資本形成の一般均衡モデルについて

宮尾尊弘

一 序

本稿の目的は、レオン・ワルラス〔13〕の資本形成モデル、安井氏〔15〕〔16〕のベーム＝ヴィクセル＝ワルラス型定常モデルおよび森嶋氏〔8〕のフォン・ノイマン型成長モデル等をそのスペシャル・ケースとして含む、より一般的な資本形成モデルを設定することである。特に、ヒックス的な多時点投入－多時点産出の場合（multipoint-input—multipoint-output case）を考慮するとともに、最適な投入－産出の time-shape 決定というヒックス〔5〕の問題、最適な生産（計画）期間決定というベーム＝ヴィクセル〔11〕の問題および最適な耐久期間決定というオッカーマン＝ヴィクセル〔14〕の問題を、生産プロセスの選択の問題として統一的にとりあつかうことが意図されている。

二 モデルの性質

(i) 体系内では、一般に複数種類の財（goods）が生産可能である。

(ii) 財は、それが生産された期間に、消費されて消滅するかあるいは（and/or）投資財として家計に保有される。(1)

(iii) 保有された財のストックは――保有した次の期から、ある与えられたし方で――毎期、ある種類の用役（service）を提供する。

(iv) 一般に、財の種類の数のほうが、用役の種類の数より大きい。

(v) 用役は、生産のためにも、消費のためにも利用可能である。

(vi) 一般に、複数種類の本源的要素が、体系外から毎期与えられ、それらは生産のためにも、消費のためにも利用可能である。

(vii) 生産プロセスが、一般に複数有限個存在して、一般にその数は、財の種類の数より大きい。

(viii) 各プロセスごとに生産（計画）期間が与えられており、その期間を通じて、一般に用役と本源的要素がそれぞれ複数種類投入されるとともに、財が複数種類産出（結合生産）される。

(ix) 投入・産出構成は、一般に、各期間および各プロセスごとに異なりうる。

(x) 完全競争（フリー・エントリーおよび完全予見を含む）が想定される。

ここで、(iii)(iv)、(vii)(viii)および(vii)(ix)の想定が、それぞれオッカーマン＝ヴィクセル、ベーム＝ヴィクセルおよびヒックスの問題を解く鍵になっている。つまり、(iii)および(iv)は、同一種類の用役を提供するいくつかの財――それらは耐久性に関してのみ異なる――の存在を許す。かくて、同一種類の用役を提供する財について、より長い耐久期間（あるいはより小さい減耗率）を持つものを同量生産しうるプロセスほど、対応する投入係数がより大であるような場合として、オッカーマン＝ヴィクセルの問題を処理することができる。(2) さらに、(vii)および(viii)は、全生産期間にわたる総投入諸量が同一の大きさである生産プロセスについて、その生産期間がより長いものほど、対応する産出係数がより大であるような場合として、ベーム＝ヴィクセルの問題を処理することを可能ならしめる。ただし、この場合、投入は毎期一様（uniform）になされるとともに、産出は生産計画期間の最終期にのみなされると想定されている。最後に、(vii)および(ix)が投入・産出の time-shape 決定の問題解決を意味するのは、技術的に可能なあらゆる投入・産出の時間的構成を、はじめから別々の生産プロセスと定義しておくことが可能だからである。同様に考えれば、(vii)(viii)および(ix)が、投入・産出係数の「可変性」を意味することは云うまでもない。(3)

(1) 家計が投資財を保有するのは、次の期からそれらが提供する用役を（自らを含む）家計あるいは企業に販売することによって、一定の収入が将来において得られるからにほかならない。かくて、われわれは、ワルラス〔13〕p. 274～277 にならって、家計はその貯蓄額をすべて、毎期ニュメレール一単位分の収入を次期以降永久に提供し続けるような「永久純収入」という想像上の財の購入にあてると想定することができる。これについては、ドランダキス〔2〕p. 312～316 も参照。

(2) そのために、結合生産や可変的生産係数の想定を何ら必要としていないことが注意さるべきであろう。

(3) 例えば、ドーフマン＝サムエルソン＝ソロー〔1〕11-4 参照。

三 記号の定義

ν 個 $(q=1,2,\dots,\nu)$ の生産プロセス

n 種類 $(j=1,2,\dots,n)$ の本源的要素

m 種類 $(i=1,2,\dots,m)$ の財

k 種類 $(h=1,2,\dots,k)$ の用役

第 h 種類の用役を提供する財の番号 $i_{h-1}+1,\dots,i_h$ ただし $i_0\equiv 0$ および $i_k\equiv m$

l^{τ}_{jq} 第 q プロセスを一単位操業するのにその生産期間の第 τ 期目に必要とされる第 j 本源的要素の投入量

a^{τ}_{hq} 第 q プロセスを一単位操業するのにその生産期間の第 τ 期目に必要とされる第 h 用役の投入量

b^{τ}_{iq} 第 q プロセスの一単位操業についてその生産期間の第 τ 期目に産出される第 i 財の量

T_q 第qプロセスの生産（計画）期間（つまり $\tau=1,2,\cdots,T_q$）

$L=[L_{jq}]$ ただし $L_{jq}=[l^1_{jq}, l^2_{jq}, \cdots, l^{T_q}_{jq}]$

$A=[A_{hq}]$ ただし $A_{hq}=[a^1_{hq}, a^2_{hq}, \cdots, a^{T_q}_{hq}]$

$B=[B_{iq}]$ ただし $B_{iq}=[b^1_{iq}, b^2_{iq}, \cdots, b^{T_q}_{iq}]$

χ_q 第qプロセスの操業水準、$\chi=\{\chi_q\}$ ν次列ベクトル(1)

