Title	回帰線導出の方法（補足）
Sub Title	Methods of regression (supplement)
Author	佐藤, 保
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1967
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.60, No.5 (1967. 5) ,p.541(79)- 564(102)
JaLC DOI	10.14991/001.19670501-0079
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19670501-0079

度をしめ、すでにみた企業のためのサービスの顕著なのびを反映して、このサービスの比率はわずかながら上昇傾向にある。

これらの数字は、われわれに、サービス問題にかんする統計を、批判的に検討することの重要性を強くしめすものである。

付記　本稿は昭和四二年度福沢諭吉記念慶応義塾学事振興基金研究費補助による研究の一部である。

研究ノート

回帰線導出の方法（補足）

佐藤保

三田学会雑誌の昭和四一年八月、九月号に回帰線導出の方法について若干述べたが、ここでその補足的説明を附加える。

（一）

第一は情報制限最尤法の計算をする場合、固有根を求めることになる。この計算法では最大根を求めることになるが、この場合は絶対値で最大という意味であることに注意しなければならない。先に供給方程式の場合

$$\lambda_2' = .840353\ \mathrm{E}+00 \qquad \lambda_2' = -.60250545\ \mathrm{E}+06$$

と書いたが、普通の意味で最大根をとるということであればλ_2'をとることになる。しかしこの場合絶対値で最大ということであればλ_2をとることになる。その方程式がジャストアイデンティファイである場合は、情報限定最尤法は二段階最小自乗法と一致することが証明されている。λ_2を用いたときの回帰係数の値を二段階最小自乗法の係数と比較してみると、計算誤差を除いて一致している。従ってこの方程式を書くことは省略した。λ_2'は絶対値という意味では最小根となり、したがって方程式測定という意味ではあまり意味のないものであり、係数の値も理論的意味からはなれ、標準誤差も計算できなかった。しかし試みにこれを予測式として使ってみると、昭和三八年では最も現実値に近いという値を得た。また重相関係数も非常に高い。よく重複共線性がある場合で係数自体に信頼性がうすく、従って構造それ自体をよくあらわしていない場合でも予測には使えるということが書かれている。これは本来おかしなことであるけれども、現在の場合でもこのことはあてはまっている。これは一面では構造方程式体系の予測ということに一つの問題をなげかけているといってもよいであろう。

第二は完全情報最尤法ではまず内生変数の値にある近似値を用いて、それからくりかえし法によって値が安定するまで求めて行ったのであるが、まず最小自乗法による近似値から出発して、くり返しを行なって求めていった。これに対して、例えば二段階最小自乗法を最初の近似値として求めた場合はどうなるか、当然同じ方向に進むわけであるがその結果を記しておくと、

1回目

(1.1)　(1)　$r_1^{1\prime}=(1\quad .32682036E+01)+\Delta\hat{r}_0^{1\prime}$

$$\Delta\hat{r}_0^{1\prime}=(10)\begin{pmatrix}1 & 1\\ .32682036E+01 & -.6769584E+01\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.90308054E-07 & .12126789E-06\\ .12126789E-06 & .59098919E-06\end{pmatrix}$$

ノーマライズして

$r_1^{1\prime}=(1\quad .19272343E+01)$

(2)　$r_1^{2\prime}=(1-.6769584E+01)+\Delta\hat{r}_0^{2\prime}$

$$\Delta\hat{r}_0^{2\prime}=(01)\begin{pmatrix}1 & 1\\ .32682036E+01 & -.6769584E+01\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.13207586E-06 & -.79257962E-07\\ -.79257962E-07 & .75736333E-06\end{pmatrix}$$

$r_1^{2\prime}=(1-.19893983E+01)$

2回目

(1.2)　(1)　$\hat{r}_2^{1\prime}=(1\quad .19272343E+01)+\Delta\hat{r}_1^{1\prime}$

$$\Delta\hat{r}_1^{1\prime}=(10)\begin{pmatrix}1 & 1\\ .19272343E+01 & -.19893983E+01\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.90308054E-07 & .12126789E-06\\ .12126789E-06 & .59098919E-06\end{pmatrix}$$

$r_2^{1\prime}=(1\quad .27656025E+01)$

(2)　$r_2^{2\prime}=r_1^{2\prime}+\Delta\hat{r}_1^{2\prime}$

$$\Delta\hat{r}_1^{2\prime}=(01)\begin{pmatrix}1 & 1\\ .19272343E+01 & -.19893983E+01\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.13207586E-06 & -.79257962E-07\\ -.79257962E-07 & .75736333E-06\end{pmatrix}$$

$r_2^{2\prime}=(1\quad -.27265263E+01)$

以下同様のくり返しを続けると、

3回目

(1.3)　(1)　$r_3^{1\prime}=(1,\quad .25078677E+01)$

(2)　$r_3^{2\prime}=(1\quad -.21968490E+01)$

4回目

(1)　$r_4^{1\prime}=(1\quad .26822049E+01)$

(2)　$r_4^{2\prime}=(1\quad -.23292635E+01)$

5回目

(1)　$r_5^{1\prime}=(1\quad .26339072E+01)$

(2)　$r_5^{2\prime}=(1\quad -.22374198E+02)$

6回目

(1)　$r_6^{1\prime}=(1\quad .26670272E+01)$

(2)　$r_6^{2\prime}=(1\quad -.22618722E+01)$

となって、最初最小自乗法の値を近似値として出発したときと、二段階最小自乗法による推定値を近似値として用いた時と同一の結果に到達してゆくことがわかるのである。

第三に予測についてであるが、(1) その方法は大別して三つの方法があるといわれる。(1)部分分析、(2)全部分析、(3)最終分析である。

その区別は部分分析では全部の先決変数と左辺の内生変数を除くすべての内生変数について実際の観測値が代入される。そして左辺の内生変数の推定値が計算される。この方法は個々の構造方程式の安定性を検討し、方程式残差の吟味に基づいて変数の追加や関数形の変更などモデルの部分的な改良を行なうのに適しているといわれる。先に行なった予測と重相関の計算ではこの方法が使われた。計算が最も簡単であることも一つの利点であろう。全部分析では先決変数についてだけ実際の観測値が用いられ、時の遅れのない内生変数は連立方程式を解くことによってすべて同時に計算される。あるいは誘導形を求めておき、先決変数を代入することによって内生変数の値を求めることもできる。最終分析は外生変数の観測値ないし想定値と分析期間の最初の期における先決（時の遅れをもった）内生変数とだけを与えて、他はすべて、すなわち遅れのない内生変数と最初の期を除く時期における先決内生変数とについてはすべてモデルから計算する。そして第二期以後については、遅れのある内生変数の値としてモデルから計算されたものを用いる。前の期の内生変数の計算値ないし予測値が次の期の先決内生変数の値として用いられるというように連鎖的・動態的な計算が行なわれる。このように最終分析は外生的情報が最も少いという意味で一番望ましいわけであるが、これを行なうにはモデルの組形自体に工夫がいる。モデルのテストという意味では、データの期間内についてモデルによる計算値と実際のデータとの適合・内插テストとモデルの期間外の適合・外插テストに分けることができる。外插テストが普通の意味における予測力のテストとなる。以前に行なった部分分析においては、内插・外插の両方を試みたが、構造分析、同時推定という意味からは全部分析を行なってみることが必要であろう。全期間についてこれを行なうことは計算上はんざつであるし、本来の予測という意味は外插でやるから、この場合昭和三七・三八の両年について全部分析を行なってみる。ただしこの際外生変数の値は正確に知られている場合を想定してみよう。外生変数といえども外插期間については正確な知識はないのが普通である。最も簡単な方法としては外生変数自体の時間に対する回帰式をつくり、その回帰式から外插期間の推定値を求める(2)方法が考えられる。特別な計画的な値が外生変数としてとられるときは外插期間といえどもその値を正確につかむことができるから、回帰推定値を用いる必要はない。今外生変数に対しては正確な値を推定できると考えて、各構造方程式について解いてみると、

