確となるであろう。注(8)参照。

p_i^k ≡ 第 k 主体によって想定される、第 i 事象の主観的確率。($i=1, \dots, s$; $k=1, \dots, n$).

x_{ij}^k ≡ 第 i 事象が実現したときに第 k 主体が需要する第 j 財の量。($i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, m$; $k=1, \dots, n$).

と定義して、次のような経済を考える。

将来の財に対し、今、先物市場が成立しているとし、「第 i 事象が実現したとき第 j 財 1 単位を消費する権利」に対して価格 $\bar{q}_{ij}$ がつくものとする。このとき、第 k 主体は富 (wealth) w^k を与えられ、そのもとで効用関数

$$U^k(x_{11}^k, x_{12}^k, \dots, x_{1m}^k; x_{21}^k, \dots, x_{2m}^k; \dots; x_{s1}^k, \dots, x_{sm}^k; p_1^k, \dots, p_s^k) \quad (4)$$

を最大化するように「権利」を購入する。この「権利」の量も x_{ij}^k で表わして混乱を招かぬし、便利であろう。「第 i 事象が実現したときに第 j 財を消費する権利」を x_{ij}^k 単位得ることは、「第 i 事象において第 j 財」を x_{ij}^k 単位消費することに対応する。主体の行動は、

$$\begin{aligned} &\text{to maximize } U^k, \\ &\text{subject to } \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \bar{q}_{ij} x_{ij}^k \leq w^k, x_{ij}^k \geq 0, \\ &\text{given } p_i^k, w^k, \bar{q}_{ij}. \end{aligned} \quad (5)$$

と整約される。 p_i^k は固定して考えているから、このモデルは、通常、完全予見の場合と全く同様に取り扱える。違いは、後者の財が m 種類であるのに対し、前者の「財(権利)」が ms 種類にふえている点だけである。

かくして周知の定理が応用でき、或る種の条件のもとで市場均衡解、 $(\bar{q}_{ij}^*, x_{ij}^{k*})$ の存在が証明される。すなわち、 x_{ij}^{k*} は (5) の $\bar{q}_{ij}$ に $\bar{q}_{ij}^*$ を代入した問題の解となっており、しかも、需給均衡、

$$\sum_{k=1}^n x_{ij}^{k*} = x_{ij}$$

が満たされる。さらに、この (x_{ij}^{k*}) は効用関数 (4) の意味でパレート最適上の点であることも示される。

今、筆者は、市場均衡解存在のための「或る種の条件」と言ったが、最も重要な条件は、 U^k が $(x_{11}^k, \dots, x_{sm}^k)$ に関して準凹関数となることである。⁽⁶⁾ この経済的意味は、次の、有価証券の役割を吟味したモデルで明確となる。

次に想定する経済「モデルⅡ」は s 種類の有価証券を持った或る制度を背景としている。今期に第 i 証券 1 単位は q_i の価格で購入される。次に第 j 事象 ($j \neq i$) が実現すれば、第 i 証券は無価値となり、第 i 事象が実現すれば、第 i 証券 1 単位の価格は 1 となる。すなわち、今期に第 k 主体が富 w^k の制約のもとで s 種類の証券をそれぞれ

注(6) 最良の説明としては Debreu [4]。ただし、そこでは U^k がより強い条件を満たす場合を証明している。準凹関数の場合などの、より一般的な証明には Debreu [33] 参照。準凹関数の定義は、以下、本文に示す。

$$(y_1^k, y_2^k, \dots, y_s^k)$$

単位ずつ購入し、その後、もし第 i 事象が実現したなら、彼の富は y_i^k となる。

第 i 事象の実現した時点(ここでは、すでに完全予見の世界)で第 k 主体は第 j 財価格 q_{ij} ($j=1, \dots, m$) を所与とし、富 y_i^k の制約のもとで第 j 財を x_{ij}^k 単位需要する ($j=1, \dots, m$)。

第 1 に吟味すべきことは、均衡解 ($q_i^*, q_{ij}^*, y_i^{k*}, x_{ij}^{k*}$) の存在である。

前モデルの $\bar{q}_{ij}^*$ に対し、

$$q_i^* \cdot q_{ij}^* \equiv \bar{q}_{ij}^* \quad i=1, \dots, s; j=1, \dots, m$$

を満たすように q_i^*, q_{ij}^* を定義すると、今期の効用関数 (4) を持った第 k 主体は、前モデルの x_{ij}^{k*} が将来に得られるよう、

$$y_i^{k*} = \sum_{j=1}^m q_{ij}^* x_{ij}^{k*}, \quad i=1, \dots, s$$

単位ずつの証券を保有したいと思うであろう。(7) これが、上記の価格のもとで可能なことは、

$$\sum_{i=1}^s q_i^* y_i^{k*} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m q_i^* q_{ij}^* x_{ij}^{k*} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^m \bar{q}_{ij}^* x_{ij}^{k*} = w^k$$

から分かる。

その後、第 i 事象が実現している時には、この主体の問題は、確実な世界での最大化問題、

$$\begin{aligned} & \text{to maximize } u^k(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k), \\ & \text{subject to } \sum_{j=1}^m q_{ij}^* x_{ij}^k \leq y_i^{k*}, x_{ij}^k \geq 0, \\ & \text{given } y_i^{k*}, q_{ij}^*. \end{aligned}$$

と整約される。この解を x_{ij}^{k*} と置く。定義より、

$$u^k(x_{i1}^{k*}, \dots, x_{im}^{k*}) \geq u^k(x_{i1}^{k*}, \dots, x_{im}^{k*}) \quad (6)$$

が成立している。以下、解 x_{ij}^{k*} の中には、需給均衡

$$\sum_{k=1}^n x_{ij}^{k*} = x_{ij}$$

を満たすものが存在することを示せばよい。

ここで Arrow は von Neumann-Morgenstern 流の期待効用仮説(本稿 §2-1-2 で説明したような)を援用し、効用関数 (4) を特殊化する。

第 k 主体の効用関数を説明しよう。(8) 富、その他の制約条件を無視し、考えられ得る消費状態の全ての集合は、 m 次元空間の部分集合 X で表わされるであろう。 X は k に依存して定まってもよい。

$$x^k \equiv (x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k) \in X$$

の意味は、第 k 主体にとって x^k という消費が有意味であることを表わす。 X は、例えば、財の量が負の値を取り得ぬこと等の制約を x_j^k に課す。§2-1-2 では、 X の元の数(濃度)は n であった。

