Title	ラーニング効果と誘発革新の理論
Sub Title	Learning by doing and the theory of induced innovation
Author	宮尾, 尊弘
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1968
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.61, No.10 (1968. 10) ,p.1036(30)- 1055(49)
JaLC DOI	10.14991/001.19681001-0030
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19681001-0030

ラーニング効果と誘発革新の理論

宮尾尊弘

一、序

一九五〇年代後半から六〇年代にかけて、「経済成長理論」が急速な発展を遂げ、それとの関連で「技術進歩の理論」が一斉に開花したことは、周知のとおりである。そして、五〇年代の技術進歩の理論が、もっぱら時間を通じての生産函数の一様なシフトという「体化されない」型を中心に展開されていたのに対して、六〇年代に入ってからは、新投資の中にのみ実現される「体化された」型の技術進歩が取り上げられるようになったこともまた良く知られている。しかしながら、代表的な理論モデル、とりわけR・M・ソローに代表される「新古典派」モデルにおいては、[1] 体化されない型にせよ、体化された型にせよ、いずれにしても技術進歩の率や型（方向）が、基本的にはアプリオリに外から与えられたものとして取り扱われるに過ぎなかった。すなわち、単なる時間に依存するにせよ、設備の新しさに依存するにせよ、改良されていく技術の進歩それ自体の率および型は外生的に与えられていて、それがただ経済成長に及ぼす影響を検討するのみであった。より適切に表現するならば、そこには、技術進歩を前提として経済成長の現象を考察する理論はあったけれども、技術進歩の現象そのものを理論的に解明する根本原理はなかったと言える。

しかし、これに対して、技術進歩の率や型それ自体が体系内で決定される経済的諸変数に依存して定まるような、より一歩進んだモデルが最近展開されてきているのもまた周知のことであろう。そのような理論モデルにおいては、いわば「技術的」な諸変数が「経済的」な諸変数と共に体系内で同時的に決定されることになり、この意味で、それはより一般的な技術進歩の理論と呼ぶことができる。

まず、技術進歩の率を内生変数とする代表的な理論としては、K・J・アロー〔2〕によって導入された「ラーニング効果」を考慮するモデルがある。そのモデルでは、生産活動の経験を重ねることによって、資本や労働の生産性が上昇して行くものと考えられており、一般に経験を表わす指標としては、その時までになされてきた累積的な粗投資量がとられる。すなわち、体系の中において技術進歩の率との関連で定まる資本の蓄積率それ自体が、ラーニング効果を通じて技術進歩の率を規定するのである。なお、アロー自身は、固定係数の生産函数における体化された型の技術進歩についてラーニングを考えたのであるが、その後、D・レヴァーリ〔13〕は、代替可能な生産函数における体化された型について、また、E・シェシンスキー〔16〕は、代替可能な生産函数における体化されない型について、それぞれラーニング効果を分析している。つまり、技術進歩の率を内生変数とするラーニングは、生産函数の形状や技術進歩のタイプとは別個に独立して導入することができるものなのである。

次に、技術進歩の型（方向ないし性質）を決定する理論としては、最近集中的に取り上げられている「誘発技術革新」の理

論がある。これは一般には、企業家がある技術的な可能性の範囲内で、資本の生産性を上昇させる技術進歩と労働の生産性を上昇させる技術進歩との最も有利な組合せを選択するという形で定式化される。したがって、最も有利な技術進歩の型の組合せとそれに対応する率とが、体系内の経済的変数の値に依存して定まることになる。当初、J・R・ヒックス〔4〕らによって考えられていた誘発革新の理論は、生産要素の相対価格の変化が誘発する新しい生産方法に関するものであって、単なる生産要素の「代替」と実質的にはあまり異ならなかった。これに対して、六〇年代にC・ケネディ〔8〕らによってその復活をみた誘発革新の理論は、明確な革新の可能性に関する技術的制約を前提として、企業家の抱く総費用削減の動機をより適切に考慮したもので、その結果、技術進歩の型の組合せは、生産要素の相対的分け前に依存して決定されることになるのである。(2)

この誘発革新の理論とアロー流のラーニングの理論とは、技術進歩に関する性質をアプリオリに外から与えるのではなく、それらをより根本的な諸仮定によって体系内で説明しようとする点で本来的には共通した意味を持っているのであるが、しかし実際には、両者はそれぞれ別個の意図のもとに導入され、それぞれ独自の発展の方向をたどってきているのである。すなわち、ラーニングの理論は、投資のラーニング効果が競争市場で評価されないために投資の私的収益率と社会的収益率との乖離が生じるという「ノーマティブ」なインプリケーションを導く点に、その分析の主眼が置かれている。これに対して、誘発革新の理論は、経済的諸量の変化に伴う技術革新のバイアスが成長や分配のパターンにどのような影響を及ぼすかという「ポジティブ」な問題意識のもとに主として展開されているのである。もっとも、前者のラーニングのモデルで均衡成長の存在や安定を論じているD・レヴァーリ〔12〕〔13〕や、後者の誘発革新のモデルで最適成長経路の性質を論じているW・D・ノルドハウス〔10〕等の業績が存在するけれども、それらはラーニングと誘発革新の理論を総合的に考察するための手がかりを何ら与えていない。