f_j 第j本源的要素の消費需要量、$f=\{f_j\}$ n次列ベクトル

g_h 第h用役の消費需要量、$g=\{g_h\}$ k次列ベクトル

c_i 第i財の消費需要量、$c=\{c_i\}$ m次列ベクトル

d_i 第i財の投資需要量、$d=\{d_i\}$ m次列ベクトル

y_i 第i財の総ストック量、$y=\{y_i\}$ m次列ベクトル

r_j 第j本源的要素の供給量、$r=\{r_j\}$ n次列ベクトル

s_h 第h用役の供給量、$s=\{s_h\}$ k次列ベクトル

w_j 第j本源的要素の価格、$w=[w_j]$ n次行ベクトル

v_h 第h用役の価格、$v=[v_h]$ k次行ベクトル

p_i 第i財の価格、$p=[p_i]$ m次行ベクトル

θ 単位期間あたり利子率、$\rho=\frac{1}{\theta}$ 「永久純収入」の価格

z 「永久純収入」の需要量（ρz 貯蓄額）

$\bar{I}$ 家計の総所得（本源的要素供給価額プラス用役供給価額プラス資本利子および超過利潤の配当額）

σ 生産プロセスの操業水準の一様成長率

η 本源的要素供給量の一様成長率

ξ^τ_i 第i投資財の——保有された次の期から数えて——第τ期目の期首における残存割合（$1=\xi^1_i\geqq\xi^2_i\geqq\xi^3_i\geqq\cdots\geqq0$）

μ^τ_i 第i投資財の第τ期間中の減耗率（$\mu^\tau_i\equiv1-(\xi^{\tau+1}_i/\xi^\tau_i)$ or $\xi^{\tau+1}_i\equiv(1-\mu^1_i)\cdot(1-\mu^2_i)\cdot\cdots\cdot(1-\mu^\tau_i)$）

$$\Lambda^\sigma=\begin{bmatrix}\Lambda^\sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Lambda^\sigma_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \Lambda^\sigma_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Lambda^\sigma_\nu\end{bmatrix}\quad \text{ただし}\quad \Lambda^\sigma_q=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{1+\sigma}\\ \frac{1}{(1+\sigma)^2}\\ \vdots\\ \frac{1}{(1+\sigma)^{T_q-1}}\end{bmatrix}$$

$(q=1,2,\cdots,\nu)$

Λ^θ および Λ^η は、Λ^σ の定義における σ を、それぞれ θ および η に置きかえたものである。

U^σ $\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{\xi^\tau_i}{(1+\sigma)^\tau}$ をその第i対角要素として持つ m次対角行列(2)、U^η は $\sigma=\eta$ のときの U^σ を示す。

$$U_\theta=\begin{bmatrix}U^1_\theta & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & U^2_\theta & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & U^3_\theta & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & U^k_\theta\end{bmatrix}\quad \text{ただし}\quad U^h_\theta=\left[\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{\theta\cdot\xi^\tau_{i_{h-1}+1}}{(1+\theta)^\tau},\ \cdots\cdots,\ \sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{\theta\cdot\xi^\tau_{i_h}}{(1+\theta)^\tau}\right]$$

$(h=1,2,\cdots,k)$

$$E=\begin{bmatrix}E^1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & E^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & E^3 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & E^k\end{bmatrix}\quad \text{ただし}\quad E^h=\overbrace{[1,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1]}^{(i_h-i_{h-1})\text{個}}$$

$(h=1,2,\cdots,k)$

(1) 以下で使用される添字tは期間を表わす。ただし $\chi(t)$ の第q成分 $\chi_q(t)$ は、期間tにおいて着手される第qプロセスの操業水準を示すものとする。

(2) ここで、τが無限大までの総和は、すべて有限確定値をとるものと仮定される。そのための十分条件の一つは、$\sigma\geqq0$ つまり $\eta\geqq0$ かつ、ある期T^iが存在して $\xi^\tau_i>0$ であるかぎり、

$$\frac{\xi^{\tau+1}_i}{\xi^\tau_i}\leqq\varepsilon<1 \text{ for all } i\quad (\tau=T^i, T^i+1, T^i+2, \cdots)$$

となることである。ただし、εはτに無関係な数とする。もちろん $\sigma=\eta>0$ ならば、それだけで十分である。

四 均衡成長モデルの設定

(i) 第j本源的要素の消費需要量

$$f_j(t)=f_j(w_1,\cdots w_n, v_1,\cdots v_k, p_1,\cdots p_m, \rho, \bar{I}(t))$$

(ii) 第h用役の消費需要量

$$g_h(t)=g_h(w_1,\cdots w_n, v_1,\cdots v_k, p_1,\cdots p_m, \rho, \bar{I}(t))$$

(iii) 第i財の消費需要量

$$c_i(t)=c_i(w_1,\cdots w_n, v_1,\cdots v_k, p_1,\cdots p_m, \rho, \bar{I}(t))$$

(iv) 「永久純収入」の需要量

$$z(t)=z(w_1,\cdots w_n, v_1,\cdots v_k, p_1\cdots p_m, \rho, \bar{I}(t))$$

(v) ワルラス法則

$$\sum_{j=1}^{n}w_jf_j(t)+\sum_{h=1}^{k}v_hg_h(t)+\sum_{i=1}^{m}p_ic_i(t)+\rho z(t)\equiv\bar{I}(t)$$

(vi) 第j本源的要素の需給均等

$$\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}l^\tau_{jq}\cdot\frac{1}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)\chi_q(t)+f_j(t)\leqq r_j(t)$$

(vii) 第h用役の需給均等

$$\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}a^\tau_{hq}\cdot\frac{1}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)\chi_q(t)+g_h(t)\leqq s_h(t)$$

(viii) 第i財の需給均等

$$\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}b^\tau_{iq}\cdot\frac{1}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)\chi_q(t)\geqq c_i(t)+d_i(t)$$