三段階最小自乗法

37年　$y_1+3.2682036\,y_2=(2.1679261\times6534.6)$

$+31991.805=46158.335$

$y_1-6.769584\,y_2=(174.9051\times84.9)+(1.518458$

$\times35568)-78983.355=-10125.398$

これを解いて　$y_1=28075$

$y_2=5643$

38年　$y_1+3.2682036\,y_2=(2.1679261\times7083.5)$

$+31991.805=47348.310$

$y_1-6.769584\,y_2=(174.9051\times82.2)+(1.518458$

$\times43200)-78983.355=991.230$

$y_1=32255$

$y_2=4618$

三段階最小自乗法

37年 $y_1+3.26840y_2=(2.16781\times6534.6)$
$+31993.5175=46159.288$
$y_1-6.5403y_2=(72.450\times84.9)+(1.46145\times35568)$
$-66134.1285=-8002.270$
$y_1=28112$
$y_2=5522$
38年 $y_1+3.26840y_2=(2.16781\times7083.5)$
$+31993.5175=47349.2$
$y_1-6.5403y_2=(72.450\times82.2)+(1.46145\times43200)$
$-66134.1285=2955.901$
$y_1=32557$
$y_2=4526$

情報制限最尤法

37年 $y_1+3.4149039y_2=(2.1023280\times6534.6)$
$+33305.842=47043.715$
$y_1-6.7576317y_2=(174.85979\times84.9)+(1.51403871$
$\times35568)-78992.356=-10292.874$
$y_1-27796$
$y_2=5636$
38年 $y_1+3.4149039y_2=(2.1023280\times7083.5)$
$+33305.842=48197.682$
$y_1-6.7576317y_2=(174.88979\times82.2)+(1.51403871$
$\times43200)-78992.356=790.070$
$y_1=32283$
$y_2=4660$

（情報制限最尤法の二番目の式は二段階最小自乗法と一致すべきものであるが、計算誤差上多少違ったまま用いた）

完全情報最尤法

37年 $y_1+2.662552y_2=(2.4387496\times6534.6)$
$+27012.646=42948.902$
$y_1-2.246441y_2=(86.456960\times84.9)+(1.0244545$
$\times35568)-29156.153=14621.858$
$y_1=27585$
$y_2=5770$
38年 $y_1+2.662552y_2=(2.4387496\times7083.5)$
$+2.7012.646=44287.532$
$y_1-2.246441y_2=(86.456960\times82.2)+(1.0244547$
$\times43200)-29156.153=22207.065$
$y_1=32311$
$y_2=4498$

なお、誘導形自体を内生変数の予測式として使い、この式を予想方程式と呼ぶこともある。これに直接に関係しない変数を含むという意味でのあいまいさが残るがこの方式による予想値を求めてみる。この場合も外生変数自体は、時間の関数として回帰式を用いて外插する方がより実際的であるが、今、外生変数自体の値は正確に予想されたとして計算してみる。

単純な誘導形では先の計算では常数を求めていなかったので、例によって平均からの偏差を用いて求めると、

(1)式 $a_0=14405.4-(1.43705\times2662.8)-(6.68748$
$\times92.47)-(0.48275\times18986.6)=794.651$

(2)式 $b_0=7147.4-(0.21265\times2662.8)+(24.8907$
$\times92.47)+(0.15325\times18986.6)=11792.495$

構造パラメーターから逆算した誘導形についても常数を求める。

(1)式 $a_0'=14405.4-(1.4454645\times2662.8)-(2.4141383$
$\times92.47)-(0.48697618\times18986.6)=1087.165$

(2)式 $b_0'=7147.4-(0.22100888\times2662.8)+(7.3862992$
$\times92.47)+(0.14899526\times18986.6)=10070.816$

昭和三七年・三八年についてXの値を代入して求めてみると、

単純誘導形 37 年 (1) 27923 38 年 (1) 31590
(2) 5618 (2) 4516

構造パラメーターより逆算した誘導形

37 年 (1) 28058 38 年 (1) 32562
(2) 10071 (2) 4593

これらの値を一括してあげてみると、

	実際値	二段階最小自乗法	三段階最小自乗法	情報制限最尤法	完全情報最尤法	単純誘導形	逆算誘導形
Y_1							
37	28662	28075	28112	27796	27585	27923	28058
38	29766	32255	32557	32283	32311	31589	32562
Y_2							
37	6350	5643	5522	5636	5770	5618	5588
38	6275	4618	4526	4660	4498	4515	4593

Y_1については、先に計算した部分分析で得られた二つの値の中間値となっていることは当然考えられるところであるが、三七年についてはすべてよく一致しており、三八年についてはすべてやや過大となっている。この点では古典的最小自乗法の二つの値の平均をとった方がより実際値に近い。Y_2についてはすべて過小となっている。各種の測定法を通じてその値はほぼ同じ大きさであり、その意味での予測力に大差はない。大差がないとすれば計算上簡単なものが有利となる。Y_2については誤差が大きいが、原系列をみればわかる通り値の変動が非常に大きく傾向としては減少傾向にあるが、その動きが不規則なため、これをとらえることは構造方程式を使っても困難なのである。

第四に、Y_1、Y_2について単純な時間回帰をとって、三七、三八年の予測をしてみる。

(1) $Y_1=a+bt$ （t＝昭和27年を1とする）

(2) $Y_2=a'+b't$

計算結果は

(1) $Y_1=4398.13+1819.50t$ $r=0.969$

(2) $Y_2=7536.56-70.76t$ $r=0.482$

$t=11$, 12 の値を代入すると

Y_1 37年 24413 38年 26232

Y_2 37年 6758 38年 6687

となり、Y_1に対しては三七、三八年共過小、Y_2に対しては三七、三八年共過大となっているが、Y_2に対しては構造方程式による値より

もむしろ実際値に近い値となっており、不規則変動に対しては単に予測ということでは単純な方法による方が効率がよい場合もありうることがわかる。

第五に測定方法として操作変数 (Instrumental Variable) を使う方法があることを加えておく(3)。これは今迄用いられた問題では直接考える必要がないので省略したが、その方法のみ記しておけば、古典的最小自乗法で偏りのある推定値となるとき、