本稿においては、このラーニングと誘発革新を有機的に統合したモデルを設定して、均衡成長の存在と安定を検討することと並んで、最適成長経路の諸性質を明らかにすることが試みられる。ラーニング効果は、代替可能な生産関数における体化されない型すなわちシェシンスキー流の型として導入される。そして、このラーニングは、企業家によって選ばれうる技術進歩の型の組合せのメニューつまり革新可能性フロンティアーを全般的に拡大する効果として把握される。ラーニングをもたらす経験の指標は、アロー＝レヴァーリ＝シェシンスキーにならって累積粗投資量とするが、このことは、革新可能性フロンティアーのシストを体系内で定まる資本蓄積の率に依存せしめることになり、ある意味でそれはN・カルドア〔5〕〔6〕〔7〕が本来意図していた「技術進歩函数」の具体的な表現であると言うこともできよう。いずれにしても、本稿は、技術進歩の率や型それ自体が、体系内で経済的諸変数と同時に決定されるような、より一般的な諸モデルを統合するための一つの試論にほかならないのである。

（注1）ソロー〔17〕〔18〕参照。
（注2）誘発革新の理論については、さらに、P・A・サムエルソン〔14〕〔15〕、ケネディ〔9〕、S・アーマッド〔1〕なども参照のこと。

二、ラーニングと誘発革新

まず、ラーニングを考慮した誘発革新のモデルを設定しよう。産出量をY、資本ストック量をK、労働量をLとして、次のような要素増大的（factor augmenting）な技術進歩を持つ新古典派的生産函数を考える。(1)

(1)　$Y=F(BK, AL)$

ただし、技術の水準を表わすAとBは、累積粗投資量に依存すると仮定されるが、簡単化のために資本ストックの減耗率がゼロであるとすれば、累積粗投資は既存の資本ストック量に一致するから、結局AとBは資本ストック量に依存することになる。ここでは、次のような依存関係を想定しよう。

(2)　$A=K^{\alpha}$,　$B=K^{\beta}$

つまり、時間に関する比例的変化率を＾で表わすならば（例えば $\hat{x}\equiv\frac{dx}{dt}\Big/x$）

(3)　$\hat{A}=\alpha\hat{K}$,　$\hat{B}=\beta\hat{K}$

となる。

革新可能性フロンティアーは、次のように定められているものとする。

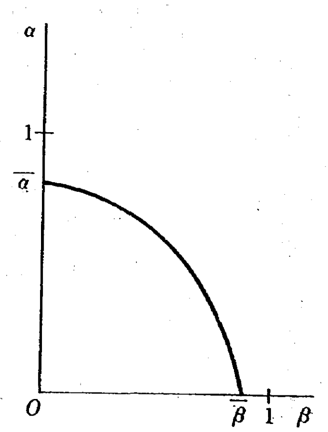
(4)　$\alpha=\phi(\beta),\ \phi(0)>0,\ \phi'(\beta)<0,\ \phi''(\beta)<0$

ただし、αとβは次の範囲を取りうるのみである。(2)（第一図参照）

(5)　$0\leqq\alpha\leqq\bar{\alpha}<1,\ \bar{\alpha}\equiv\phi(0)$

$0\leqq\beta\leqq\bar{\beta}<1,\ 0\equiv\phi(\bar{\beta})$

第一図



フロンティアー(4)は(3)を考慮すれば $\hat{A}/\hat{K}=\phi(\hat{B}/\hat{K})$ と書くことができる。つまり、資本ストックの成長率でそれぞれ割られたAの増加率とBの増加率との間に、技術的制約ϕが存在するということである。$\hat{K}$がコンスタントというスペシャルケースが、通常の誘発革新理論の仮定である $\hat{A}=\phi(\hat{B})$ に対応していると考えられる。

競争市場においては、ラーニングの効果(2)が考慮されないから、競争的分配率は、資本および労働について、それぞれ、

(6)　$\pi=\dfrac{F_1BK}{Y},\quad 1-\pi=\dfrac{F_2AL}{Y}$

となる。(3) その時々のπ、K、L、$\hat{K}$ および $\hat{L}$ が与件として与えられる競争企業家は、最も有利な技術進歩の型の組合せを選ぶ、つまり $\hat{Y}$ を最大にするようなαないしβの値を選択すると考えられる。すなわち、(1)(3)および(4)より、生産函数の一次同次性と(6)を考慮すれば、$\hat{Y}=\pi(\hat{B}+\hat{K})+(1-\pi)(\hat{A}+\hat{L})=\pi(\beta\hat{K}+\hat{K})+(1-\pi)(\phi(\beta)\hat{K}+\hat{L})$ となるから、

(7)　$\underset{0\leqq\beta\leqq\bar{\beta}}{\mathrm{Max}}\ \hat{Y}=\underset{0\leqq\beta\leqq\bar{\beta}}{\mathrm{Max}}\ (\pi\beta+(1-\pi)\phi(\beta))\hat{K}+\pi\hat{K}+(1-\pi)\hat{L}$

である。かくて、$\hat{K}>0$ の場合には、$0<\beta<\bar{\beta}$ の内点均衡のとき、

(8)　$\pi+(1-\pi)\phi'(\beta)=0$　or　$\phi'(\beta)=-\dfrac{\pi}{1-\pi}$

であるのに対して、コーナー均衡のとき、次のようになる。

(9)　$\beta=\bar{\beta},\ \alpha=\phi(\bar{\beta})\equiv0,\quad \text{if}\quad \pi+(1-\pi)\phi'(\bar{\beta})\geqq0$

(10)　$\beta=0,\ \alpha=\phi(0)\equiv\bar{\alpha},\quad \text{if}\quad \pi+(1-\pi)\phi'(0)\leqq0$