(ix) 第qプロセスの超過利潤ゼロ

$$\sum_{\tau=1}^{T_q}(w_jl^\tau_{jq}+v_ha^\tau_{hq})\frac{1}{(1+\theta)^{\tau-1}}\geqq\sum_{\tau=1}^{T_q}p_ib^\tau_{iq}\frac{1}{(1+\theta)^{\tau-1}}$$

(x) 粗投資額と貯蓄額との均等

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\ d_i(t)=\rho z(t)$$

(xi) 投資費用と投資収益現在価値との均等

$$p_i\geqq\sum_{\tau=1}^{\infty}v_h\frac{\xi^\tau_i}{(1+\theta)^\tau}\quad(i=i_{h-1}+1,\cdots i_h)$$

(xii) 第i財の総ストック量

$$y_i(t)\equiv\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{\xi^\tau_i}{(1+\sigma)^\tau}d_i(t)$$

(xiii) 第h用役の供給（存在）量

$$s_h(t)\equiv\sum_{i=i_{h-1}+1}^{i_h}y_i(t)$$

(xiv) 第j本源的要素の供給（存在）量

$r_j(t)\equiv(1+\eta)^t\bar{r}_j$　ただし　$\bar{r}_j\equiv r_j(0)$

(xv)　総所得額

$$\bar{\mathrm{I}}(t)\equiv\sum_{j=1}^{n}w_jr_j(t)+\sum_{h=1}^{k}v_hs_h(t)+\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{p_ib_{iq}^{\tau}-w_jl_{jq}^{\tau}-v_ha_{hq}^{\tau}}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)x_q(t)$$

(xvi)　超過供給の本源的要素、用役および財の価格ゼロ

$$w_j\left\{\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{l_{jq}^{\tau}}{(1+\sigma)^{\tau-1}}x_q(t)+f_j(t)-r_j(t)\right\}=0$$

$$v_h\left\{\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{a_{hq}^{\tau}}{(1+\sigma)^{\tau-1}}x_q(t)+g_h(t)-s_h(t)\right\}=0$$

$$p_i\left\{\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{b_{iq}^{\tau}}{(1+\sigma)^{\tau-1}}x_q(t)-c_i(t)-d_i(t)\right\}=0$$

(xvii)　不利な生産プロセスの操業水準ゼロ

$$\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{p_ib_{iq}^{\tau}-w_jl_{jq}^{\tau}-v_ha_{hq}^{\tau}}{(1+\theta)^{\tau-1}}\right)x_q(t)=0$$

(xviii)　不利な投資財の保有量ゼロ

$$\left(p_i-\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{v_hg_i^{\tau}}{(1+\theta)^{\tau}}\right)d_i(t)=0\quad(i=i_{\nu-1}+1,\cdots i_\nu)$$

(xix)　体系の有意性の保証

$$\sum_{j=1}^{n}w_jr_j(t)>0,\quad\sum_{h=1}^{k}v_hs_h(t)>0$$

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\cdot\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}b_{iq}^{\tau}\frac{1}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)x_q(t)>0$$

$$\theta>0$$

(xx)　非負の資本利子額

$$\sum_{q=1}^{\nu}\left(\sum_{\tau=1}^{T_q}\frac{p_ib_{iq}^{\tau}-w_jl_{jq}^{\tau}-v_ha_{hq}^{\tau}}{(1+\sigma)^{\tau-1}}\right)x_q(t)\geqq0$$

以上の一般均衡体系を行列とベクトルの記号で表わすと、次のような形になる。

(1)　$f(t)=f(w\ v\ p\ \rho\ \bar{\mathrm{I}}(t))\equiv\mathrm{F}(w\ v\ p\ \rho\ \sigma\ r(t)\ d(t)\ x(t))$

(2)　$g(t)=g(w\ v\ p\ \rho\ \bar{\mathrm{I}}(t))\equiv\mathrm{G}(w\ v\ p\ \rho\ \sigma\ r(t)\ d(t)\ x(t))$

(3)　$c(t)=c(w\ v\ p\ \rho\ \bar{\mathrm{I}}(t))\equiv\mathrm{C}(w\ v\ p\ \rho\ \sigma\ r(t)\ d(t)\ x(t))$

(4)　$z(t)=z(w\ v\ p\ \rho\ \bar{\mathrm{I}}(t))\equiv\mathrm{Z}(w\ v\ p\ \rho\ \sigma\ r(t)\ d(t)\ x(t))$

(5)　$wf(t)+vg(t)+pc(t)+\rho z(t)\equiv wr(t)+vs(t)+$
$(p\mathrm{B}\Lambda^{\sigma}-w\mathrm{L}\Lambda^{\sigma}-\mathrm{A}\Lambda^{\sigma})x(t)$

(6)　$\mathrm{L}\Lambda^{\sigma}x(t)+f(t)\leqq r(t)\equiv(1+\eta)^t\bar{r}$

(7)　$\mathrm{A}\Lambda^{\sigma}x(t)+g(t)\leqq s(t)\equiv\mathrm{E}y(t)\equiv\mathrm{E}\mathrm{U}^{\sigma}d(t)$

(8)　$\mathrm{B}\Lambda^{\sigma}x(t)\geqq c(t)+d(t)$

(9)　$w\mathrm{L}\Lambda^{0}+v\mathrm{A}\Lambda^{0}\geqq p\mathrm{B}\Lambda^{0}$

(10)　$pd(t)=\rho z(t)$

(11)　$p\geqq\rho v\mathrm{U}_0$

(12)　$w(\mathrm{L}\Lambda^{\sigma}x(t)+f(t)-r(t))=0$

(13)　$v(\mathrm{A}\Lambda^{\sigma}x(t)+g(t)-s(t))=0$

(14)　$p(\mathrm{B}\Lambda^{\sigma}x(t)-c(t)-d(t))=0$

(15)　$(w\mathrm{L}\Lambda^{0}+v\mathrm{A}\Lambda^{0}-p\mathrm{B}\Lambda^{0})x(t)=0$