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

のままを用いず、YとX〔(K＋1)個の独立変数（ただし1個は1という値をとる常数）とする〕に加えて、K＋1個の操作変数 $z_0, z_1, \dots\dots, z_k$ を考える（z_0は1という値をとる常数）。各々の z は撹乱項 ε と独立であるが独立変数Xとは相関のある変数である。何がこのような性質をもった変数であるかを見出すのはなかなか困難なこともあろうが、計画的な外生変数等を考えれば、この条件にあてはまることになろう。また時の遅れをもつ独立変数もこの条件をみたすであろう。したがって方程式の中にそのような変数があるときは、その変数自身を操作変数として使うことができる。この方法を使うことによって一致性と漸近的不偏性を獲得できる。計算方式として古典的最小自乗法では、

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

$$X'Xb=X'Y \quad \text{正規方程式}$$

$$b=(X'X)^{-1}X'Y$$

操作変数 z（観測期間Tとすれば、z はT行（K＋1）列の行列）を加えた時は、

$$Y=X\beta+\varepsilon$$

$$z'Xb^*=z'Y \quad (X' \text{ の代りに } z' \text{ をとる})$$

$$b^*=(z'X)^{-1}z'Y$$

として求められる。回帰係数の分散行列は、

$$S_{b^*b^*}=S^{*2}(z'X)^{-1}(z'z)(z'X)^{-1\prime},$$

（S^{*2} は理論値と実際値との差の自乗和を（T－K－1）で割った値である）

として与えられる。例えば平均値からの偏差をとって、

$$y=\beta_1X_1\beta_2X_2+\varepsilon$$

として、X_1 と ε は相関がないが、X_2 と ε と相関があると考えられるとき、そして X_1 自身を操作変数として考え得るならば、他に一つ Z_1 という制度変数を選んでくれればよい。そして次の変動行列、

	(x_1としてみる) $x_1=z_1$	x_2	z_2	y
(z_1としてみる) $x_1=z_1$	$\sum z_1x_1{}^2$	$\sum z_1x_2$	$\sum z_1z_2$	$\sum z_1y$
x_2	$\sum x_2x_1$	$\sum x_2{}^2$	$\sum x_2z_2$	$\sum x_2y$
z_2	$\sum z_2x_1$	$\sum z_2x_2$	$\sum z_2{}^2$	$\sum z_2y$
y	$\sum yx_1$	$\sum yx_2$	$\sum yz_2$	$\sum y^2$

をつくる。β_1、β_2 の推定値を b_1^*、b_2^* とすれば、

$$\begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum z_1x_1 & \sum z_1x_2 \\ \sum z_2x_1 & \sum z_2x_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum z_1y \\ \sum z_2y \end{pmatrix}$$

として計算される。回帰係数の標準誤差は、まず b_1^* b_2^* を使って理論値を求め、実際値との差の自乗和を計算し、それを（T－K－1）で割って S^{*2} を求め、次に

$$S_{b_1^*b_2^*}=S^{*2}\begin{pmatrix} \sum z_1x_1 & \sum z_1x_2 \\ \sum z_2x_1 & \sum z_2x_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \sum z_1{}^2 & \sum z_1z_2 \\ \sum z_1z_2 & \sum z_2{}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum z_1x_1 & \sum z_1x_2 \\ \sum z_2x_1 & \sum z_2x_2 \end{pmatrix}^{-1\prime}$$

$S_{b_1^*b_2^*}$ を求め、この場合は二行二列の行列となるが、その対角線要素の平方根を求めれば、各々、b_1^*、b_2^* の標準誤差となる。

（二）

以上で補足の説明を終って、次にこのような問題に対する若干の文献紹介を行ないたいと思う。年代順に追ってゆくと、元来測定方法については最小自乗法的な方法、これは因果関係を追うという立場にあり、同時的な推定よりも因果的順序によって体系を形づくる方が望ましいという説と、同時推定方式を望ましいとする説とに分けることができる。その著、需要分析の中でも述べられているが(4)、因果関係を追求することの最大の利点は、識別の問題を含まないことである。識別の問題は同時推定にとって有効な道具であると共に、推定式の作成は問題を生ずるからである。同時推定方式は、最小自乗法による偏りに対して、一致性・漸近的有効性をもつことが示されたが、漸近的性質は大標本にとっては有効であるが、一般には小標本をとりあつかう計量経済学にとってはあまり重要性はもっていない。そこで小標本による性質が重要視されるが、それをみるためにしばしばモンテカルロ法による研究が行なわれている(5)。モンテカルロ法ではまず一つのモデルを想定し、次に撹乱項の分散共分散行列の要素を含めて母数に特定の値を与えることによってモデルのなかの一つあるいはいくつかの構造を定める。このような構造に対して、仮定された撹乱項の分布から適当な乱数表を用いて、撹乱項の標本をくり返し抽出する。これに加えて外生変数に勝手な値を与える。外生変数と撹乱項の値を与えると内生変数の値がきまる。ここで研究しようとする推定法が内生変数と外生変数の標本値の各集合に適用される。このような過程が多数回くり返され、それから得られる推定値の頻度分布と母数の真の値との関係を調べる。推定値の頻度分布が真の母数のまわりに集中しているほどよいと考えられるから、母数を θ とし $\hat{\theta}$ で標本より得られた推定値とすれば、平均平方誤差（M. S. E.）、

$$\text{M.S.E}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{\theta}_i-\theta)^2}{N} \qquad \text{N はくり返しの数}$$

をとってその有効性の尺度とすることが考えられる。その他、単なるかたより、

$$\hat{\theta}-\theta$$

推定値の分散、

$$\text{分散}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(\hat{\theta}_i-\bar{\hat{\theta}})^2}{N}$$

をとってみることも考えられる。さらに分散でなくて平方根をとって標準偏差、MSEの平方根をとってRMSEを計算して有効性の

尺度とすることもある。標本をくり返す回数は、五〇回から一〇〇回ぐらいが普通であろう。そして各回において最もよい体質を示した測定方法をしるしておき、その回数を調べて優劣を判断しようとする。もとよりそれはその実験においてそうなったということで、実験を更につづければ異ってくるかもしれないし、また別のモデルを考えれば別の結果が生じるかもしれないので、決定的なことは言えないが大体の方向はしることができる。ジョンストンの書物では、サマーズ、ベイズマン、ワグナー、ナイスワンガー、ヤンシン等の例があげられている。ワグナーは、[6]

(1) $y_1-\beta_1 y_2 \qquad -\gamma_1=u_1$

(2) $-\beta_2 y_2+y_3-\gamma_2 z_1-\gamma_3=u_2$

(3) $y_1-y_2+y_3 \qquad +z_2 \qquad =0$

$$z_1(t)=y_2(t-1)$$

というモデルをつくった。ここで y は内生変数、z は外生変数と先決変数、$u(t)$ は各々独立で平均 0 有限の共分散行列をもつ同じ正規分布に従うとする。そして第Iモデルと第IIモデルを考える。方程式(3)を y_3 について解き、方程式(1)(2)から y_3 を消却する。第Iモデルは u に対する分散―共分散行列として、