注(7) この証券の需給については、本稿では省く。Arrow [2] 参照。

(8) 前の注(5)参照。

しかし、Herstein & Milnor [8] が示したように、それは無限大でも期待効用仮説は成立する。かくして、 X 上で定義された確率測度を f とすれば、彼の期待効用関数は、

$$\int_X u^k(x^k) df(x^k) \quad (7)$$

で表わされる。

さて、モデル I, II に即して考えよう。 x_{ij}^k ($i=1, \dots, s; j=1, \dots, m$) という「権利」を購入すれば、 X 上の点 $(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k)$ の確率測度が p_i^k となるように f が定まる。すなわち、(7) は、

$$\sum_{i=1}^s p_i^k u^k(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k) \quad (8)$$

と書き改められる。結局、第 k 主体は富の制約のもとで (8) を極大化するように $(y_1^{k*}, \dots, y_s^{k*})$ ずつの各証券を需要したのである。

均衡解存在についての話を続けよう。まず、 $p_i^k > 0$ なる i については (6) が等号で満たされることは簡単に分かる。事実、そうでないとすると、(6) が全ての i について成立していることを考慮して、

$$\sum_{i=1}^s p_i^k u^k(x_{i1}^{k*}, \dots, x_{im}^{k*}) > \sum_{i=1}^s p_i^k u^k(x_{i1}^{k*}, \dots, x_{im}^{k*})$$

となって、 x_{ij}^{k*} がモデル I における解であることに矛盾(ここで、 U^k は、無論、(7) の形、したがって (8) の形をとる)。

したがって、 $p_i^k > 0$ なる i については、 $x_{ij}^{k*} = x_{ij}^{k*}$ ($j=1, \dots, m$) というように x_{ij}^{k*} を需要してもよいことが分かった。

次に、 $p_i^k = 0$ なる i については、モデル I については $x_{ij}^{k*} = 0$ ($j=1, \dots, m$) であろうし、したがって、モデル II については $y_i^{k*} = 0$ であろう。故に、 $x_{ij}^{k*} = x_{ij}^{k*} = 0$ ($j=1, \dots, m$) を解としてもよい。

いずれの場合についても、

$$x_{ij}^{k*} = x_{ij}^{k*}, \quad i=1, \dots, s; j=1, \dots, m$$

としてよく、しかも、 x_{ij}^{k*} については需給均衡が満たされている。

第 2 に吟味すべきことは、 U^k が $(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k)$ に関して準凹関数であることの経済的意味である。

一般に、ベクトル x の実数値関数 $f(x)$ が準凹関数であるとは、

$$[f(x) \geq f(y) \ \& \ 0 \leq t \leq 1] \Rightarrow [f(tx + (1-t)y) \geq f(y)]$$

の成立することを言う。

一般に、ベクトル x の実数値関数 $f(x)$ が凹関数であるとは、 $0 \leq t \leq 1$ として、

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

の成立することを言う。凹関数ならば準凹関数である。

定理 (i) $U^k(x_{11}^k, \dots, x_{sm}^k; p^k) = \sum_{i=1}^s p_i^k u^k(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k)$ が $(x_{11}^k, \dots, x_{sm}^k)$ に関する準凹関数であるならば、 u^k は $(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k)$ に関する準凹関数である。

(ii) U^k が $(x_{11}^k, \dots, x_{sm}^k)$ に関する凹関数であるための必要十分条件は、 u^k が $(x_{i1}^k, \dots, x_{im}^k)$ に関して凹関数となることである。⁽⁹⁾

Arrow は u^k が凹関数であるような主体を、risk averter (危険を嫌う人) と定義した。というのは、例えば、 $s=2$ としてみると、

$$u^k\left(\frac{x_{11}^k+x_{21}^k}{2}, \dots, \frac{x_{1m}^k+x_{2m}^k}{2}\right) \geq \frac{1}{2}(u^k(x_{11}^k, \dots, x_{1m}^k) + u^k(x_{21}^k, \dots, x_{2m}^k))$$

すなわち、 $\left(\frac{x_{11}^k+x_{21}^k}{2}, \dots, \frac{x_{1m}^k+x_{2m}^k}{2}\right)$ を確実に得る方が、even gamble に参加して、 $(x_{11}^k, \dots, x_{1m}^k)$ を 1/2 の確率で、 $(x_{21}^k, \dots, x_{2m}^k)$ を 1/2 の確率で得る方よりも好ましく思うからである。かくして、上の定理の (ii) により、ほとんど全ての主体が risk averter ならば、モデル I, II の競争均衡解が存在し、しかもそれはパレート最適上の点となっていることが示されたのである。

定理の証明:

余計な記号は徒らに外見の優美さを損うだけであるから、添字の k は全て省き、

$x_i \equiv (x_{i1}, \dots, x_{im}) : m$ 次元ベクトル

$x \equiv (x_1, \dots, x_s) : sm$ 次元ベクトル

と定義すれば、(8)は、

$$U(x) = \sum_{i=1}^s p_i u(x_i)$$

と書け、これについて証明すればよい。

(i) については、まず、 $p_i > 0$ であるような任意の i を選ぶ。

$x \equiv (x_1, \dots, x_{i-1}, x', x_{i+1}, \dots, x_s)$

$y \equiv (x_1, \dots, x_{i-1}, y', x_{i+1}, \dots, x_s)$

と置けば、(8)より、

$$[U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow u(x') \geq u(y')]$$

$$[U(tx + (1-t)y) \geq U(y) \Leftrightarrow u(tx' + (1-t)y') \geq u(y')]$$

を得る。したがって $u(x') \geq u(y')$ を満たす任意の x', y' に対し、 U の準凹性を使って、 $u(tx' + (1-t)y') \geq u(y')$ を得る。

(ii) の証明について、十分性は次の式による。

注(9) この定理の (ii) は長名寛明助手と筆者との共同で考え出された。

$$\begin{aligned} U(tx + (1-t)y) &= \sum_{i=1}^s p_i u(tx_i + (1-t)y_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^s p_i (tu(x_i) + (1-t)u(y_i)) \\ &= t \sum_{i=1}^s p_i u(x_i) + (1-t) \sum_{i=1}^s p_i u(y_i) \\ &= tU(x) + (1-t)U(y) \end{aligned}$$