(16)　$(p-\rho v\mathrm{U}_0)d(t)=0$

(17)　$wr(t)>0$

(18)　$vs(t)>0$

(19)　$p\mathrm{B}\Lambda^{\sigma}x(t)>0$

(20)　$\theta>0$

(21)　$(p\mathrm{B}\Lambda^{\sigma}-w\mathrm{L}\Lambda^{\sigma}-v\mathrm{A}\Lambda^{\sigma})x(t)\geqq0$

ここで、$\bar{r}>0$ と与えられており、かつどの生産プロセスを操業するためにも、少なくとも一種類の本源的要素が必要であると仮定されるならば、(6)より、生産プロセスの操業水準の最大可能な一様成長率は η であることがわかる。かくして、諸価格が時間を通じて一定であり、$\sigma=\eta$ つまり

$$\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\\c(t)\\z(t)\\r(t)\\d(t)\\x(t)\end{pmatrix}=(1+\eta)^t\begin{pmatrix}f\\g\\c\\z\\\bar{r}\\d\\x\end{pmatrix}$$

となるような均衡成長モデルは、次のような static な一般均衡体系に書きなおすことができる。ただし、家計の需要函数は、総所得額 $\bar{\mathrm{I}}(t)$ に関して一次同次、したがって、$r(t)$、$d(t)$ および $x(t)$ に関して一次同次であると仮定されている。

(22)　$f=\mathrm{F}(w\ v\ p\ \rho\ \eta\ \bar{r}\ d\ x)\equiv\bar{f}(w\ v\ p\ \rho\ d\ x)$

(23)　$g=\mathrm{G}(w\ v\ p\ \rho\ \eta\ \bar{r}\ d\ x)\equiv\bar{g}(w\ v\ p\ \rho\ d\ x)$

(24)　$c=\mathrm{C}(w\ v\ p\ \rho\ \eta\ \bar{r}\ d\ x)\equiv\bar{c}(w\ v\ p\ \rho\ d\ x)$

(25)　$z=\mathrm{Z}(w\ v\ p\ \rho\ \eta\ \bar{r}\ d\ x)\equiv\bar{z}(w\ v\ p\ \rho\ d\ x)$

(26)　$wf+vg+pc+\rho z\equiv w\bar{r}+vs+(p\mathrm{B}\Lambda^{\eta}-w\mathrm{L}\Lambda^{\eta}-v\mathrm{A}\Lambda^{\eta})x$

(27)　$\mathrm{L}\Lambda^{\eta}x+f\leqq\bar{r}$

(28)　$\mathrm{A}\Lambda^{\eta}x+g\leqq s\equiv\mathrm{E}\mathrm{U}^{\eta}d$

(29)　$\mathrm{B}\Lambda^{\eta}x\geqq c+d$

(30)　$w\mathrm{L}\Lambda^{0}+v\mathrm{A}\Lambda^{0}\geqq p\mathrm{B}\Lambda^{0}$

(31)　$pd=\rho z$

(32)　$p\geqq\rho v\mathrm{U}_0$

(33)　$w(\mathrm{L}\Lambda^{\eta}x+f-r)=0$

(34)　$v(\mathrm{A}\Lambda^{\eta}x+g-s)=0$

(35)　$p(\mathrm{B}\Lambda^{\eta}x-c-d)=0$

(36)　$(w\mathrm{L}\Lambda^{0}+v\mathrm{A}\Lambda^{0}-p\mathrm{B}\Lambda^{0})x=0$

(37)　$(p-\rho v\mathrm{U}_0)d=0$

(38)　$w\bar{r}>0$

(39)　$vs>0$

(40)　$p\mathrm{B}\Lambda^{\eta}x>0$

(41)　$\theta>0$

(42)　$(p\mathrm{B}\Lambda^{\eta}-w\mathrm{L}\Lambda^{\eta}-v\mathrm{A}\Lambda^{\eta})x\geqq0$

最後に、均衡成長率 η と均衡利子率 θ とが等しいという事態が、何を意味するか考察しておこう。第一に、(36)は(42)の左辺に等しくなるから、ワルラス法則(26)の右辺第三項はゼロとなる。つまり、生産過程から生じる資本利子額したがって配当がゼロとなる。第二に、用役所得（vs）が貯蓄（ρz）に等しくなる。なぜなら、$vs\equiv v\mathrm{E}\mathrm{U}^{\eta}d$ かつ(37)より $pd=\rho v\mathrm{U}_0d$ であるが、E、U^{η} および U_0 の定義から、$\eta=\theta$

のとき、$EU^{\eta}=\rho U_{\theta}$ となるから、結局、(31)を考慮すれば、$vs\equiv vEU^{\eta}d=\rho vU_{\theta}d=pd=\rho z$ をうるからである。かくして、第三に、ワルラス法則(26)より、消費額（本源的要素、用役および財の消費の総額）イコール本源的要素所得 $wf+vg+pc=w\bar{r}$ という関係がえられる。

五　スペシャル・ケースの考察

以下において、$\overline{L}$、$\overline{A}$ および $\overline{B}$ は、それぞれ生産期間が一期間（今期のみ）のときの $L\Lambda^{\eta}, A\Lambda^{\eta}$ および $B\Lambda^{\eta}$ を示すものとする。