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1.0 & .5\\ .5 & 1.0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{covr}(u_1,\ u_2)=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=.5$$

とする。第IIモデルは u の分散・共分散行列として、

$$\Sigma=\begin{pmatrix}8.40254 & -8.05232\\ -8.05232 & 7.80599\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{covr}(u_1,\ u_2)=-0.9943$$

標本の大きさは二〇で一〇〇回くり返された。比較されるのは情報制限最尤法と古典的最小自乗法と、操作変数による推定値である。方程式(1)について、その結果が表としてつくられている。

(3)列が情報限定最尤法、(4)が最小自乗法、(5)(6)が操作変数を使ったときのものである。γ の推定についても同様の順序である。この表でモデルIをみると、β_1 の推定値については、かたよりは最小自乗法が最も大きい。しかし標本の標準偏差は最も小さい。しかし平均平方誤差の平方根をとったときは操作変数を使った場合の(2)の例が最も小さくなっている。情報限定法に比べてやはり最小自乗法の方が小さくなっている。γ_1 については操作変数(2)を除いて $\overline{X}$ は真の値とかなり違っており、最小自乗法ではマイナスになってしまっている。しかし標準偏差はやはり最も小さい。平均平方誤差の平方根も最も小さい。ここに最小自乗法の特色があるといえよう。モデルIIについても大体同様の結果が得られている。β_1 については、かたよりは最小自乗法が最も大きく、標準偏差は最も小さい。平均平方誤差の平方根は制度変数(1)が最も小さい。γ_1 についても最小自乗法は大きく偏りをもっていることが示されている。ワグナー[7]は係数の分散についても研究しているがここでは省略する。その後、ブラウンは完全情報最尤法をやや簡単にした計算を行ない、モデルをつくって、種々の方法で測定を行ない、誤差を比較して、計算手続きの

Model I, Frequencies of Estimates of Equation (1) Parameters

(1) Functional intervals	(2) Expected freqs.—normal dist.	(3) Actual freqs.—L.I.S.E. $\hat{\beta}_1$	(4) Actual freqs.—1st. sqrs. $\overline{\beta}_1$	(5) Actual freqs.— $\hat{\beta}_1(1)$	(6) Actual freqs.— $\hat{\beta}_1(2)$	(7) Actual freqs.—L.I.S.E. $\hat{\gamma}_1$	(8) Actual freqs.—1st. sqrs. $\overline{\gamma}_1$	(9) Actual freqs.— $\hat{\gamma}_1(1)$	(10) Actual freqs.— $\hat{\gamma}_1(2)$
$(-\infty)<\mu\leqq\overline{X}-2.0S$	2	3	3	3	3	1	1	1	1
$\overline{X}-2.0S<\mu\leqq\overline{X}-1.5S$	5	4	6	5	3	1	8	1	1
$\overline{X}-1.5S<\mu\leqq\overline{X}-1.0S$	9	7	8	3	10	11	8	11	12
$\overline{X}-1.0S<\mu\leqq\overline{X}-.5S$	15	10	13	13	10	20	14	20	19
$\overline{X}-.5S<\mu\leqq\overline{X}$	19	20	16	21	19	22	19	23	24
$\overline{X}<\mu\leqq\overline{X}+.5S$	19	21	22	21	24	18	22	17	16
$\overline{X}+.5S<\mu\leqq\overline{X}+1.0S$	15	24	17	23	22	9	15	8	13
$\overline{X}+1.0S<\mu\leqq\overline{X}+1.5S$	9	9	9	9	5	11	7	12	6
$\overline{X}+1.5S<\mu\leqq\overline{X}+2.0S$	5	2	4	2	3	5	1	5	4
$\overline{X}+2.0S<\mu\leqq(+\infty)$	2	0	2	0	1	2	5	2	4
True Value		.5000	.5000	.5000	.5000	.2500	.2500	.2500	.2500
$\overline{X}$=Average μ		.4955	.5137	.4940	.4997	.3701	−.0506	.4152	.2850
S=Sample Stand.Dev. of μ		.017364	.010670	.018102	.016339	.46101	.31203	.48191	.44422
Minimum μ		.4127	.4849	.4058	.4255	−.5674	−.6843	−.5511	−.6229
Median μ		.4976	.5141	.4958	.5016	.2560	−.0785	.3298	.2283
Maximum μ		.5290	.5366	.5281	.5324	2.2774	.8077	2.4460	1.9650
Root Mean Square Error $(S^2+(\overline{X}-\mathrm{T.V.})^2)^{1/2}$		.01794	.01736	.01907	.01634	.4764	.4333	.5094	.4456

Model II, Frequencies of Estimates of Equation (1) Parameters

(1) Functional intervals	(2) Expected freqs.— normal dist.	(3) Actual freqs.— L.I.S.E. $\hat{\beta}_1$	(4) Actual freqs.— 1st. sqrs. $\bar{\beta}_1$	(5) Actual freqs.— $\hat{\beta}_1(1)$	(6) Actual freqs.— $\hat{\beta}_1(2)$	(7) Actual freqs.— L.I.S.E. $\hat{\gamma}_1$	(8) Actual freqs.— 1st. sqrs. $\bar{\gamma}_1$	(9) Actual freqs.— $\hat{\gamma}_1(1)$	(10) Actual freqs.— $\hat{\gamma}_1(2)$
$(-\infty) < \mu \leq \bar{X}-2.0S$	2	3	2	2	1	2	2	2	2
$\bar{X}-2.0S < \mu \leq \bar{X}-1.5S$	5	1	3	2	4	3	3	3	0
$\bar{X}-1.5S < \mu \leq \bar{X}-1.0S$	9	14	15	15	15	11	11	11	7
$\bar{X}-1.0S < \mu \leq \bar{X}-.5S$	15	11	9	10	10	13	14	13	16
$\bar{X}-.5S < \mu \leq \bar{X}$	19	20	22	20	21	21	18	22	25
$\bar{X} < \mu \leq \bar{X}+.5S$	19	21	18	21	18	20	22	18	24
$\bar{X}+.5S < \mu \leq \bar{X}+1.0S$	15	16	18	16	18	12	13	13	16
$\bar{X}+1.0S < \mu \leq \bar{X}+1.5S$	9	8	7	8	7	11	10	11	8
$\bar{X}+1.5S < \mu \leq \bar{X}+2.0S$	5	4	4	3	3	6	6	6	2
$\bar{X}+2.0S < \mu \leq (+\infty)$	2	2	2	3	3	1	1	1	0
True Value		.5000	.5000	.5000	.5000	.2500	.2500	.2500	.2500
$\bar{X}$=Average μ		.5049	.5087	.5042	.5061	.1560	.0655	.1869	.1426
S=Sample Stand. Dev. of μ		.046020	.045335	.045442	.045991	1.26408	1.25419	1.27592	1.27097
Minimum μ		.3733	.3821	.3728	.3741	−3.7212	−3.7949	−3.7117	−3.7455
Median μ		.5058	.5082	.4995	.5048	.1576	.0943	.1570	.1313
Maximum μ		.6357	.6383	.6352	.6361	3.0388	2.8246	3.0512	3.0205
Root Mean Square Error $(S^2+(\bar{X}-T.V.)^2)^{1/2}$		.046280	.046165	.045636	.046394	1.26757	1.26769	1.27747	1.27550