したがって、αおよびβは、πのみの函数として定まり、内点ではπが増大するにつれてαは減少し、βは増大することが(4)より明らかであるから、以上をまとめて次のように書くことができる。

(11)
$$\begin{matrix}\alpha=\alpha(\pi)\\ \beta=\beta(\pi)\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}\alpha(\pi)=\bar{\alpha},\ \beta(\pi)=0,\ 0\leqq\pi\leqq\pi_1\equiv-\dfrac{\phi'(0)}{1-\phi'(0)}\\ \alpha'(\pi)<0,\ \beta'(\pi)>0,\ \pi_1<\pi<\pi_2\\ \alpha(\pi)=0,\ \beta(\pi)=\bar{\beta},\quad -\dfrac{\phi'(\bar{\beta})}{1-\phi'(\bar{\beta})}\equiv\pi_2\leqq\pi\leqq1\end{array}\right.$$

（注1）　生産函数は正の一次同次で、限界生産力は正で逓減的であり、両生産要素は生産に不可欠であると想定される。
（注2）　E・シェシンスキー〔16〕のモデルは、$\alpha\equiv\bar{\alpha}$, $\beta\equiv0$ というスペシャル・ケースにほかならない。
（注3）　ここで、資本の私的収益率は、F_1B である。これに対して、資本の社会的収益率は、$F_1(1+\beta)B+F_2\alpha AL/K$ となる。

三、均衡成長の諸性質

モデルの動学的なビヘイビアーを検討しよう。まず、貯蓄率については、次の仮定を置く。

(12)　$0<s<1,\ \dot{K}(t)=sY(t),\ K(0)>0$

ただし、・(ドット)は時間に関する微分を表わす。次に、労働量については、

(13)　$\hat{L}=n>0$ or $L(t)=L_0e^{nt},\ L_0>0$

と想定する。

このとき、E・M・ドランダキス＝E・S・フェルプス〔3〕(p. 831)に従って、次式が導ける。

(14)　$$\dot{\pi}=\pi(1-\pi)\frac{1-\sigma}{\sigma}(\hat{A}-\hat{B}-\hat{K}+n)$$

(15)　$$\dot{\hat{K}}=\hat{K}(1-\pi)\left(\hat{A}+\frac{\pi}{1-\pi}\hat{B}-\hat{K}+n\right)$$

ただし、$\sigma\equiv\frac{F_1\cdot F_2}{F\cdot F_{12}}$ と定義され、いわゆる「代替の弾力性」を表わす。ここで、ラーニングの仮定(3)を(14)(15)に代入して整理すると、

(16)　$$\dot{\pi}=\pi(1-\pi)\frac{1-\sigma}{\sigma}\left[n-\{1-\alpha(\pi)+\beta(\pi)\}\hat{K}\right]$$

(17)　$$\dot{\hat{K}}=\hat{K}(1-\pi)\left[n-\left\{1-\alpha(\pi)-\frac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)\right\}\hat{K}\right]$$

がえられる。仮定(12)および(13)より $K(0)>0$ $L_0>0$ だから、$Y(0)>0$ となるが、$s>0$ が仮定されているから、$\hat{K}(0)>0$ となり、以後のすべての期において、$K(t)>0$ および $\hat{K}(t)>0$ が成立することになる。このことより、$\hat{K}(t)>0,\ 0<\pi<1$ がすべての t について成り立つことがわかる。したがって、$\dot{\pi}=\dot{\hat{K}}=0$ となる均衡成長の状態においても $\hat{K}^*>0,\ 0<\pi^*<1$ となる。いま、代替の弾力性がどこでも1に等しくならないと仮定すれば[1]、常に $\frac{1-\sigma}{\sigma}\neq0$ だから、基本方程式(16)(17)より、均衡成長において、

(18)　$$n-\{1-\alpha(\pi^*)+\beta(\pi^*)\}\hat{K}^*=0$$

(19)　$$n-\left\{1-\alpha(\pi^*)-\frac{\pi^*}{1-\pi^*}\beta(\pi^*)\right\}\hat{K}^*=0$$

が成立せねばならない。明らかにこのことは、

(20)　$\beta(\pi^*)=0$

つまり

(21)　$\alpha(\pi^*)=\bar{\alpha}$

を意味する。これは、$\hat{A}^*>0,\ \hat{B}^*=0$、すなわち、均衡成長における技術進歩は、純粋に労働増大的な型（ハロッド中立）にならなければならないことを示している[2]。このとき、資本ストックの成長率は、(18)あるいは(19)より、

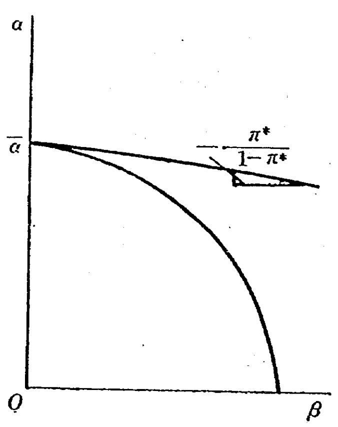
(22)　$$\hat{K}^*=\frac{n}{1-\bar{\alpha}}>0$$

となって、通常のラーニング・モデルに見られる形をとる。さらに、均衡成長における資本の分配率は、(11)より、

(23)　$$0<\pi^*\leqq\pi_1\equiv-\frac{\phi'(0)}{1-\phi'(0)}$$

となる。（第二図参照）

第二図



次に、このような均衡成長が安定であるかどうかを検討する。その際に、前に仮定したように代替の弾力性 σ が1に等しくなることはなく、さらに σ は常に1より大きいか、常に1より小さい、すなわち $\frac{1-\sigma}{\sigma}$ が常に同じ符号を取り続けるものと想定しよう。