(i)　ワルラス型生産モデル（代替可能）

(26)$\rightarrow pc\equiv w(\bar{r}-f)+v(\bar{s}-g)$

(27)$\rightarrow \overline{L}x=\bar{r}-f$

(28)$\rightarrow \overline{A}x=\bar{s}-g$　（$\bar{s}$ は所与）

(29)$\rightarrow \overline{B}^{\circ}x=c$

(30)(36)$\rightarrow w\overline{L}+v\overline{A}\geqq p\overline{B}^{\circ}$,　$(w\overline{L}+v\overline{A}-p\overline{B}^{\circ})x=0$

ただし　$\overline{B}^{\circ}=\begin{pmatrix} I^1 & O\cdots\cdots O \\ O & I^2\cdots\cdots O \\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \ \vdots \\ O & O\cdots\cdots I^m \end{pmatrix}$,　$I^i=[1,1,\cdots,1]$　$(i=1,2,\cdots,m)$

(ii)　ワルラス型資本形成モデル（森嶋〔9〕芳賀〔3〕）

(26)$\rightarrow pc+\rho z\equiv w(\bar{r}-f)+v(\bar{s}-g)$

(27)(33)$\rightarrow \overline{L}x\leqq\bar{r}-f$,　$w(\overline{L}x+f-\bar{r})=0$

(28)(34)$\rightarrow \overline{A}x\leqq\bar{s}-g$,　$v(\overline{A}x+g-\bar{s})=0$

(29)(35)$\rightarrow x\geqq c+d$,　$p(x-c-d)=0$

(30)(36)$\rightarrow w\overline{L}+v\overline{A}\geqq p$　$(w\overline{L}+v\overline{A}-p)x=0$

(31)$\rightarrow pd=\rho z$

(32)(37)$\rightarrow p\geqq\rho vU_{\theta}$,　$(p-\rho vU_{\theta})d=0$

ただし　$c=\begin{bmatrix}\tilde{c}\\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$, $d=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ \tilde{d}\end{bmatrix}$, $c+d=\begin{bmatrix}\tilde{c}\\ \vdots \\ \tilde{d}\end{bmatrix}$, $v=[0\,\vdots\,\tilde{v}]$　および U_{θ} の第 h 対角要素は、この場合、減耗率一定（$\bar{\mu}_h=\mu_h^1=\mu_h^2=\cdots$ for all $h\equiv i$）だから、

$$U_{\theta}^{h}=\sum_{\tau=1}^{\infty}\theta\left(\frac{1-\bar{\mu}_h}{1+\theta}\right)^{\tau}=\frac{\theta}{\theta+\bar{\mu}_h}$$

となる。

(iii)　ワルラス・ヴィクセル型定常経済モデル（安井〔16〕）

(26)$\rightarrow pc+\rho z\equiv w(\bar{r}-f)+vs$

(27)$\rightarrow \overline{L}x=\bar{r}-f$

(28)$\rightarrow \overline{A}x=s\equiv y\equiv U^{\eta}d$

(29)$\rightarrow x=c+d$

(30)$\rightarrow w\overline{L}+v\overline{A}=p$

(31)$\rightarrow pd=\rho z$

(32)$\rightarrow p=\rho vU_{\theta}$

ただし　$c+d=\begin{bmatrix}\tilde{c}\\ \vdots \\ \tilde{d}\end{bmatrix}$, $v=[0\,\vdots\,\tilde{v}]$ および U^{η} および U_{θ} の第 i 対角要素は、この場合、定常経済（$\eta=0$）かつ sudden death（$\xi_i^1=\xi_i^2=\cdots=\xi_i^{N_i}=1$, $\xi_i^{N_i+1}=\xi_i^{N_i+2}=\cdots=0$ for all $i\equiv h$）だから、それぞれ

$$\sum_{\tau=1}^{N_i}\frac{1}{(1+\eta)^{\tau}}=N_i \quad \text{および} \quad \sum_{\tau=1}^{N_i}\frac{\theta}{(1+\theta)^{\tau}}=1-(1+\theta)^{-N_i}$$

となる。

(iv)　ベーム・オッカーマン・ワルラス型モデル（安井〔15〕）

(26)$\rightarrow pc+\rho z\equiv w(\bar{r}-f)+v(\bar{s}-g)+(pB\Lambda^{\eta}-wL\Lambda^{\eta}-vA\Lambda^{\eta})x$

(27)$\rightarrow L\Lambda^{\eta}x=\bar{r}-f$

(28)$\rightarrow A\Lambda^{\eta}x=\bar{s}-g$

(29)$\rightarrow B\Lambda^{\eta}x=c+d$

(30)$\rightarrow wL\Lambda^{\theta}+vA\Lambda^{\theta}=pB\Lambda^{\theta}$

(31)$\rightarrow pd=\rho z$

(32)$\rightarrow p=\rho vU_{\theta}$

ただし、定常経済（$\eta=0$）で、かつ生産期間を通じての一様な投入（$l_{jq}^1=l_{jq}^2=\cdots=l_{jq}^{Tq}\geqq 0$, $a_{hq}^1=a_{hq}^2=\cdots=a_{hq}^{Tq}\geqq 0$）と最終期の一時点産出（$b_{iq}^1=b_{iq}^2=\cdots=b_{iq}^{Tq-1}=0$, $b_{iq}^{Tq}\geqq 0$）が仮定される。なお

$c+d=\begin{bmatrix}\tilde{c}\\ \vdots \\ \tilde{d}\end{bmatrix}$, $v=[0\,\vdots\,\tilde{v}]$ および sudden death　つまり

$$U_{\theta}^{h}=\left[1-(1+\theta)^{-N_{i_{h-1}}+1}\cdots 1-(1+\theta)^{-N_{i_h}}\right]\quad (h=1,2,\cdots,k)$$