容易さから言えば、最小自乗法、情報制限法、簡易化された完全情報法、完全情報法の順序であり、計算された偏りからみるかぎり、計算の正確さということでの順序は完全情報法、簡易化された完全情報法、情報制限法、最小自乗法、ということになり、結局両者を考慮に入れれば、簡易化された完全情報法、情報制限法、完全情報法、最小自乗法の順序になろうという。卓上計算機しかない場合には情報制限法が第一になろうともいう。(8)ナガールは先にあげたワグナーのモデルを若干変形したモデルで比較を試みた。

$$y_1(t)-r_1y_2(t)=u_1(t)$$
$$-(1-r_2)y_2(t)+y_3(t)+\beta_2x_1(t)=u_2(t)$$
$$y_1(t)\quad -y_2(t)\quad +y_3(t)\quad +x_2(t)=0$$

標本の大きさは二〇で一〇〇回のくり返しを行なう。モデルIは$u_1(t)$と$u_2(t)$の分散共分散行列として、

$$\begin{bmatrix} E\{u_1(t)\}^2 & E\{u_1(t)u_2(t)\} \\ E\{u_2(t)u_1(t)\} & E\{u_2(t)\}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

モデルIIとして、

$$\begin{bmatrix} E\{u_1(t)\}^2 & E\{u_1(t)u_2(t)\} \\ E\{u_1(t)u_2(t)\} & E\{u_2(t)\}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8.40254 & -8.05232 \\ -8.05232 & 7.80599 \end{bmatrix}$$

を考える。ここで比較しようというのは主に最小自乗法と二段階最小自乗法と最小二次積率法 (minimum-second-moment method)、第IIモデルには不偏法 (unbiased method) を加えている。最小自乗法を除いた三者はいずれも一致推定値をあたえるものである。そしていずれも k クラスの統計量の中に含まれる。k クラスの統計量というのは、

(1) $Y_w\Gamma+X\beta=U$

Y_wはT行M列の行列、Mは内生変数の大きさ、Tは観測期間、XはT行Λ行の行列、Λは先決変数の大きさ、UはT行M列の攪乱項の行列、ΓはM行M列の行列、βはΛ行M列の行列、

(2) $Y=Y_r+X_1\beta+u$

今、求めようとする特定の方程式を書くと、YはT行1列の列ベクトル、YはT行m列、$m\leq M-1$、X_1はT行l列の行列、m、lはそれぞれその方程式の中に入ってくる内生変数と外生変数の大きさである。uはT行1列の列ベクトル、rとβはパラメーターベクトル、更にX_2をその方程式には入ってこないが構造方程式の中に入ってくる先決変数のT行$(\Lambda-e)$列の行列とする。

$$X=[X_1X_2]$$

と書ける。母集団の誘導形は、

(3) $Y=X\Pi+\bar{V}=X_1\Pi_1+X_2\Pi_2+\bar{V}$

(4) $\Pi_w=-\beta\Gamma^{-1}\quad \bar{V}_w=U\Gamma^{-1}$

(5) $\bar{Y}=X\Pi=Y-\bar{V}$

と書ける。一般的なkクラスの推定手続きは、

(6) $\begin{bmatrix} (Y-kV)' \\ X_1' \end{bmatrix}Y=\begin{bmatrix} Y'Y-kV'V & Y'X_1 \\ X_1'Y & X_1'X_1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}_k$

kは任意のスカラーであって確率的であってもなくてもよい。Vは最小自乗法でYを推定したときの残差の行列である。

(7) $V=Y-X(X'X)^{-1}X'Y$

$\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}_k$は$\begin{pmatrix}\gamma\\\beta\end{pmatrix}$の一般的な$k$クラスの推定量である。$k=0$とおくと、$\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}_0$は古典的最小自乗推定値となり、$k=1$とおくと$\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}_1$は二段階最小自乗推定値となる。今(1)式のUのT行が平均0をもつM次元正規母集団から独立にひきだされたと仮定されると、(3)の誘導形の攪乱行列は、

$$\bar{V}=u\Pi'+W$$

と書かれる。uは(2)の攪乱ベクトル、Πは列ベクトル、それは(1)式の$\Gamma\beta$によって決定される。そしてW行列の各行も同じM次元正規分布から独立にひきだされたとすると、これらの行はUから独立である。

(9) $$\frac{1}{T}E(\bar{V}'\bar{V})=\sigma^2\pi\pi'+\frac{1}{T}E(W'W)$$

(10) $$C=C_1+C_2$$

ここでσ^2は(2)の攪乱項の分散、

$$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{T}E(\bar{V}'\bar{V}) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad C_1=\begin{bmatrix}\sigma^2\Pi\Pi' & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad C_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{T}E(W'W) & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Cは右と下に0の要素を含むので、$m+l$行、$m+l$列の正方行列となる。

(11) $$Q=\begin{bmatrix}\bar{Y}'\bar{Y} & \bar{Y}'X_1\\ X_1'\bar{Y} & X_1'X_1\end{bmatrix}^{-1}\qquad q=\sigma^2\begin{pmatrix}\Pi\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}E(\bar{V}'u)\\ 0\end{bmatrix}$$

0のサブベクターはl個の要素を含む。

(12) $$k=1+\frac{k}{T}$$

ここでkは確率的でなくTから独立である。

(13) $$k=\Delta-(m-l)-1$$

とおいたとき不偏法といい、

(14) $$k=\Delta-2(m+l)-3-\frac{tr(C_2Q)}{tr(C_1Q)}\qquad tr=trace$$

とおくとき最小二次積率法という。ナガール[9]はクラインのモデルにもこれを適用している。さて以上を前提して計算結果は、次のようになる。

第一方程式のr_1は0.5と定めている、モデルIの場合、二段階と不偏法は共に$k=1$となるから区別はない。最後の列のランクの総計というのは一〇〇回のくり返しで真の値から離れるにしたがって順位をつけたもので、一番近ければ1、最も離れていれば3となる。総計の一番少ないものが最も良いことになる。九一頁の1表をみると、ランクの総計からみると、モデルI、モデルII共、二段階が最もよく、ついで最小二次積率、最小自乗法となる。r_1についてみると、モデルIでは二段階と最小二次が最も高いが、モデルIIでは最小自乗と二段階が最も高くなっている。全体としてモデルIIの方が相関が高い。次に第二方程式のr_2とβ_2の推定値についてみる。今度は不偏法が加わる。$r_2=0.9$、$\beta_2=-0.3$と定められている、r_2の推定ではモデルIではランクの総計からみると二段階が非常によい。偏りや平均平方誤差からみても二段階がよい。しかしモデルIIになると最小二次がランクからみる限り最も良いが、偏りはかなり大きい。しかし分数や平均平方誤差は小さいというふうにばらばらになっている。

1

Point Estimates of γ_1 (=0.5)[a]