必要性は、任意の m 次元ベクトル x', y' に対して (i) の証明と同様に sm 次元ベクトル x, y を定めれば、 U の凹性から、任意の $t: 0 \leq t \leq 1$ について、

$$U(tx + (1-t)y) \geq tU(x) + (1-t)U(y)$$

を得るが、 $p_i > 0$ より、これは

$$u(tx' + (1-t)y') \geq tu(x') + (1-t)u(y')$$

を意味する。

Q. E. D.

2-2-2. Arrow [2] と異なる分析により、不確実性の経済を考察したものには、同じ頃、Allais [1] がある。また、Debreu [4] Ch. 7 では生産の側面をも考慮して分析を進めている。最近、Radner [16] が上記の Arrow, Debreu の考え方をより精緻に、また、より一般的に定式化した。とりわけ、先物市場 (future market) に対して現物市場 (spot market) をも導入し、それとの関連で Keynes の流動性選好理論を扱ったことが注目される。ここで、彼は従来の分析の方法がそのままでは使えぬ可能性の有ることを主張しているが、その点の検討は後に残された課題であろう。

2-3. 今まで説明して来た期待効用仮説を保険や賭博に応用して分析を進めたものに Friedman & Savage [6] がある。これは甚だ直観的な (あるいは、雑な) 推論の仕方をしてい、特に前記の Arrow [2] の条件を考慮に入れるとき、どの程度まで信頼性のある理論がどうか、今の筆者には疑問である。しかし、均衡分析の例としては興味深いので、ここに簡単な紹介を与えておこう。なお、その後の些細な議論として Markowitz [12], Friedman & Savage [7] がある。

§ 2-1-2 で定義した事象の内容 a_i を、ここでは所得 (income) の水準 I_i とする。主体は

$$\sum_{i=1}^s p_i u(I_i)$$

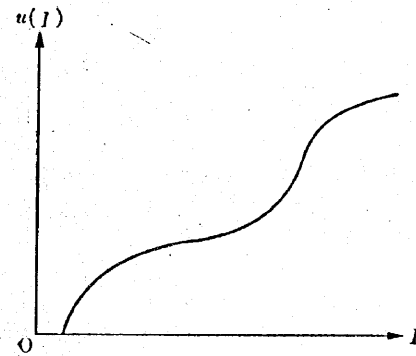
を最大にするように行動する (具体的には、保険に加入するか否か、賭博に参加するか否かを定める) であろう。そこで Friedman & Savage [6] は観察によって得られた事実を幾つか挙げ、主体の行動が観察的事実通りになるならば、 u はどのような形状でなければならぬかを推論した。

彼等の観察的事実とは次の (i) - (v) である。

(i) 主体は低所得よりも高所得の方を選好する。

(ii) 低所得階層の主体は保険に加入する、ないし、加入したいと思う。

第 III 図



- (iii) 低所得階層の主体は富クジ札を買う、ないし、買いたいと思う。
- (iv) 低所得階層の多くの主体は、保険と富クジ札の両方を買う、ないし、買いたいと思う。
- (v) 富クジは、典型的には、複数人に賞が当たる。
- 典型的な主体の u は第 III 図の如くであろう、というのが Friedman & Savage の推論である。そこでは所得 I が小さいときには u は上に凸であり、 I が大きくなると u は下に凸になり、最後に、最も大きい I のあたりでは u は再び上に凸となる。

III 2 パラメーター仮説

3-1. 当初、経営学の問題として、とりわけ Markowitz [21] [22] によって開発された 2 パラメーター仮説は、その後、Tobin [28] によって経済学に導入され、金融理論を進展せしめることとなった。この仮説は直観的なところから出発して、期待効用仮説におけるような厳密な基礎固めが未だされていない。その反面、論理構造が単純であるため、多くの明解な主張が発見されているし、実際の証券会社にも応用されている。本稿では §3-1-1 において仮説について、§3-1-2 においていわゆる「分離定理」について、§3-1-3 において主体的均衡に関する比較静学について概説する。

3-1-1. 典型的な例として、次のような経済を考えよう。財は m 種類、次期に起こると論理的に考えられる全ての背反な事象は r 種類あるものとする。今期期首に第 j 財を 1 単位買い、次期期首に第 i 事象が生じた場合、その結果として、1 単位の第 j 財の価格は b_{ij} 円となり、加うるに c_{ij} 円の配当金（または、利子、等）を得るものとしよう。

$$a_{ij} \equiv b_{ij} + c_{ij}$$

と定義すれば、これは第 j 財 1 単位に投資し、第 i 事象が実現した結果の価値である。

今期、主体が次期の第 i 事象の実現する（主観的）確率 p_i を抱いているとし（ $i=1, \dots, r$ ），第 j 財を x_j 単位保有するとしよう（ $j=1, \dots, m$ ）。

2 パラメーター仮説は、次期に有することとなる総価値（確率変数）に或る特定の仕方では着目する理論である。

注(10) ここで「期」とは、Hicks [34] の意味での「週」(week) と解釈すべきである。

$$\mu_j \equiv \sum_{i=1}^r p_i a_{ij}, \quad j=1, \dots, m$$

と定義し、 x を第 j 成分が x_j であるような m 次元ベクトル、 μ を第 j 成分が μ_j であるような m 次元ベクトルとすると、上記の総価値の期待値は、

$$E \equiv \mu^T x \quad (\text{肩の添字は転置を示す}) \quad (9)$$

で表わされる。さらに、総価値の標準偏差は、

$$S \equiv \sqrt{x^T C x} \quad (10)$$

で表わされる。ここで C は共分散行列であり、その第 i 行第 j 列要素は、容易に分かるように、

$$\sigma_{ij} \equiv \sum_{h=1}^r p_h a_{hi} a_{hj} - \left(\sum_{h=1}^r p_h a_{hi} \right) \left(\sum_{h=1}^r p_h a_{hj} \right)$$