とされる。

(v)　動学的レオンティエフモデル（DOSSO〔1〕）

(7)$\rightarrow \overline{A}x(t)\leqq s(t)\equiv y(t)\equiv U^{\sigma}d(t)$

(8)$\rightarrow x(t)=c(t)+d(t)$

(9)$\rightarrow v\overline{A}\geqq p$

(13)(15)$\rightarrow v(\overline{A}x(t)-s(t))=0$, $(v\overline{A}-p)x(t)=0$

ただし、$\overline{A}\equiv b(I-a)^{-1}\geqq 0$（$a$ はフロー投入係数、b はストック投入係数）また $\xi_i^{\tau}\equiv 1$（$\tau=1,2,\cdots$）for all i だから、U^{σ} は

$$\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\sigma)^{\tau}}=\frac{1}{\sigma}\quad(\sigma>0)$$

を要素とする対角行列である。

(vi)　フォン・ノイマンモデル（〔12〕〔6〕）

$\xi_i^2=\xi_i^3=\cdots=0$　for all $i(\equiv h)$、したがって U^{σ} および U_{θ} は、それぞれ $\dfrac{1}{1+\sigma}$ および $\dfrac{\theta}{1+\theta}$ を要素とする対角行列となる。

$$\left.\begin{array}{l}(7)\rightarrow \overline{A}x(t)\leqq s(t)\equiv y(t)\equiv \dfrac{1}{1+\sigma}d(t)\\ (8)\rightarrow \overline{B}x(t)\geqq d(t)\end{array}\right\}\rightarrow \alpha\overline{A}x(t)\leqq\overline{B}x(t)\quad(\alpha\equiv 1+\sigma)$$

$$\left.\begin{array}{l}(9)\rightarrow v\overline{A}\geqq p\overline{B}\\ (10)\rightarrow p\geqq v\dfrac{1}{1+\theta}\end{array}\right\}\rightarrow \beta p\overline{A}\geqq p\overline{B}\quad(\beta\equiv 1+\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l}(14)\rightarrow p(\overline{B}x(t)-\alpha\overline{A}x(t))=0\\ (15)\rightarrow (p\overline{B}-\beta p\overline{A})x(t)=0\\ (19)\rightarrow p\overline{B}x(t)>0\end{array}\right\}\rightarrow \alpha=\beta\quad(\sigma=\theta)$$

(vii)　フォン・ノイマン・マルクス型モデル（森嶋〔8〕芳賀=大槻〔4〕）

(26)$\rightarrow vg^1\equiv w(\bar{r}-f)$

$vg^2+\rho z\equiv vs+(p\overline{B}-w\overline{L}-v\overline{A})x$

(27)(33)$\rightarrow \overline{L}x\leqq\bar{r}-f$; $w(\overline{L}x+f-\bar{r})=0$

$$\left.\begin{array}{l}(28)\rightarrow \overline{A}x+g^1+g^2\leqq s\equiv y\equiv\dfrac{1}{1+\eta}\\ (29)\rightarrow \overline{B}x=d\end{array}\right\}\rightarrow \alpha(\overline{A}x+g^1+g^2)\leqq\overline{B}x\quad(\alpha\equiv 1+\eta)$$

$$\left.\begin{array}{l}(30)\rightarrow w\overline{L}+v\overline{A}\geqq p\overline{B}\\ (32)\rightarrow p=v\dfrac{1}{1+\theta}\end{array}\right\}\rightarrow \beta(w\overline{L}+v\overline{A})\geqq v\overline{B}\quad(\beta\equiv 1+\theta)$$

(31)$\rightarrow pd=\rho z$

(34)$\rightarrow v(\bar{B}x-\alpha\bar{A}x-\alpha g^1-\alpha g^2)=0$

(36)$\rightarrow (v\bar{B}-\beta w\bar{L}-\beta v\bar{A})x=0$

(32)(40)$\rightarrow v\bar{B}x>0$

(viii) フォン・ノイマン・ワルラス型モデル（森嶋〔8〕スラッファ〔10〕）

(26)$\rightarrow pc^1\equiv w\bar{r}$

$pc^2+\rho z\equiv vs+(p\bar{B}-w\bar{L}-v\bar{A})x$

(27)$\rightarrow \bar{L}x=\bar{r}$

$$\left.\begin{array}{l}(28)\rightarrow \bar{A}x\leqq s\equiv y\equiv\dfrac{1}{\alpha}d\\ (29)\rightarrow \bar{B}x\geqq c^1+c^2+d\end{array}\right\}\rightarrow \alpha\bar{A}x+c^1+c^2\leqq\bar{B}x$$

$$\left.\begin{array}{l}(30)\rightarrow w\bar{L}+v\bar{A}\geqq p\bar{B}\\ (32)\rightarrow v=\beta p\end{array}\right\}\rightarrow w\bar{L}+\beta p\bar{A}\geqq p\bar{B}$$

(31)$\rightarrow pd=\rho z$

(35)$\rightarrow p(\bar{B}x-\alpha\bar{A}x-c^1-c^2)=0$

(36)$\rightarrow (p\bar{B}-w\bar{L}-\beta p\bar{A})x=0$

(40)$\rightarrow p\bar{B}x>0$

六　フォン・ノイマンモデルとの比較

最後に、森嶋氏〔7〕〔8〕によって一般化されたフォン・ノイマンモデルと比較した場合、われわれのモデルが――経済的意味において――いかなる内容的一般性を有しているか見ておこう。

第一、森嶋モデルでは、家計が労働者と資本家に分離されており、しかも労働者は貯蓄しないと仮定されるのに対して、われわれのモデルにおいては、家計全体としてワルラス法則が成立していれば十分である。

第二、森嶋モデルにおいては、(1)「中間生産物」も市場で売買可能であって、その売上げが資本家の所得に加えられると想定される。われわれのモデルでは、そのような想定を必ずしも必要としない。「生産期間」は森嶋モデルにおけるように、一様に一期間である必要はなく、一般に多期間で、その間の投入・産出構成は任意に与えることができる。