第一に、$\dot{\pi}=0$ の場合に、(16) で $1-\alpha(\pi)+\beta(\pi)>0$ だから、$\hat{K}=n/\{1-\alpha(\pi)+\beta(\pi)\}>0$ となる。この右辺を $g(\pi)\equiv n/\{1-\alpha(\pi)+\beta(\pi)\}$ と置くと、

$$(24)\quad g'(\pi)=\frac{n}{\{1-\alpha(\pi)+\beta(\pi)\}^2}\{\alpha'(\pi)-\beta'(\pi)\}\begin{cases}<0, & \text{if } \pi_1<\pi<\pi_2\\ =0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$(25)\quad g(\pi)=\begin{cases}\dfrac{n}{1-\bar{\alpha}}, & \text{if } 0<\pi\leqq\pi_1\\[2mm] \dfrac{n}{1+\bar{\beta}}, & \text{if } \pi_2\leqq\pi<1\end{cases}$$

が導かれる。(16)より、π の動きは次のようになる。

Case I: $\sigma<1$ の場合、$\dot{\pi}=0$ より上方では、$\dot{\pi}<0$、下方では、$\dot{\pi}>0$（第三図参照）

Case II: $\sigma>1$ の場合、$\dot{\pi}=0$ より上方では、$\dot{\pi}>0$、下方では、$\dot{\pi}<0$（第四図参照）

次に、$\dot{\hat{K}}=0$ のときには、(17)より、$\hat{K}=n\Big/\Big\{1-\alpha(\pi)-\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)\Big\}$ $\Big($ただし $1-\alpha(\pi)-\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)\neq0\Big)$ となるが、この右辺を $h(\pi)$ と置くと、

$$(26)\quad h(\pi)\equiv\frac{n}{1-\alpha(\pi)-\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)}\begin{cases}>0, & \text{if } \alpha(\pi)+\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)<1\\[2mm] <0, & \text{if } \alpha(\pi)+\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)>1\end{cases}$$

を得る。$0<\pi\leqq\pi_1$ のとき $\beta(\pi)=0$ だから

$$(27)\quad h(\pi)\equiv g(\pi)\quad \text{for}\quad 0<\pi\leqq\pi_1$$

となる。さらに、

$$(28)\quad h'(\pi)=\frac{n}{\Big\{1-\alpha(\pi)-\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)\Big\}^2}\Big\{\alpha'(\pi)+\frac{\pi}{1-\pi}\beta'(\pi)+\frac{1}{(1-\pi)^2}\beta(\pi)\Big\}$$

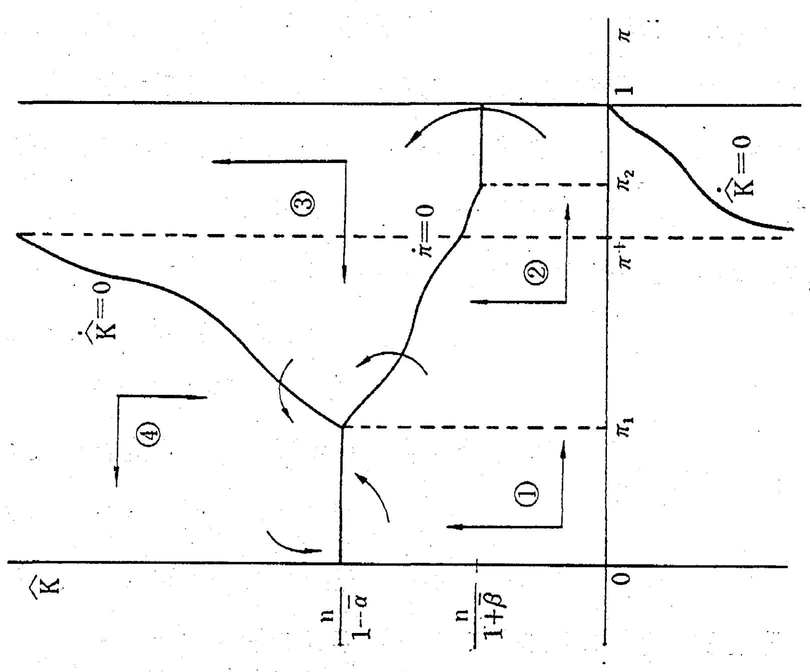
$$=\frac{n}{\Big\{1-\alpha(\pi)-\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)\Big\}^2}\frac{\beta(\pi)}{(1-\pi)^2}>0\quad \text{for}\quad \pi_1<\pi<1$$

であって、$\pi\to1$ のとき、$\beta=\bar{\beta}$ だから、$h(\pi)\to-0$ となる。(17)より、$\hat{K}$ の動きは、σ から独立に次のようなものとなる。