となる。

主体の行動は、効用関数

$$U = U(E, -S) \quad (11)$$

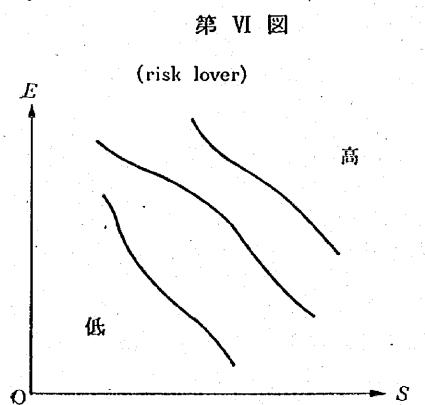
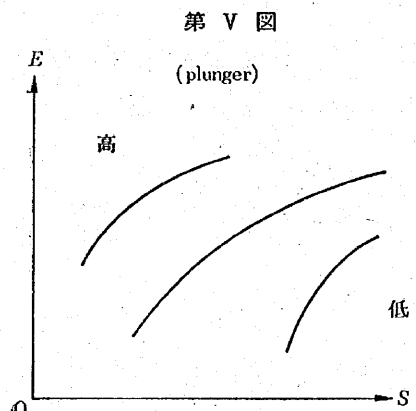
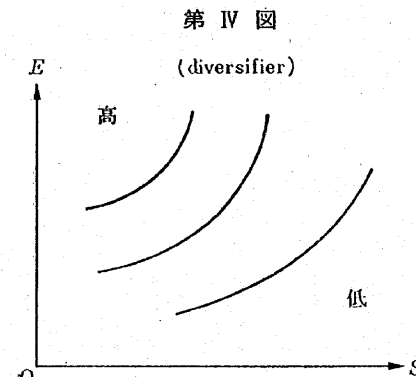
を指標として記述できる、と想定するのが 2 パラメーター仮説である。 E に関しては説明する必要はあるまい。 S に関しては、これを「危険」の尺度と看做す。Tobin [28] は、 U が $(E, -S)$ の増加関数であるような主体を risk averter (危険を嫌う人)、 (E, S) の増加関数であるような主体を risk lover (危険を冒したがる人) と呼んだ。さらに、risk averter のうち、 U が $(E, -S)$ の準凹関数である主体を diversifier (危険を分散させて多くの財を保有する人)、準凸関数であるような主体を plunger (ヤマをかけて 1 つの財に集中する人) と呼んだ。diversifier, plunger の名称の所以は次節で分かる。各タイプの無差別曲線は第 IV—VI 図に例が示されている。

さて、 U が $(E, -S)$ の連続関数であるとしよう。 a_{ij} は経済にとって、 p_i はその主体にとって所与だから、(9) (10) を (11) に代入して、

$$U = u(x) \quad (12)$$

と書くことが出来て、 u は x の連続関数である。なお、 u の形状は $(p_1, \dots, p_r)$ にも依存している。

主体がこれから投資しようと思う富の総額を w 、第 j 財の価格を q_j とすると（ $j=1, \dots, m$ ），彼の問題は、



注(11) Arrow [2] における定義とは異なる。

(12) 関数 f が準凸関数であるとは、 $-f$ が準凹関数であることである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{to maximize } u(x_1, \dots, x_m) \\ \text{subject to } \sum_{j=1}^m q_j x_j = w, x_j \geq 0, \\ \text{given } q_j. \end{array} \right\} \quad (13)$$

と整約される。もし、

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \mid \sum_{j=1}^m q_j \xi_j = w, \xi_j \geq 0$$

がコンパクトなら、上の問題の解は存在する。

この節を終えるに当たり、「貨幣」(第 m 財とする)について特に考えてみよう。他の財については資本利得等があるが、こういったものが皆無な財を「貨幣」と定義する。つまり、

$$a_{1m} = a_{2m} = \dots = a_{rm}.$$

この場合の共分散行列 C は、第 m 行の全ての要素、第 m 列の全ての要素が0となる。

3-1-2. 主体が直面する問題は前節で明らかにされた。さて、我々が主体の身になってみると、最も合理的に行動せねばならない(つまり(3)を解かねばならない)。このためには、一見、複雑な計算が待ち構えているようである。しかし、2パラメーター仮説のもとでは或る定理が確立されていて、これを応用すれば、最適化が非常に簡単に達成される。これは「分離定理」と呼ばれ、その萌芽はすでに Markowitz [21] にも見られるが、Tobin [28] によって確立され、Sharpe [25], Lintner [20] によって拡張され、さらに、最近では江沢 [18] により、一般的な命題が優美に主張されている。

本稿では分離定理の最も典型的な形態を、Lintner [20] に添って証明する。ここでも第 m 財を前節の意味での貨幣とする。

分離定理 risk averter は意志決定の仕方を次の2段階に分けてもよい。すなわち、 $x_m > 0$ である限り、

(i) 先ず、第1財から第 $(m-1)$ 財までの保有すべき構成比、

$$x_1 : x_2 : \dots : x_{m-1}$$

を定める。これを定めることによって第1財から第 $(m-1)$ 財までを、1種類の“composite goods”と看做し得る。

(ii) 次に、この composite goods と第 m 財(貨幣)との比を定める。

分離定理の証明:

(i) $y = q_m x_m$ と置けば、第 m 財(貨幣)の性質より、

$$E = \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j x_j + \frac{\mu_m}{q_m} y,$$

$$S = \left(\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} x_i x_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

したがって、 $x_j = x_1 k_j$ と定義すれば、

$$E = x_1 \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j k_j \right) + \frac{\mu_m}{q_m} y,$$

$$S = x_1 \left(\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} k_i k_j \sigma_{ij} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_1 \left(\sum_{j=1}^{m-1} q_j k_j \right) + y = w, \quad x_1, k_j \geq 0.$$

(ii) 今、任意に比

$$x_1 : x_2 : \dots : x_{m-1}$$

を定める。例えば、 $k_1, \dots, k_{m-1}$ をそれぞれ定数として、

$$\frac{x_1}{x_1} = 1 = k_1, \quad \frac{x_j}{x_1} = k_j, \quad j=2, \dots, m-1$$

とする。このとき、 y をパラメーターとして $0 \leq y \leq w$ の範囲で動かしてみると、(i)の結果より、それに応ずる (E, S) の軌跡は、直線

$$E = \frac{q_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} \mu_j k_j \right) - \mu_m \left(\sum_{j=1}^{m-1} q_j k_j \right)}{q_m \sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} k_i k_j \sigma_{ij}}} S + \frac{\mu_m}{q_m} w \quad (14)$$