Estimation Method	Mean	Bias	Second Moment About		Total of Ranks
			Mean	0.5	
Model I					
Single-st. least. sq.	.504717	.004717	.0001185	.0001407	215 1/2
Two-stage least sq.	.499554	.000446	.0001364	.0001366	187 1/2
Minimum-second-moment	.500811	.000811	.0001327	.0001333	197
Model II					
Single-st. least sq.	.502585	.002585	.0005739	.0005806	203
Two-stage least sq.	.501303	.001303	.0005761	.0005778	193 1/2
Minimum-second-moment	.501707	.001707	.0005741	.0005770	203 1/2

2

Correlation Coefficients between the Point Estimates of γ_1 According to Alternative Estimation Methods

	Single-stage Least Squares	Two-stage Least Squares	Minimum-second-moment
Model I			
Single-stage least squares	1.0	0.9700	0.9759
Two-stage least squares		1.0	0.9991
Minimum-second-moment			1.0
Model II			
Single-stage least squares	1.0	0.9991	0.9963
Two-stage least squares		1.0	0.9964
Minimun-second-moment			1.0

β_2についてもほぼ同様の傾向がみられる。簡単に優劣がつかない。相関をみるとr_2ではやはりモデルIIの方が全体として相関が高い。モデルIの最小自乗は他との相関はかなり低い。β_2の場合も同様である。この結果からみる限り、攪乱項の相関が高い方が各種測定法の結果が似てくることになる。なお決定すべきことは、最小二次積率法でモデルIに対して第一方程式では$k=0.830$、第二方程式では$k=0.730$、モデルIIでは第一方程式で$k=0.544$、第二方程式で$k=0.132$、という真の値が得られるが、これは構造パラメーターがあらかじめきめられているからで、実際に標本を抽出すれば抽出するたびにkの値は変ってくる。従って一回ごとにkの値を推定しなければならないことになる。この場合に$m=1$なので計算が簡単になる。まず二段階最小自乗法からσ^2を推定しqを求める。これから直接にC_1の最初の項が求められる。$C_1=(1/\sigma^2)qq'$。次にCの最初の項を求める。この場合はスカラーとなる。最後にC_2の最初の項は$C_2=C-C_1$で求められる。一〇〇回のくり返しで一〇〇個のkが得られるが、ナガー

3

Point Estimates of γ_2 (=0.9) and β_2 (=−0.3)

	Estimates of γ_2				Total of Ranks
	Mean	Bias	Second Moment About Mean	Second Moment About −0.9	
Model I					
Single-stage least squares	.707390	−.192610	.001512	.038361	361
Two-stage least squares	.841381	−.058619	.014332	.017768	168
Unbiased	.812276	−.087724	.007936	.015632	200
Minimum-second-moment	.751549	−.148451	.003069	.025407	271
Model II					
Single-stage least squares	1.232118	.332118	.287664	.397966	257
Two-stage least squares	0.906605	.006605	.432497	.432541	277½
Unbiased	0.934299	.034299	.405457	.406633	235½
Minimum-second-Moment	1.107355	.207355	.295104	.338100	230

	Estimates of β_2				Total of Ranks
	Mean	Bias	Second Moment About Mean	Second Moment About −0.3	
Model I					
Single-stage least squares	−.093794	.206207	.001629	.044150	367
Two-stage least squares	−.236698	.063302	.016247	.020254	155
Unbiased	−.205494	.094506	.008811	.017742	199
Minimum-second-moment	−.141180	.158820	.003243	.028466	279
Model II					
Single-stage least squares	−.661046	−.361046	.341880	.472235	253
Two-stage least squares	−.305973	−.005973	.513371	.513407	277
Unbiased	−.336202	−.036202	.481229	.482540	240
Minimum-second-moment	−.524898	−.224898	.349929	.400508	230

ルはこのkの分布を求めている。モデルⅠでは大体真の値の附近に集中しているが、モデルⅡではかなりばらばらで真の値のまわりに集中はしていない。

一九六〇年に連立方程式推計に対するシンポジュウムが行なわれ、クライスト、ヒルドレス、リウ、クラインがそれぞれ述べた。更に六一年にワーフが最小自乗法の優位を主張した。これらについて柴山氏がその著書の中で要約している。シンポジュウムではクラインは連立方程式の優位性を主張し、クライストとヒルドレスはケース・バイ・ケースで両方を活用すべきであると中立的な立場を表明し、リウは最小自乗法の優位を主張した。しかしリウとワーフの言うところは若干異なるので、リウは経済理論的に正しいモデルは殆んど「アンダー・アイデンティファイ」されたモデルであり、識別の条件がみたされないから連立方程式の計算はできないとする。これに対してクラ

4

Correlation Coefficients Between the Point Estimates of γ_2 and β_2 According to Alternative Estimation Methods

	Estimates of γ_2			
	Single-stage Least Squares	Two-stage Least Squares	Unbiased	Minimum-second-moment
Model I				
Single-stage least squares	1.0	0.3451	0.4683	0.7553
Two-stage least squares		1.0	0.9500	0.7732
Unbiased			1.0	0.9008
Minimum-second-moment				1.0
Model II				
Single-stage least squares	1.0	0.7366	0.7717	0.9101
Two-stage least squares		1.0	0.9984	0.9038
Unbiased			1.0	0.9218
Minimum-second-moment				1.0

	Estimates of β_2			
	Single-stage Least Squares	Two-stage Least Squares	Unbiased	Minimum-second-moment
Model I				
Single-stage least squares	1.0	0.3040	0.4385	0.7312
Two-stage least squares		1.0	0.9448	0.7596
Unbiased			1.0	0.9000
Minimum-second-moment				1.0
Model II				
Single-stage least squares	1.0	0.7350	0.7629	0.9098
Two-stage least squares		1.0	0.9984	0.9034
Unbiased			1.0	0.9215
Minimum-second-moment				1.0

インはむしろ「オーバーアイデンティファイ」されたモデルの方が普通であるという。これは主観の相違ともいえるので、簡単に解決のつくことではない。ワーフはむしろハーベルモの例を用いて、

$$Y=aX+u_1 \qquad (1)$$

$$X=bY+u_2 \qquad (2)$$

なる二つのモデルにおけるa、b二つのパラメーターの連立方程式接近法による推定値を$\hat{a}$ $\hat{b}$とし、最小自乗法による推定値を$\check{a}$ $\check{b}$として、

$$Y=\check{a}X+u_1 \qquad (1')$$

$$Y=\hat{a}X+u_2 \qquad (1'')$$

なる二つの予測方程式により、Xが与えられた場合のYを予測すると、(1′)の場合は偏りを生ずるが、(1″)の場合は不偏になる。従って最小自乗法の方がむしろ不偏推定値をうるので構造方程式は偏りをもつという。しかしこれは一般的にいえることではない。ワーフは更