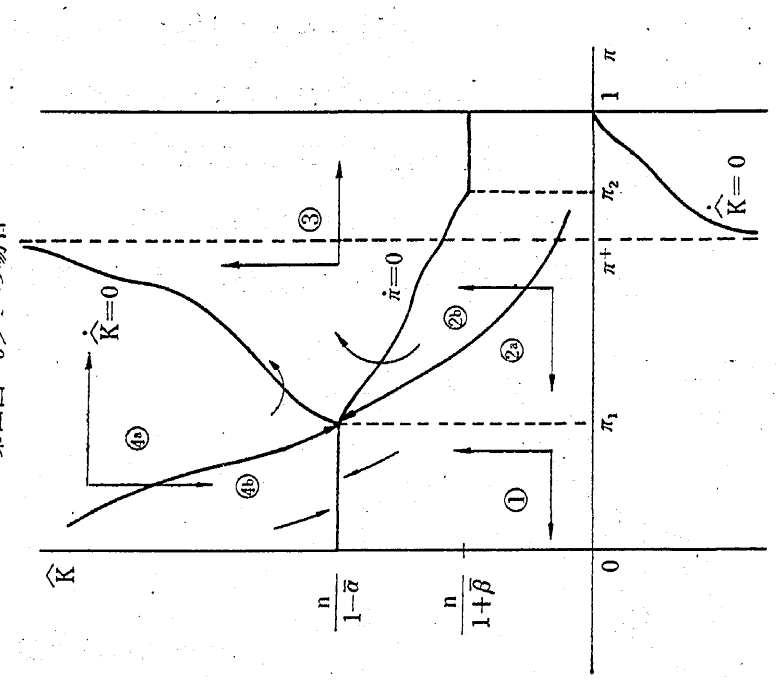
Case I: $h(\pi)>0$ の場合、$\dot{\hat{K}}=0$ より上方では、$\dot{\hat{K}}<0$、下方では、$\dot{\hat{K}}>0$

Case II: $h(\pi)<0$ の場合、$\hat{K}\geqq0$ の範囲では、$\dot{\hat{K}}>0$

第三図　$\sigma<1$ の場合



第四図　$\sigma>1$ の場合



これらは、σの大きさからは独立であるから、第三図、第四図に共通して妥当する。

ただし、π^*は次の方程式の解である。

(29) $\alpha(\pi)+\dfrac{\pi}{1-\pi}\beta(\pi)=1$

つまり、第五図のように定まる。(4)と(5)の仮定より、

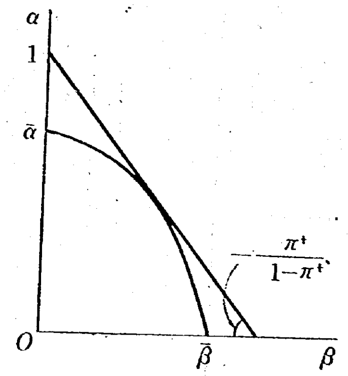
(30) $\pi_1<\pi^*<\pi_2$

の範囲に一意に存在する。

第三図より、$\sigma<1$ の場合、$\dot{\pi}=\dot{\hat{K}}=0$ となる均衡は、任意の初期点から出発して安定であることが明らかである。なぜなら、領域②でπが十分に1に近くなったとしても、(17)より $\dot{\hat{K}}\doteqdot\bar{\beta}\hat{K}^2$ で、πとは無関係に$\hat{K}$が増大し続けるから、やがては領域③へ入らざるをえない。領域③において、直接に均衡へ到達するか、あるいは$\dot{\hat{K}}=0$の線を横切って、領域④に進むかのどちらかであることは明らかであろう。そして、領域④は必ず直接に均衡へ向かう。なぜなら、たとえπが十分に零に近づいたとしても、それとは無関係に$\dot{\hat{K}}<0$だからである。領域①は直接に均衡へ向かうか、あるいは領域②に進むから、以上で$\sigma<1$ の場合には、必ず安定になることが示されたことになる。

逆に$\sigma>1$ の場合は、第四図から、領域① ②a および ④b においては安定、領域 ②b ③および ④a においては不安定であることが明白である。最後に、以上の結果を下の表にまとめておこう。

第　五　図



場合＼領域	1	2a	2b	3	4a	4b
$\sigma<1$	○	○	○	○	○	○
$\sigma>1$	○	○	×	×	×	○

○は安定　×は不安定

（注1） 代替の弾力性が常に1に等しいということは、生産函数が「コブ・ダグラス型」であることと等値であって、このときには、資本増大的技術進歩と労働増大的技術進歩との区別が消滅するから、この場合はトリヴィアルに排除される。ドランダキス・フェルプス[3]p. 828 footnote 1を参照。

（注2） 純粋に労働増大的な技術進歩がハロッド中立に等値であることは、宇沢[19]によって示されている。

四、最適成長と技術進歩

以下では、モデルの「ノーマティブ」な側面に焦点を当てて、厚生経済学的なインプリケーションを導出したい。技術的な制約 (1)—(5) のもとで、貯蓄率sと技術進歩の方向βとを適当にコントロールして、一人当り消費量の割引現在価値総額を最大化する問題を考えよう。すなわち、

Maximize

(31) $\displaystyle\int_0^\infty(1-s)\frac{\mathrm{Y}(t)}{\mathrm{L}(t)}e^{-\delta t}dt$

subject to

(32) $\dot{\mathrm{K}}=s\mathrm{F}(\mathrm{BK}\ \mathrm{AL})$

(33) $\dot{\mathrm{A}}=\phi(\beta)\hat{\mathrm{K}}\cdot\mathrm{A}$

(34) $\dot{\mathrm{B}}=\beta\hat{\mathrm{K}}\cdot\mathrm{B}$

(35) $0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq\beta\leqq\bar{\beta}$

with

(36) $\mathrm{K}(0)>0,\ \mathrm{A}(0)>0,\ \mathrm{B}(0)>0$

(37) $\delta>0,\ \hat{\mathrm{L}}=n>0,\ \mathrm{L}_0>0$

ここで、次のように記号を定める。

(38) $\dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{AL}}=\mathrm{F}\left(\dfrac{\mathrm{BK}}{\mathrm{AL}},\ 1\right)\equiv f\left(\dfrac{\mathrm{BK}}{\mathrm{AL}}\right)\equiv f\left(\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)$