上にあることが分かる。この軌跡は第VII図に実線で描かれている。

(ii) どのような比 $(k_1, \dots, k_{m-1})$ を定めても、この直線は E 軸を $\mu_m w / q_m$ の高さで切る。したがって、risk averter は(i)直線の傾き α を最も大きくするような $(k_1, \dots, k_{m-1})$ を定め、(ii)選ばれた線分(この一般形を opportunity locus と言う)上で、最も高い無差別曲線と接する点に必ずるよう、 y を定めればよい。

Q. E. D.

なお、第VII図に無差別曲線を書き込めば、diversifier, plunger の名称の所以が分かる。均衡においては、通常の diversifier は貨幣も他の財も共に持つであろう。plunger は $[y=w]$ の点(富を全て貨幣の形態で保有する)か、 $[y=0]$ の点(貨幣を全然持たない)のいずれかで均衡するであろう。

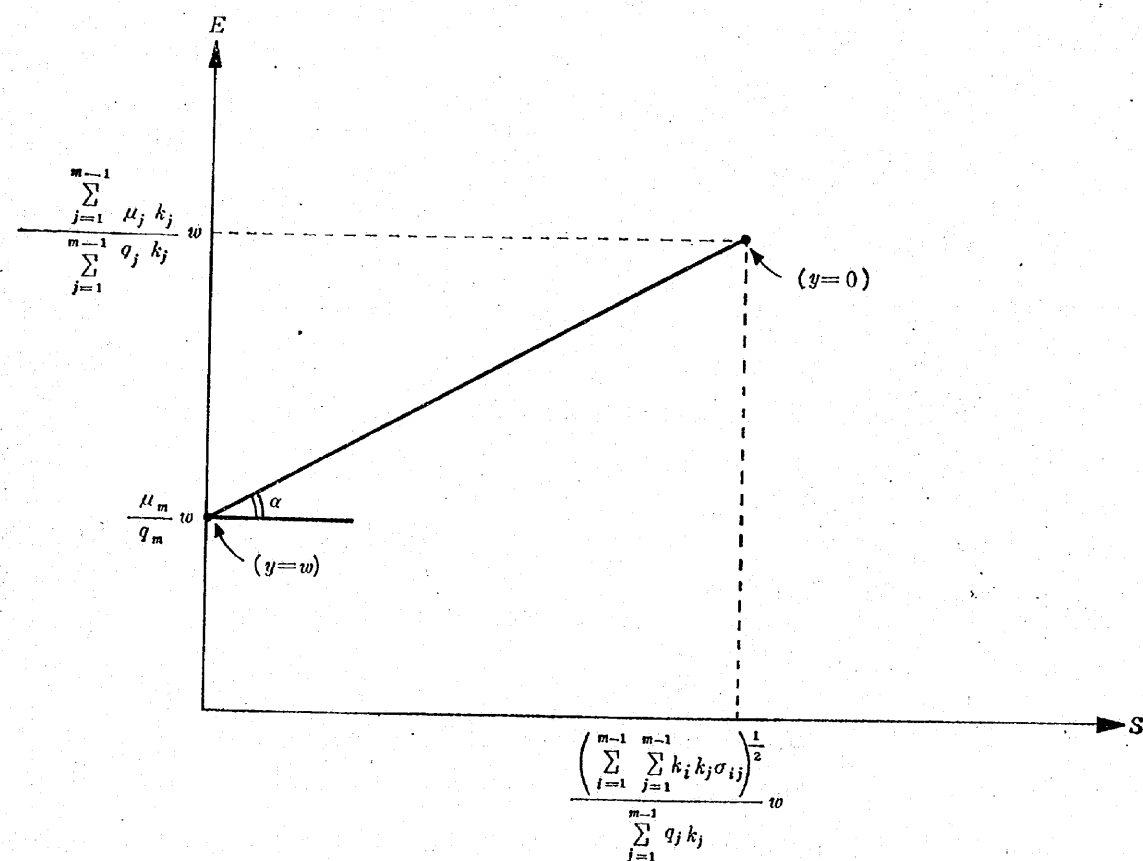
3-1-3. 主体の直面する問題(3)は、与件、 $\mu_j, \sigma_{ij}, w, q_j$ を所与として解かれた。我々が進んで次に分析すべきことは、こういった与件が変化すると、それに依りて解もどの方向に変化するか、という比較静学である。この節では diversifier について考える。

w や q_j の変化に対しては、周知の分析がある。⁽¹³⁾しかし、本稿の主題に特徴的な与件、 μ_j, σ_{ij} の変化(つまり、期待の変化)に応じた解の動きについてはどうであろうか?

この問題は浜田、蠟山 [24] によって考察され、スルツキー方程式と同様の結果が得られている。

注(13) 例えば、Hicks [34] を見よ。

第 VII 図



ただし、[24]においては共分散行列 C が正の定符号を持つと仮定されていた。⁽¹⁴⁾ (したがって、§3-1-2で議論されたような貨幣は無いものとされていた。)

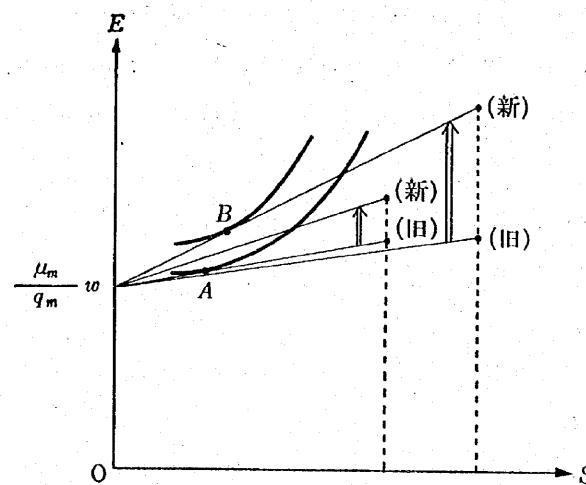
この節の目的は、上のような貨幣が保有されているときの比較静学を考えることである。diversifier について考えているのだから、我々は opportunity locus に限って分析してよい。さらに、貨幣が保有されているときを考えているから、第 VII 図において最も大きい α をもたらす線分に限って分析してよい。

(i) μ_j ($j=1, \dots, m-1$) が変化した場合:

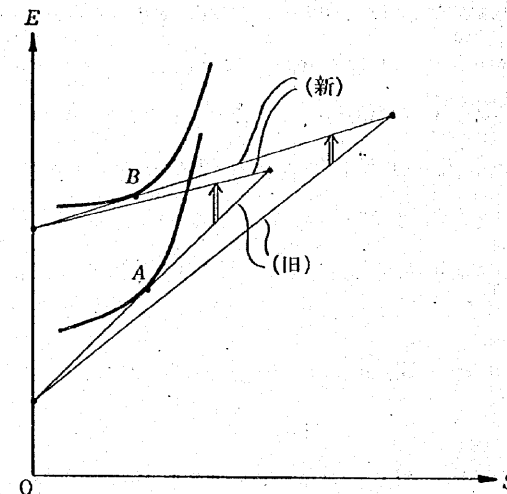
$(k_1, \dots, k_{m-1})$ を定めて第 VII 図の 1 本の線分を得るが、これは μ_j ($j=1, \dots, m-1$) だけが変化したとき、[E 軸との交点] も [$y=0$ に応ずる点の S の値] も影響を受けず、したがって、線分は、例えば第 VIII 図に描かれたように縦にシフトするであろう。主体的均衡点は $A \rightarrow B$ と移る。この図の例では、 $(m-1)$ 種類の財需要量の比、 $x_1 : \dots : x_{m-1}$ も変わることを示している (最大の α をもたらす比が変わる)。

注(14) 対称行列 C が任意の非零ベクトル x に対し、 $x^T C x > 0$ であるならば、positive definite と言う。

第 VIII 図



第 IX 図



(ii) σ_{ij} ($i, j=1, \dots, m-1$) が変化した場合:

この場合も (i) と同様である。第 VII 図の実線は横にシフトするが、それと E 軸との交点是不変である。

(iii) μ_m/q_m が変化した場合:

これは E 軸との交点が変わるが、 $y=0$ に応ずる点是不変の場合である。第 IX 図は主体的均衡における財需要量の比も変わる場合を示している。

なお、 μ_m, q_m の比例的变化は、均衡解に何等影響を与えないことに注意すべきである。

(iv) w が変化した場合:

これは第 VII 図の線分について考えたとき、座標軸の単位の変更と全く同じである。無差別曲線の形状によっては“composite goods の量”と y との比は変わるであろう。しかし“composite goods の内容”、 $x_1 : \dots : x_{m-1}$ は何等影響を受けない。

3-2. 主体的均衡に続いて考察すべきことは市場均衡である。ここでも問題となるのは、まず、市場均衡解の存在である。この点は筆者の修士論文 [19] で取り上げられた。本稿 §3-2-1 はこれを論ずる。次に、市場均衡解はどのような法則を満たすであろうか? 2 パラメーター仮説のもとでは (他の分野に比して) 比較的強い法則が発見されている。例えば、Sharpe [26], Mossin [23] において確立した market line の定理がある。もっとも、主体的均衡の枠内ではあるが、同様の観察は Lintner [20] にも見られる。本稿 §3-2-2 ではこれを論ずる。

3-2-1. 筆者は [19] において共分散行列に関する補助定理を確立し、その応用として均衡解の存在問題を扱った。Keynes による次の言葉は市場均衡についての 1 つのヴィジョンを与えるであろう。

"The individual, who believes that future rates of interest will be above the rates assumed by the market, has a reason for keeping actual liquid cash, whilst the individual who differs from the market in the other direction will have a motive for borrowing money for short periods in order to purchase debts of longer term. The market price will be fixed at the point at which the sales of the 'bears' and the purchases of the 'bulls' are balanced."⁽¹⁵⁾

期待効用仮説のもとでは Arrow [2] によって解かれた。2 パラメーターの場合でも、問題となるのは効用関数 (12) の x に関する準凹性である。筆者 [19] は次の結果を得た。

定理 diversifier の効用関数 (12) は、 x に関する準凹関数である。

この定理により、市場が diversifier によって形成されているならば、市場均衡解の存在が保証される。

次の補助定理の一般的証明は原典 [19] 参照ということにして、ここでは 2 次の行列について初等的証明を与えておこう。

補助定理 C を共分散行列とすれば、任意の実ベクトル x, y に対し、次の不等式が成立する。

$$(x^T C y)^2 \leq (x^T C x) \cdot (y^T C y).$$

補助定理の証明:

証明には C が対称であることと、非負の定符号を持つことを使う。証明すべき式を展開し、対称性を使いつつ整理すると、結局、我々は、

$$(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) \cdot (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0$$

を示せばよい。しかるに、これは非負の定符号性によって満たされている。⁽¹⁶⁾

Q. E. D.

定理の証明:

$u(x^2) \geq u(x^1)$ を満たす任意のベクトル x を定め、また、任意の $t: 0 \leq t \leq 1$ に対して、 $x^3 \equiv tx^2 + (1-t)x^1$ と置く。補助定理より、

$$\begin{aligned} & x^3{}^T C x^3 \\ &= t^2 x^2{}^T C x^2 + (1-t)^2 x^1{}^T C x^1 + 2t(1-t) x^2{}^T C x^1 \\ &\leq t^2 x^2{}^T C x^2 + (1-t)^2 x^1{}^T C x^1 + 2t(1-t) \sqrt{x^2{}^T C x^2} \sqrt{x^1{}^T C x^1} \end{aligned}$$

注 (15) Keynes [36] p. 170.