に若干複雑な例をあげ、結局簡単なものが複雑なものより悪いという理由はないので、グラフによる方法で有効な場合もあるという。変数が多くなれば、逆にマルチコの危険も増大する。そこでむしろ最初に述べたウォルトによって発展したような方法によって最小自乗法によって解く方が多くの場合現実的であると思われると述べる。複雑な方法が必要とされる時、それがうまく応用されることに反対するのではないが、どんな場合でもそれを応用すればよいというのではなくて、簡単な方法で説明できる場合もあると考えると述べた。このような考え方は実用面を重視する人々に強く残っている。

一九六二年にアートルド、チェルナーとタイル[13]によって、三段階最小自乗法が開発され、その性格が述べられた。そしてクラインのモデルについて応用され、二段階の場合との比較がなされた。クラインのモデルIとは、

$C=\alpha_0+\alpha_1\Pi+\alpha_2(W_1+W_2)+\alpha_3\Pi_{-1}+u_1$

C＝消費　Π＝利潤　W_1＝私的な賃金支払額　W_2＝政府賃金支払額

$I=\beta_0+\beta_1\Pi+\beta_2\Pi_{-1}+\beta_3K_{-1}+u_2$

K_{-1}＝その年の初めの資本ストック

$W_1=\gamma_0+\gamma_1(Y+T-W_2)+\gamma_2(Y+T-W_2)_{-1}+\gamma_3 t+u_3$

Y＝国民所得　T＝間接税　t＝時間

$Y+T=C+I+G$

$Y=W_1+W_2+\Pi$

Three-Stage and Two-Stage Least Squares Estimates of Parameters in Klein's Model I

Equation	Coefficient of	3SLS Coefficient estimate	3SLS Variance of coefficient estimator	2SLS Coefficient estimate	2SLS Variance of coefficient estimator
Consumption	Π	0.0479	0.013119	0.0173	0.013936
	W_1+W_2	0.8170	0.001490	0.8102	0.001620
	Π_{-1}	0.1897	0.010946	0.2162	0.011506
	1	16.1923	1.690	16.5548	1.745
Investment	Π	0.2111	0.028505	0.1502	0.030084
	Π_{-1}	0.5667	0.025220	0.6159	0.026499
	K_{-1}	−0.1472	0.001202	−0.1578	0.001305
	1	17.9210	52.516	20.2782	56.892
Demand for labor	$Y+T-W_2$	0.4282	0.001203	0.4389	0.001270
	$(Y+T-W_2)_{-1}$	0.1543	0.001422	0.1467	0.001508
	t	0,1356	0.000821	0.1304	0.000849
	1	1.6935	1.302	1.5003	1.317

$K=K_{-1}+I$

この結果をみると、消費方程式のΠの係数が三段階の方が二段階に比べて三倍近く大きく、投資方程式でも約四割大きくなっているほかは大差はない。係数の標準誤差は三段階の方がすべて小さいが、これは係数自身と比較しなければならないから一概には言えないことである。各変数の積率行列は示されているが、相関行列は示されていないのでこれを計算してみると、次のようになる。

積率行列は原点のまわりの積率行列が示されているためこのままではあまり役に立たない。元資料に依って[14]、これより相関行列を計算すると、次の表に示される。

平均値のまわりの積率と相関係数の詳しい値を行にしたがって並べた値は九八頁で示される。この相関行列からみるかぎり $y_4(\Pi)$ の $y_1(C)$ $y_2(I)$ に対する相関はそう低い値ではない。$X_5(\Pi_1)$ の y_1 y_2 に対する相関はやや低い値である。外生変数間に若干の高い相関をもつものがあり、内生変数との相関の低いものもあるが、それらを組合せることによって、かなりよい結果がでていることが見られる。

一九六四年に三段階最小自乗法の理論的な解明が行なわれた[15]。マダンスキーは二段階最小自乗法に比較して、三段階最小自乗法は、漸近的に少くとも同様の有効性をもつ推定値をつくりだすことを示し、その手続きの反復はその漸近的有効性を改善しないということを示した。ローゼンベルクとリンダースは、完全情報最尤法と三段階最小自乗法と線型化された最尤法 (Linearized maximum likelihood) の三者を比較し、同時的な構造攪乱項の共分散が未知のときは三者はすべて有効であるが、共分散行列の若干の要素が先験的に知られているときは三段階最小自乗法はもはや有効でないことを示した。この中でクラインのモデルIの計算が示されているが、二段階の計算は先のタイルの例と全く同じであるが、三段階の計算値は若干異っている。特にΠの値が異っている。サーガンも完全情報最尤法と三段階との比較を行なって、完全情報推定値が最良漸近正規分布をするときは、三段階もそうなることを示した[16]。サマーズは多くの方法を使ってモンテカルロ法による比較を行なった。これは一九六二年に未発表のうちにすでにジョンストンの著書の中に引用されたが、正式には一九六五年になって発表された。モデルの形として、

$y_{1t}+\beta_{12}y_{2t}+\gamma_{11}z_{1t}+\gamma_{12}z_{2t}+\gamma_{10}=u_{1t}$

$y_{1t}+\beta_{22}y_{2t}+\gamma_{23}z_{3t}+\gamma_{24}z_{4t}+\gamma_{20}=u_{2t}$

yは内生変数、zは先決変数、uは二変量の正規分布で平均0、分散共分散行列は$\sum_u$によって示される。サマーズは六つの母数の組を示した。ここで比較しようというのは、(1)完全情報最尤法 (FIML)、(2)情報制限最尤法 (LISE)、(3)通常の最小自乗法 (OLS)、(4)二段階最小自乗法 (TSLS)、(5)最小自乗法、制約なし (LSNR) (Least Squares No Restrictions) で(5)は誘導形に最小自乗法を応用することによって求められるので、実際の比較は(1)から(4)である。母数の組合せの表は、

実験AとBの差は先決変数zの相関の程度の差である。その相関は九九頁下の表で示される。

実験Aではほとんど無相関であるが、実験Bではかなり高い相関

Arrangement of Variables

Jointly dependent variables

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
C	I	W_1	Π	W_1+W_2	$Y+T-W_2$

Predetermined variables

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
W_2	T	G	t	Π_{-1}	K_{-1}	$(Y+T-W_2)_{-1}$	1

Moment Matrices Used in 3SLS Estimation of Klein's Model I

A. *Jointly dependent*, $Y'Y^*$:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
y_1	62166.63	1679.01	42076.78	19566.35	48054.11	69501.99
y_2		286.02	1217.92	726.10	1321.72	2104.42
y_3			28560.86	13296.61	32604.93	47173.09
y_4				6347.25	15117.72	22049.39
y_5					37275.87	53827.54
y_6						77998.58

B. *Predetermined*, $Y'X^*$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	626.87	789.27	1200.19	238.00	1746.22	21683.18	6364.43	107.50
x_2		1054.95	1546.11	176.00	2348.48	28766.25	8436.53	142.90
x_3			2369.94	421.70	3451.86	42026.14	12473.50	208.20
x_4				770.00	−11.90	590.60	495.60	0.00
x_5					5956.29	69073.54	20542.22	343.90
x_6						846132.70	244984.77	4210.40
x_7							72200.03	1217.70
x_8								21.00