第三、森嶋モデルにおいては、財それ自体とその用役との区別が存在しない。財として異なるということはその用役が異なるということと同義である。これに対して、われわれのモデルでは、財として（特にその耐久性が）異なるが、それらが提供する用役は経済的に同一種類のものであるというような場合をもとりあつかうことができる。森嶋モデルでは、財の減耗とともに必ずその性能自体が変化して行くような資本財のみが考慮されうるに過ぎない。

第四、森嶋モデルにおける消費は、単に財それ自体の消費（したがってその分の消滅）にほかならないのであるが、われわれのモデルでは、さらにそれらの用役の消費および本源的要素の消費(2)をも同時に考慮することができる。(3)

（1）　例えば　森嶋〔7〕p.13 において明示的に仮定されている。

（2）　芳賀・大槻〔4〕は、本源的要素の消費を考慮しているが、その定式化の方法には疑問がある。なお、彼らにあっても用役の消費はとりあつかわれていない。

（3）　われわれのモデルにおける均衡成長の存在は、基本的に芳賀〔3〕芳賀・大槻〔4〕の方法によって証明することができる。それについては、また別の機会に発表するつもりである。

レオン・ワルラスの「資本形成および信用のモデル」（本誌一九六七年三月号）の修正と別証

一、ミスプリント

四六ページ・(49)式〔正〕$\vee P^*$〔誤〕$\wedge P^*$

四八ページ・十行目〔正〕$\widetilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ は $\widehat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ に一致し、もしも $\widehat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\in\widetilde{\Delta}$ ならば、〔誤〕$\widehat{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ は $\widetilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)$ に一致し、もしも $\widetilde{\Psi}(w\,v\,\rho\,y)\in\widetilde{\Delta}$ ならば、

四九ページ・三行目〔正〕$P^*=\rho^*v^*U_N^*$〔誤〕$P^*-\rho^*v^*U_N^*$

五〇ページ・九行目〔正〕$0<\rho^*<\bar{\rho}$〔誤〕$0<\rho^*<\rho$

二、修正

四九ページ・三行目より

(61)の左辺を変形すると、$w^*r^*+v^*s^*-p^*c^*-\rho^*z^*+(p^*c^*-w^*AT^\circ c^*-v^*LT^\circ c^*)+(P^*N^{-1}y^*-w^*BTN^{-1}y^*-v_*MTN^{-1}y^*)-(\rho^*v^*U_N^*\Lambda^{*-1}TN^{-1}y^*-w^*BTN^{-1}y^*-v^*MTN^{-1}y^*)$ となるが、これはワルラス法則(32)および(56)より、$-(\rho^*v^*U_N^*\Lambda^{*-1}TN-w^*BTN^{-1}-v^*MTN^{-1})y^*\geqq0$ であることがわかる。かくて $\hat{u}_1-\hat{u}_2-\hat{u}_3\bar{\rho}\geqq0$ を得る。$\hat{u}_3=0$ が証明されうる（四九ページ・六行目参照）から $\hat{u}_1-\hat{u}_2\geqq0$ となり、(52)から不動点に対応する任意の最大解 $\hat{y}$ は $B_\tau TN^{-1}\hat{y}<\bar{r}_\tau$ となって$\widetilde{\Lambda}$に属する。以上でy^*が最大解の一つであることがわかったから、双対性定理より $-(\rho^*v^*U_N^*\Lambda^{*-1}TN^{-1}-w^*BTN^{-1}-v^*MTN^{-1})y^*=\hat{u}_1-\hat{u}_2=0$ をうる。

四九ページ・十三行目

$\rho^*=0$ と想定すれば $\Lambda^{*-1}=I^\circ$（生産期間が一期間である財の番号に対応する対角要素は1、残りは0の行列）となり、$w_\tau^*>0$, $b_{\tau h}>0$ であるから $w^*BTN^{-1}+v^*MTN^{-1}>\rho^*v^*U_N^*\Lambda^{*-1}TN^{-1}=0$ となる。かくして $N^{-1}y^*=0$

三、別　　証

ブラウワーの不動点定理のみを使って、存在定理を確立することができる。そのために若干モデルを修正する。第一は、消費財の需要量 c と消費財の供給量 q（$q=\{q_i\}$　m次列ベクトル）を分けて考える。つまり体系の(32)から(45)までの c を、すべて q に置きかえるとともに、さらに二つの均衡条件式

$$q\geqq c\quad\text{および}\quad p(q-c)=0$$

を加える。第二は、ワルラス法則(32)の右辺で、超過利潤が正のときにのみ家計に分配されるようにする。つまり

(32)′ $pc+\rho z\equiv wr+vs+(wA\Lambda^\circ+vL\Lambda^\circ-wAT^\circ-vLT^\circ)q$
$+\max\{0,\ (p-wA\Lambda^\circ-vL\Lambda^\circ)q\}+(wB\Lambda+vM\Lambda-wBT^\circ-vMT^\circ)x$
$+\max\{0,\ (P-wB\Lambda-vM\Lambda)x\}$

とする。

存在証明の骨子は次のようなものである。$P=\rho vU_N$ と置いて、変数Pを消去し、次のような函数を定義する。

$$D(w\,v\,p\,\rho\,q\,x) \equiv AT^\circ q + BTx - r$$
$$E(w\,v\,p\,\rho\,q\,x) \equiv LT^\circ q + MTx - s$$
$$F(w\,v\,p\,\rho\,q\,x) \equiv c - q$$
$$G(w\,v\,p\,\rho) \equiv p - (wA + vL)\varLambda^\circ$$
$$H(w\,v\,\rho) \equiv \rho v U_N - (wB + vM)\varLambda$$
$$J(w\,v\,p\,\rho\,q\,x) \equiv z - vU_{N}x$$