(16) 正(負)の定符号、非負(非正)の定符号を持つ行列については、例えば、Debreu [32] 参照。

$$= (t\sqrt{x^2{}^T C x^2} + (1-t)\sqrt{x^1{}^T C x^1})^2.$$

したがって、

$$\begin{aligned} & (\mu^T x^3, -\sqrt{x^3{}^T C x^3}) \\ & \geq t(\mu^T x^2, -\sqrt{x^2{}^T C x^2}) + (1-t)(\mu^T x^1, -\sqrt{x^1{}^T C x^1}). \end{aligned}$$

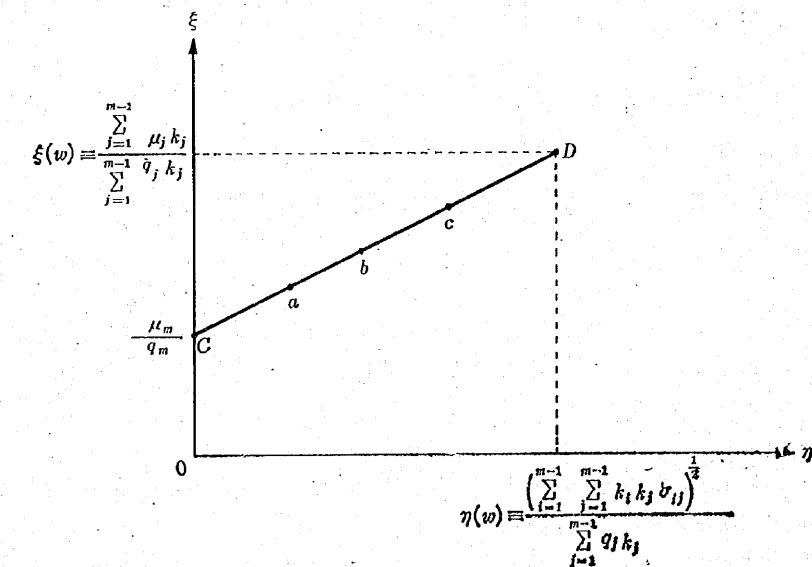
かくして、もし、関数 (11) が $(E, -S)$ に関して非減小、準凹関数ならば、

$$\begin{aligned} u(x^3) &\equiv U(\mu^T x^3, -\sqrt{x^3{}^T C x^3}) \\ &\geq U(t(\mu^T x^2, -\sqrt{x^2{}^T C x^2}) + (1-t)(\mu^T x^1, -\sqrt{x^1{}^T C x^1})) \\ &\geq U(\mu^T x^1, -\sqrt{x^1{}^T C x^1}) \equiv u(x^1). \end{aligned}$$

Q. E. D.

3-2-2. この節で述べることは、いわゆる「market line の定理」である。これは市場均衡解において成立する 1 つの性質であり、全ての主体が diversifier で、しかも将来に対して同じ期待、 μ_j , σ_{ij} を持つケースについて考えられた。市場均衡解について考察しているのだから、各主体とも同一の価格 q_j を所与としている。かくして第 VII 図の最も大きな α の線分に応じて、座標軸をそれぞれ $\eta = S/w$, $\xi = E/w$ にした図を描いてみると、各主体とも同一の線分 CD を得る(第 X 図)。各主体の均衡点は、($x_m > 0$ である限り)、線分 CD 上に乗っている。そのどの点に定まるかは効用関数 (11) の形状に依存している。主体が違えば、 a, b, c というように異なる点に定まるであろう。market line とは、この線分 CD を指す。

第 X 図



線分 CD は効用関数 (11) に依存する。というのは、この導出には q_j を知らねばならず、そして均衡価格 q_j は効用関数 (11) に依存して定まるからである。

線分 CD の意味をさらに考えてみよう。 $y: 0 \leq y \leq w$ に応ずる $E/w, S/w$ の値をそれぞれ $\xi(y)$,

$\eta(y)$ で表わせば、容易に分かるように、

$$\xi(y) = \frac{\mu_m}{q_m} + \frac{\xi(w) - \frac{\mu_m}{q_m}}{\eta(w)} \cdot \eta(y)$$

これは1円当たり投資の、将来の平均価値と危険との関係を示していて、Fisher の market opportunity line である。

IV 2つの仮説の比較

4.1. 期待効用仮説の特殊ケースは、2パラメーター仮説によって処理できることが Tobin [28] によって示されている。§2 で得た期待効用、

$$\int_x u(x) df(x) \quad (15)$$

について、

- (i) u が x の2次形式である場合、
- (ii) 確率測度 f の形状が平均値と分散とによって決定され、しかも平均に関して対称である場合 (例えば正規分布)、

の少なくともいずれか一方が成立するならば、(5)は2パラメーターの効用関数(ii)の如く書ける。

期待効用仮説は、一般には、2パラメーター仮説によって処理できない。このことは、(5)において、 u が複雑な形をとり、 f が一般の(より高次のモーメントに依存するような)場合を考えれば自明である。

4.2. 他方、2パラメーター仮説も、一般には、期待効用仮説によって処理できない。例えば、

$$U = E/(S^2 + 1)$$

という効用関数を考えれば、これは明らかに diversifier であるが、分数の形になっているため、(5)の如くに表わせない。

文 献

(その1)

- [1] Allais, M., "L' Extension, des Théories de l' Equilibre Economique General et du Rendement Social au cas du Risque," *Econometrica*, Vol. 23, No. 2 (April, 1953).
- [2] Arrow, K.J., "Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risque," *Econometrie*, (Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1953) translated in English as "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing," *Review of Economic Studies*, Vol. 31(2) (April, 1964).
- [3] Bernoulli, D., "Specimen theoriae novae de mensura sortis," *Commentarii academiae scientiarum imperiales Petropolitanae*, Vol. 5 (1738), translated in English as "Extension of a New Theory on the

Measurement of Risk," *Econometrica*, Vol. 22, No. 1 (January, 1954).

- [4] Debreu, G., *Theory of Value*, (John Wiley & Sons, New York 1959).
- [5] Diamond, P. A., "The Role of a Stock Market in a General Equilibrium Model with Technological Uncertainty," *American Economic Review*, Vol. 57, No. 4 (September, 1967).
- [6] Friedman, M. & Savage, L.J., "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, Vol. 56, No. 4 (August, 1948).
- [7] Friedman, M. & Savage, L.J., "The Expected-Utility Hypothesis and the Measurability of Utility," *Journal of Political Economy*, Vol. 60, No. 6 (December, 1952).
- [8] Herstein, I. N. & Milnor, J., "An Axiomatic Approaches to Measurable Utility," *Econometrica*, Vol. 23, No. 2 (April, 1953).
- [9] Luce, R. & Raiffa, H., *Games and Decisions*, (John Wiley & Sons, New York 1957).
- [10] Marschak, J., "Neumann's and Morgenstern's New Approach to Static Economics," *Journal of Political Economy*, Vol. 54, No. 2 (April, 1946).
- [11] Marschak, J., "Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility," *Econometrica*, Vol. 18, No. 2 (April, 1950).
- [12] Markowitz, H., "The Utility of Wealth," *Journal of Political Economy*, Vol. 60, No. 2 (April, 1952).
- [13] von Neumann, J. & Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd. ed. (Princeton Univ. Press, Princeton, 1947).
- [14] Pollak, R. A., "Additive von Neumann-Morgenstern Utility Function," *Econometrica*, Vol. 35, No. 3-4 (July-October, 1967).
- [15] Pratt, J.W., "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, Vol. 32, No. 1-2 (January-April, 1964).
- [16] Radner, R., "Competitive Equilibrium under Uncertainty," *Econometrica*, Vol. 36, No. 1 (January, 1968).