すると、(31)—(34) は次のように書きなおすことができる。

Maximize

(39) $\int_0^{\infty}(1-s)\mathrm{A}f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)e^{-\delta t}dt$

subject to

(40) $\dot{k}=s\mathrm{A}f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)-nk$ with $k(0)>0$

(41) $\dot{\mathrm{A}}=\phi(\beta)s\mathrm{A}\frac{f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)}{k}\mathrm{A}$ with $\mathrm{A}(0)>0$

(42) $\dot{\mathrm{B}}=\beta s\mathrm{A}\frac{f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)}{k}\mathrm{B}$ with $\mathrm{B}(0)>0$

k、A および B の implicit price を、それぞれ q_1、q_2 および q_3 として、次のように Hamiltonian を作ろう。

(43) $\mathrm{H}=e^{-\delta t}\left[(1-s)\mathrm{A}f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)+q_1\left\{s\mathrm{A}f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)-nk\right\}+q_2\left\{\phi(\beta)s\mathrm{A}\frac{f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)}{k}\mathrm{A}\right\}+q_3\left\{\beta s\mathrm{A}\frac{f\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)}{k}\right\}\right]$

L・S・ポントリャーギン〔11〕の Maximum Principle により、計画 $\{s(t),\ \beta(t)\}$ が最適であれば、連続函数 $q_1(t)$, $q_2(t)$ および $q_3(t)$ が存在して、次のようになることが知られている。

(44) $\dot{q}_1=(n+\delta)q_1-\left\{(1-s)\mathrm{B}f'+q_1s\mathrm{B}f'+q_2\phi s\mathrm{A}\frac{f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k-f}{k^2}\mathrm{A}+q_3\beta s\mathrm{A}\frac{f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k-f}{k^2}\mathrm{B}\right\}$

(45) $\dot{q}_2=\delta q_2-\left\{(1-s)\left(f-f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)+q_1s\left(f-f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)+q_2\phi s\mathrm{A}\frac{f+f-f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k}{k}+q_3\beta s\mathrm{B}\frac{f-f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k}{k}\right\}$

(46) $\dot{q}_3=\delta q_3-\left\{(1-s)f'k+q_1sf'k+q_2\phi s\mathrm{A}\frac{f'}{k}k+q_3\beta s\mathrm{A}\frac{f+f'\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k}{k}\right\}$

(47) $\underset{0\leq s\leq 1}{\mathrm{Max}}\ s\mathrm{A}f\cdot\left\{-1+q_1+q_2\phi\frac{\mathrm{A}}{k}+q_3\beta\frac{\mathrm{B}}{k}\right\}$

(48) $\underset{0\leq\beta\leq\bar{\beta}}{\mathrm{Max}}\ s\mathrm{A}\frac{f}{k}\{q_2\mathrm{A}\phi(\beta)+q_3\mathrm{B}\beta\}$

(49) $\lim_{t\to\infty}q_1e^{-\delta t}=0,\ \lim_{t\to\infty}q_2e^{-\delta t}=0,\ \lim_{t\to\infty}q_3e^{-\delta t}=0$

ここで、すべての変数がある一定率で増大するようなバランスのとれた最適経路に考察を限定しよう。生産函数は、代替の弾力性が常に１に等しい「コブ・ダグラス」型以外の一次同次函数で、[1] 限界生産力は逓減的と仮定されているから、産出量Yと効率単位で測った資本 BK、労働 AL が、すべて時間を通じて一定の率で成長することは、この三つの変数が同一の率で成長することを意味するであろう。つまり、函数 f の中味である $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k$ は時間を通じて一定である。かくて、(40)―(42) を考慮すると、

(50) $0=\widehat{\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}k\right)}=\hat{\mathrm{B}}+\hat{k}+\hat{\mathrm{A}}=\beta s\mathrm{A}\frac{f}{k}+s\mathrm{A}\frac{f}{k}-n-\phi s\mathrm{A}\frac{f}{k}$

すなわち、

(51) $s\mathrm{A}\frac{f}{k}=\frac{n}{1+\beta-\phi}$ or $s=\frac{n}{\mathrm{A}\frac{f}{k}(1+\beta-\phi)}>0$

となる。ここで $s=1$ であると想定すれば、一人当り消費の割引現在値(39)はゼロとなってしまう。そのようなトリヴィアルな経路にすべての最適経路が究極において収束するというケースも考えられるけれども、以下ではバランスのとれた最適経

路のみを考えることもあって、このようなトリヴィアルな経路は考察の対象とならない。つまり、以下では、一人当り消費が正となるように、$s<1$ を仮定する。なお、(51)の左辺が一定率で増大するとともに、右辺にあるβが一定率で増大するということは、結局のところ、βは時間を通じて一定（つまり、ゼロの率で増大する）でなければならず、したがって、(51)の左辺が一定でなければならないということを意味する。

$0<s<1$ に対応して、最適条件(47)より

(52)　$$-1+q_1+q_2\phi\frac{A}{k}+q_3\beta\frac{B}{k}=0$$

が求まるから、バランスのとれた最適成長経路において、(44)―(46) は次のようになる。ただし、h_1、h_2 および h_3 は、それぞれ q_1、q_2 および q_3 の時間に関する増加率を表わす。