するとワルラス法則(32)より、次の関係をうる。

$$wD + vE + pF + Gq + Hx + \rho J - \max(0, Gq) - \max(0, Hx) \equiv 0$$

ここで、次のような凸コンパクトな集合を定義する。

$$\varPi \equiv \{(w\,v\,p\,\rho\,q\,x) \mid w \geqq 0,\ v \geqq 0,\ p \geqq 0,\ \textstyle\sum_j w_j + \sum_h v_h + \sum_i p_i = 1,\ \bar{\rho} \geqq \rho \geqq 0,\ \bar{q} \geqq q \geqq 0,\ \bar{x} \geqq x \geqq 0\}$$

ただし、$\bar{\rho} \equiv \min \bar{\rho}(=1/\max \bar{\theta})$ であり、また $\bar{q}$ および $\bar{x}$ は、それらの任意の第 i 成分 $\bar{q}_i$ および第 h 成分 $\bar{x}_h$ が、それぞれ、

$a_{\tau i}T_i^\circ \bar{q}_i > \bar{r}_\tau$ および $b_{\tau h}T_h\bar{x}_h > \bar{r}_\tau$

となるようなものである。

次のような連続函数を考えよう。

$$W_j = \frac{w_j + \hat{D}_j}{1+\Sigma}\ (j=1, 2, \cdots, n), \quad V_h = \frac{v_h + \hat{E}_h}{1+\Sigma}\ (h=1, 2, \cdots, l)$$

$$P_i^\circ = \frac{p_i + \hat{F}_i}{1+\Sigma}\ (i=1, 2, \cdots, m), \quad Q_i = \frac{q_i + \bar{q}_i\hat{G}_i}{1+\Sigma+\hat{G}_i}\ (i=1, 2, \cdots, m)$$

$$X_h = \frac{x_h + \bar{x}_h\hat{H}_h}{1+\Sigma+\hat{H}_h}\ (h=1, 2, \cdots, l), \quad \varLambda = \frac{\rho + \bar{\rho}\hat{J}}{1+\Sigma+\hat{J}}$$

ただし、$\hat{D}_j = \max(0, D_j)$, $\hat{E}_h = \max(0, E_h)$, $\hat{F}_i = \max(0, F_i)$, $\hat{G}_i = \max(0, G_i)$, $\hat{H}_h = \max(0, H_h)$, $\hat{J} = \max(0, J)$ および $\Sigma = \sum_j \hat{D}_j + \sum_h \hat{E}_h + \sum_i \hat{F}_i$ である。すると明らかに $W_j \geqq 0$, $V_h \geqq 0$, $P_i^\circ \geqq 0$, $\sum_j W_j + \sum_h V_h + \sum_i P_i^\circ = 1$, $\bar{q}_i \geqq Q_i \geqq 0$, $\bar{x}_h \geqq X_h \geqq 0$ および $\bar{\rho} \geqq \varLambda \geqq 0$ となるから、空でない凸コンパクトな集合 $\varPi$ から $\varPi$ 自身への連続写像がえられる。かくして、ブラウワーの不動点定理によって、不動点 $(w^*v^*p^*\rho^*q^*x^*)$ の存在が証明されうる。ワルラス法則を中心に、定理の諸仮定を使って、この不動点が求める均衡点であることを知る（以下詳しくは、安井〔16〕森嶋〔9〕を参照）。

引用文献

〔1〕 Dorfman, R., P.A. Samuelson, and R. M. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis* (New York, McGraw-Hill) 1958.

〔2〕 Drandakis, E.M., "On the Competitive Equilibrium in a Monetary Economy", *International Economic Review*, Vol. 7, September 1966.

〔3〕 芳賀半次郎「Walras の『資本化および信用の理論』と解の存在」季刊理論経済学 Vol. XV, November 1964.

〔4〕 Haga, H. and M. Otsuki, "On a Generalized von Neumann Model" *International Economic Review*, Vol. 6, January 1965.

〔5〕 Hicks, J.R., *Value and Capital* (Oxford Clarendon Press) 1st edition 1939, 2nd edition 1946.

〔6〕 Kemeny, J.G., O.Morgenstern, and G.L. Thompson "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy" *Econometrica*, Vol. 24, April, 1956.

〔7〕 森嶋通夫「均衡成長の多部門理論」『新しい経済分析』収録（創文社）一九六〇年。

〔8〕 Morishima, M., "Economic Expansion and the Interest Rate in Generalized von Neumann Models" *Econometrica*, Vol. 27, January 1959.

〔9〕 Morishima, M., "Existence of Solution to the Walrasian System of Capital Formation and Credit" *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 20, Nos. 1-2, 1960.

〔10〕 Sraffa, Piero., *Production of Commodities by Means of Commodities* (Cambridge at the University Press) 1960.

〔11〕 von Böhm-Bawerk, E., *Positive Theory of Capital* in *Capital and Interest*, Vol. II, translated by G. D. Huncke and H. F. Sennholz (Libertarian Press, South Holland, Illinois)

〔12〕 von Neumann, J., "A Model of General Economic Equilibrium" English translation, *Review of Economic Studies*, Vol. XIII, 1945-6.

〔13〕 Walras, L., *Elements of Pure Economics*, translated by W. Jaffé (Richard D. Irwin, Inc.,) 1954.

〔14〕 Wicksell, K., *Lectures on Political Economy*, translated by E. Classen (Routledge, London) 1934.

〔15〕 安井琢磨「時間要素と資本利子」『均衡分析の基本問題』収録（岩波書店）一九五五年。

〔16〕 Yasui, T., "Existence of Stationary Equilibrium in the Walras-Wicksellian Model of Production" 経済研究 Vol. 13, July 1962.