(その2)

- [17] Bierwag, G. O. & Grove, M.A., "On Capital Asset Prices: Comment," *Journal of Finance*, Vol. 20, No. 1 (March, 1965).
- [18] Ezawa, T., "A Separation Theorem in Portfolio Selection," 『季刊理論経済学』 Vol. 19, No. 3 (November, 1968).
- [19] Ichiishi, T., "A Note on a Covariance Matrix with its Application to the Two-Parameter Hypothesis on Risky-Asset Choice," to appear in the *Review of Economic Studies*.
- [20] Lintner, J., "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolio and Capital Budget," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1 (February, 1965).
- [21] Markowitz, H., "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1 (March, 1952).
- [22] Markowitz, H., *Portfolio Selection*, (John Wiley & Sons, New York 1959).
- [23] Mossin, J., "Equilibrium in a Capital Asset Market," *Econometrica*, Vol. 34, No. 4 (October, 1966).
- [24] Royama, S. & Hamada, K., "Substitution and Complementarity in the Choice of Risky Assets," Paper 2 in *Risk Aversion and Portfolio Choice*, ed. by Hester, D. D. & Tobin, J. (John Wiley & Sons, New York 1967).
- [25] Sharpe, W., "A Simplified Model for Portfolio Analysis," *Management Science*, Vol. 9, No. 2 (January, 1963).
- [26] Sharpe, W., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (September, 1964).

- [27] Sharpe, W., "Reply," *Journal of Finance*, Vol. 20, No. 1 (March, 1965).
- [28] Tobin, J., "Liquidity Preference as Behavior Towards Risk," *Review of Economic Studies*, Vol. 25(2) (February, 1958).
- [29] Tobin, J., "The Theory of Portfolio Selection," Ch. 1 in *The Theory of Interest Rates*, ed. by Hahn, F. H. & Brechling, F. P. R. (Macmillan, London 1965)
- (その3)
- [30] Arrow, K.J., "Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations," *Econometrica*, Vol. 19, No. 4 (October, 1951).
- [31] Aumann, R. J., "Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders," *Econometrica*, Vol. 34, No. 1 (January, 1966).
- [32] Debreu, G., "Definite and Semidefinite Quadratic Forms," *Econometrica*, Vol. 20, No. 2 (April, 1952).
- [33] Debreu, G., "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis," *International Economic Review*, Vol. 3, No. 3 (September, 1962).
- [34] Hicks, J.R., *Value and Capital*, 2nd. ed. (Oxford Univ. Press, London 1946).
- [35] 市石達郎「フォン・ノイマン・モデル」『経済学年報』第11巻(1967).
- [36] Keynes, J.M., *The General Theory of Employment, Interest and Money*, (Macmillan, London 1936).
- [37] 根岸 隆「貨幣の一般均衡分析」『経済学論集』第32巻第1号(1966年4月).
- [38] von Neumann, J., „Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, Vol. 8 (1937), translated in English as "A Model of General Economic Equilibrium," *Review of Economic Studies*, Vol. 13(1945-46).
- [39] Don Patinkin, *Money, Interest, and Prices*, 2nd. ed., (Harper & Row, New York 1965).
- [40] Roy, A. D., "Safety First and the Holding of Assets," *Econometrica*, Vol. 20, No. 3 (July, 1952).
- [41] Samuelson, P.A., *Foundations of Economic Analysis*, (Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. 1947).
- [42] Walras, L., *Éléments d'Économie Politique Pure*, édition définitive (1926), translated in English by W. Jaffé as *Elements of Pure Economics*, (George Allen & Unwin, London 1954).

1535年における イギリス修道院の経済状態

— Valor Ecclesiasticus —

今 関 恒 夫

序

14・5世紀以来、イギリス農村は、領主的貨幣経済と農民的貨幣経済の対抗の内から次第に後者へ帰結していく様相を呈しつつあった。かくのごとき傾向を踏まえながら、社会的分業の展開、労働生産性の上昇は、農業部門において、賦役の金納化、固定地代の成立、したがって、地代の名目化、農産物価格の騰貴等の、農民層に有利に作用する一連の経済事情の変化をもたらした。かくして、いわゆる独立自営農民の不断の分出が可能となった。この独立自営農民の、資本・賃労働への両極分解が、農民的・小ブルジョワ的経済を展開させることになるのである。

絶対王制の成立期にはまた、農民層のいわゆる「寄生地主的分解」が進行したことも事実であるが、これは一定のブルジョワ的發展を前提としてのみ考えられるのであって、イギリスにおいては、結局、独立自営農民の資本・賃労働への両極分解、資本主義の正常な発展の中に組み込まれていくのである。

かくのごとき変革期にあって、膨大な土地が市場に溢れるならば、それが農民層の分解に一定の役割を果たさないではないことは見易い道理である。

1536年および39年の再度にわたる修道院解散とそれに続く修道院領の処分を、そのような関連の中でみるために、被譲与者を社会的地位の面から検討してみると、つぎのようである。初期の主として廷臣および王室関係者に対する土地譲与を除くと、その多くは、旧家の次・三男たるジェントルマンに対するものであった。ついで、少数ではあるが見逃せないのが(転売・再転売の過程を経ているため、充分明瞭にすることは困難なのではあるが)、結局ヨーマンに帰結する土地譲与である。前者に属する譲与には、農民層の両極分解に資する場合と、封建的土地所有の小ブルジョワ的發展に対する対応形態である「寄生地主的分解」に資する場合とが考えられ、後者の場合は、当然、農民層の両極分解を促進したと考えられる。^(注1)

修道院解散とそれにとまなう土地処分の歴史的役割をこのようにみる場合、それは解散前夜にお