(53)　$$h_1q_1=(n+\delta)q_1-Bf'+q_2\phi sA\frac{f}{k^2}A+q_3\beta sA\frac{f}{k^2}B=(n+\delta)q_1-Bf'+sA\frac{f}{k}(1-q_1)$$

(54)　$$h_2q_2=\left(\delta-\phi sA\frac{f}{k}\right)q_2-\left(f-f'\frac{B}{A}k\right)$$

(55)　$$h_3q_3=\left(\delta-\beta sA\frac{f}{k}\right)q_3-f'k$$

(51)を考慮すれば、(53)―(55) は、

(56)　$$\left(n+\delta-h_1-\frac{n}{1+\beta-\phi}\right)q_1=Bf'-\frac{n}{1+\beta-\phi}$$

(57)　$$\left(\delta-\phi\frac{n}{1+\beta-\phi}-h_2\right)q_2=f-f'\frac{B}{A}k$$

(58)　$$\left(\delta-\beta\frac{n}{1+\beta-\phi}-h_3\right)q_3=f'k$$

となる。まず、(56)では、q_1とBのみが一定率で増加するから、結局、両者ともに時間を通じて一定たらざるをえない。つまり、$\dot{q}_1=\dot{B}=0$ となるが、これは

(59)　$$h_1\equiv\dot{q}_1=0,\quad \beta=0$$

を意味する。(2) また、(57)より、q_2は時間を通じて一定であるが、q_3は(58)より、kと同一の率で増加していくことがわかる。$1+\beta-\phi(\beta)=1-\phi(0)$ であることを考慮すると、これらは

(60)　$$h_2\equiv\dot{q}_2=0$$

(61)　$$h_3=\dot{q}_3=\dot{k}=sA\frac{f}{k}-n=\frac{n}{1-\phi(0)}-n=\frac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n$$

にほかならない。(59)―(61) を (56)―(58) に代入すると、次のように k、AおよびBの implicit prices が求まる。

(62)　$$q_1=\frac{Bf'-\dfrac{n}{1-\phi(0)}}{\delta-\dfrac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n},\quad q_2=\frac{f-f'\dfrac{B}{A}k}{\delta-\dfrac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n},\quad q_3=\frac{f'k}{\delta-\dfrac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n}$$

これらの分母が正となることは、最適条件(49)より要請される。また、それは、成長を考慮して修正された社会的割引率と解釈することができる。これらの値を、貯蓄率に関する最適条件(52)に代入して、$\beta=0$ を考えるならば、

(63)　$$-1+\frac{Bf'-\dfrac{n}{1-\phi(0)}}{\delta-\dfrac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n}+\frac{f-f'\dfrac{B}{A}k}{\delta-\dfrac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n}\phi(0)\frac{A}{k}=0$$

すなわち、

(64) $$Bf'+\phi(0)\frac{Af-Bf'k}{k}=\frac{n}{1-\phi(0)}+\left(\delta-\frac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n\right)$$

を得る。この左辺は $F_1B+F_2\bar{\alpha}AL/K$ に等しく、これは資本の「社会的」収益率にほかならない。さらに、この右辺は、資本の成長率と「修正された社会的割引率」との和になっており、それはまた、労働増加率ともとの割引率との和 $n+\delta$ に等しい。

残された最適条件(48)からは、$s>0$, $\beta=0$ を考慮すれば

(65) $$q_2A\phi'(0)+q_3B\leqq 0$$

が得られ、これを整理して、(62)を代入すれば、

(66) $$-\phi'(0)\geqq\frac{B}{A}\cdot\frac{f'k}{f-f'\frac{B}{A}k}=\frac{F_1BK}{F_2AL}=\frac{\pi}{1-\pi}$$

となる。つまり、$0<\pi\leqq\pi_1=-\frac{\phi'(0)}{1-\phi'(0)}$ である。ここで、分配率はあくまで「私的」分配率すなわち競争市場で成立しうる分配率であって、しかも、(66)の最適条件は、前章での「ポジティブ」な分析における均衡成長の状態と同一の条件であることが注意されるべきであろう。

以上、本章の分析結果をすべてまとめるならば、次のようになる。

一人当り消費の割引現在価値総額がゼロとはならないようなバランスのとれた最適成長経路においては、$0<s<1$, $\alpha=\bar{\alpha}$, $\beta=0$ となり、下の関係が成立していなければならない。

成長率	変数
0	B, q_1, q_2, s
$\frac{\phi(0)}{1-\phi(0)}n$	k, A, q_3
$\frac{n}{1-\phi(0)}$	K, Y

$$\text{資本の社会的収益率}=\text{資本の成長率}+\text{修正された社会的割引率}$$
$$=\text{労働の増加率}+\text{社会的割引率}$$

$$\text{革新可能性フロンティアーの傾きの絶対値}\geqq\frac{\text{資本の私的分け前}}{\text{労働の分け前}}$$

$$\text{一人当り資本量の最適価格}=\frac{\text{資本の私的収益率}-\text{資本の成長率}}{\text{修正された社会的割引率}}$$

$$\text{労働増大的技術進歩の最適価格}=\frac{\text{効率単位で測った賃金率}}{\text{修正された社会的割引率}}$$

$$\frac{\text{資本増大的技術進歩の最適価格}}{\text{一人当り資本量}}=\frac{\text{効率単位で測った資本の私的収益率}}{\text{修正された社会的割引率}}$$

(注1) コブ・ダグラス型の生産函数を排除する理由については、前章の注1を参照のこと。

(注2) これは、貯蓄が時間を通じて一定となることを意味する。なぜなら、$\frac{B}{A}k$ とBが一定ならば、$\frac{k}{A}$ も一定となり、(51) で s 以外はすべて時間を通じて一定となるからである。

五、結び

従来までのラーニングのモデルに特徴的な結論は、完全競争市場においては投資のラーニング効果が斟酌されないから、資本の私的（競争的）収益率と社会的収益率とが乖離することになり、競争を通じてなされる資本蓄積は社会的に最適な水準よりも下まわらざるをえないということである。同様の結論は、誘発革新を考慮した本稿のラーニングモデルにおいても妥当する。すなわち、完全競争市場では、一般に最適条件(64)が満たされない。すべての個人が同一の(31)のような効用函数を最大化するように完全競争市場で行動する場合には、シェシンスキー〔16〕(p. 43)も指摘するように、個人は「私的」収益率が資本の成長率と修正された割引率との和に等しくなるところまでしか投資を行なわないであろうから、このときの「競争的」な資本・労働比率（効率単位で測られた）は、(64)から定まる「最適」なそれよりもヨリ小となる。このことから、政策当局は社会の貯蓄率をコントロールすることによって、最適な投資水準を達成しなければならないという政策的なインプリケーションが導出されるであろう。

これに対して、技術進歩の型の選択についてはどうであろうか。先にも指摘したように最適条件(66)は、貯蓄率を任意に一定としたときの競争均衡の条件(23)と同じものである。つまり、純粋に労働増大的技術進歩（ハロッド中立）が実現され、しかもそこでの革新可能性フロンティアーの勾配にかかわってくるのは、いずれも「私的」な分配率の大きさである。したがって、少なくとも長期的に考えるならば、代替の弾力性が常に1よりも小さい場合には、競争市場は、私的な競争分配率の成立を通じて「最適」な技術進歩の型を誘発することになる。このことからは、代替の弾力性が常に1より小さいことが知ら

れるならば、政策当局は、生産要素市場や技術進歩の開発には介入すべきでないという政策的インプリケーションが導かれよう。

以上を要するに、政策当局が過少となる傾向を持つ貯蓄率を操作して投資水準を最適に維持するならば、競争のメカニズムは、長期的に最適な技術進歩の率と型を実現せしめる傾向を持つであろうということである。ただし、この結論は必ずしも実際的な政策提言に直接結びつくものではない。なぜなら、第一に、それはあくまで長期的に実現されるバランスのとれた成長状態のみに注目して導出されたものだからであり、第二に、実際には、代替の弾力性が常に1よりも小という厳しい条件が必ずしも満たされないだろうからであり、最後に、企業家が技術進歩の型を選択する行動は、必ずしも明確な技術的制約のもとでの最適化行動として説明できるものではないからである。最後の点については、技術開発にともなう費用の問題および技術開発や導入にともなう不確実性の問題などとの関連において、より一層適切なモデルを設定することが要請されるであろう。

引用文献

〔1〕 Ahmad, S., "On the Theory of Induced Invention" *Economic Journal*, June 1966.
〔2〕 Arrow, K. J., "The Economic Implications of Learning by Doing" *Review of Economic Studies*, June 1962.
〔3〕 Drandakis, E. M. and E. S. Phelps, "A Model of Induced Invention, Growth and Distribution" *Economic Journal*, December 1966.
〔4〕 Hicks, J. R., *The Theory of Wages* London: Macmillan 1932.
〔5〕 Kaldor, N., "A Model of Economic Growth" *Economic Journal*, December 1957.
〔6〕 Kaldor, N., "Capital Accumulation and Economic Growth" in F. A. Lutz and D. C. Hague ed., *The Theory of Capital* 1961.
〔7〕 Kaldor, N. and J. A. Mirrlees, "A New Model of Economic Growth" *Review of Economic Studies* June 1962.
〔8〕 Kennedy, C., "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution" *Economic Journal* September 1964.
〔9〕 Kennedy, C., "Samuelson on Induced Innovation" *Review of Economics and Statistics* November 1966.
〔10〕 Nordhaus, W. D. "The Optimal Rate and Direction of Technical Change" in K. Shell ed., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* 1967.
〔11〕 Pontryagin, L. S. et al., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York and London; Interscience Publishers, Inc., 1962.
〔12〕 Levhari, D., "Further Implications of Learning by Doing" *Review of Economic Studies* February 1966.
〔13〕 Levhari, D., "Extensions of Arrow's 'Learning by Doing'" *Review of Economic Studies* October 1966.
〔14〕 Samuelson, P. A., "A Theory of Induced Innovation Along Kennedy-Weizsäcker Lines" *Review of Economics and Statistics* November 1965.
〔15〕 Samuelson, P. A., "Rejoinder: Agreements, Disagreements, Doubts, and the Case of Induced Harrod-Neutral Technical Change." *Review of Economics and Statistics* November 1966.
〔16〕 Sheshinski, E., "Optimal Accumulation with Learning by Doing" in K. Shell ed., *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* 1967.
〔17〕 Solow, R. M., "Technical Change and the Aggregate Production Function" *Review of Economics and Statistics* August 1957.
〔18〕 Solow, R. M., "Investment and Technical Progress" in K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes ed. *Mathematical Methods in Social Sciences*, 1959.
〔19〕 Uzawa, H., "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium" *Review of Economic Studies* February 1961.