C. *Jointly dependent-predetermined*, $Y'X^*$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
y_1	5977.33	7858.86	11633.68	577.70	18929.37	227767.38	66815.25	1133.99
y_2	103.80	160.40	243.19	−105.60	655.33	5073.25	1831.13	26.60
y_3	4044.07	5315.62	7922.46	460.90	12871.73	153470.56	45288.51	763.60
y_4	1821.11	2405.53	3578.05	18.90	6070.13	70946.78	21030.44	354.70
y_5	4670.94	6104.89	9122.65	698.90	14617.95	175153.74	51652.94	871.10
y_6	6654.45	8776.10	13046.62	655.80	21290.34	253183.59	74755.48	1261.20

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
41.9	−0.2	25.5	12.4	28.2	45.6	2.7	7.7	6.6	1	12.7	182.8	44.9
45.0	1.9	29.3	16.9	32.2	50.1	2.9	3.9	6.1	2	12.4	182.6	45.6
49.2	5.2	34.1	18.4	37.0	57.2	2.9	4.7	5.7	3	16.9	184.5	50.1
50.6	3.0	33.9	19.4	37.0	57.1	3.1	3.8	6.6	4	18.4	189.7	57.2
52.6	5.1	35.4	20.1	38.6	61.0	3.2	5.5	6.5	5	19.4	192.7	57.1
55.1	5.6	37.4	19.6	40.7	64.0	3.3	7.0	6.6	6	20.1	197.8	61.0
56.2	4.2	37.9	19.8	41.5	64.4	3.6	6.7	7.6	7	19.6	203.4	64.0
57.3	3.0	39.2	21.1	42.9	64.5	3.7	4.2	7.9	8	19.8	207.6	64.4
57.8	5.1	41.3	21.7	45.3	67.0	4.0	4.0	8.1	9	21.1	210.6	64.5
55.0	1.0	37.9	15.6	42.1	61.2	4.2	7.7	9.4	10	21.7	215.7	67.0
50.9	−3.4	34.5	11.4	39.3	53.4	4.8	7.5	10.7	11	15.6	216.7	61.2
45.6	−6.2	29.0	7.0	34.3	44.3	5.3	8.3	10.2	12	11.4	213.3	53.4
46.5	−5.1	28.5	11.2	34.1	45.1	5.6	5.4	9.3	13	7.0	207.1	44.3
48.7	−3.0	30.6	12.3	36.6	49.7	6.0	6.8	10.0	14	11.2	202.0	45.1
51.3	−1.3	33.2	14.0	39.3	54.4	6.1	5.2	10.5	15	12.3	199.0	49.7
57.7	2.1	36.8	17.6	44.2	62.3	7.4	8.3	10.3	16	14.0	197.7	54.4
58.7	2.0	41.0	17.3	47.7	65.0	6.7	6.7	11.0	17	17.6	199.8	62.3
57.5	−1.9	38.2	15.3	45.9	60.9	7.7	7.4	13.0	18	17.3	201.8	65.0
61.6	1.3	41.6	19.0	49.4	69.5	7.8	8.9	14.4	19	15.3	199.9	60.9
65.0	3.3	45.0	21.1	53.0	75.7	8.0	9.6	15.4	20	19.0	201.2	69.5
69.7	4.9	53.3	23.5	61.8	88.4	8.5	11.6	22.3	21	21.1	204.5	75.7

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
y_1	1.000	.498	.978	.715	.983	.963	.644	.525	.730	.679	.652	.313	.870
y_2		1.000	.560	.923	.407	.672	−.233	−.106	−.0739	−.240	−.768	−.369	.456
y_3			1.000	.750	.976	.981	.548	.485	.714	.589	.722	.298	.898
y_4				1.000	.634	.834	.0326	−.0135	.186	.361	.769	−.202	.615
y_5					1.000	.942	.716	.584	.823	.745	.579	.335	.846
y_6						1.000	.475	.468	.654	.496	.746	.152	.859
X_1							1.000	.692	.878	.980	−.0902	.335	.374
X_2								1.000	.796	.658	.0993	.290	.455
X_3									1.000	.869	.134	.365	.575
X_4										1.000	−.0238	.480	.446
X_5											1.000	.154	.837
X_6												1.000	.476
X_7													1.000

MOMENT MATRIX BY ROW WISE

.94143000 E +03	.24273670 E +03	.84601700 E +03	.41424000 E +03	.10188590 E +04
.14017150 E +04	.17284200 E +03	.14833100 E +03	.39187200 E +03	.57770000 E +03
.36040800 E +03	.42584000 E +03	.10634000 E +04	.25232667 E +03	.25069340 E +03
.27681334 E +03	.21832670 E +03	.50656670 E +03	−.32366660 E +02	−.15473330 E +02
−.20530000 E +02	−.10560000 E +03	.21972334 E +03	−.25992330 E +03	.28841670 E +03
.79491000 E +03	.39904300 E +03	.93007500 E +03	.13132810 E +04	.13516530 E +03
.12582770 E +03	.35191150 E +03	.46090000 E +03	.36687100 E +03	.37240000 E +03
.10087640 E +04	.35619810 E +03	.40442700 E +03	.74683800 E +03	.53839000 E +01
−.23380000 E +01	.61452900 E +02	.18900000 E +02	.26149530 E +03	−.16887700 E +03
.46274400 E +03	.11418130 E +04	.15106800 E +04	.21173770 E +03	.18162390 E +03
.48631580 E +03	.69890000 E +03	.35265100 E +03	.50234000 E +03	.11390990 E +04
.22525520 E +04	.19739480 E +03	.20461240 E +03	.54256900 E +03	.65380000 E +03
.63764000 E +03	.32012000 E +03	.16233490 E +04	.76572390 E +02	.55796200 E +02
.13440430 E +03	.23800000 E +03	−.14220400 E +02	.12994200 E +03	.13033340 E +03
.84778100 E +02	.12818720 E +03	.16800000 E +03	.16474800 E +02	.11847100 E +03
.16694670 E +03	.30578580 E +03	.42170000 E +03	.42337200 E +02	.28303200 E +03
.40044000 E +03	.77000000 E +03	−.11900000 E +02	.59060000 E +03	.49320000 E +03
.32451810 E +03	.12323100 E +03	.60044400 E +03	.19675600 E +04	.42000000 E +03
.15872110 E +04				

CORRELATION MATRIX BY ROW WISE

.10000000 E +01	.49803499 E +00	.97797126 E +00	.71533952 E +00	.98270375 E +00
.96256111 E +00	.64375287 E +00	.52504444 E +00	.73036771 E +00	.67852052 E +00
.65205008 E +00	.31288767 E +00	.86993206 E +00	.10000000 E +01	.55976063 E +00
.92333573 E +00	.40675020 E +00	.67192012 E +00	−.23285212 E +00	−.10579384 E +00
−.73909236 E −01	−.23957251 E +00	.76784782 E +00	−.36889234 E +00	.45574456 E +00
.10000000 E +01	.74991997 E +00	.97625101 E +00	.98143445 E +00	.54786068 E +00
.48470271 E +00	.71378239 E +00	.58911810 E +00	.72232882 E +00	.29777397 E +00
.89807643 E +00	.10000000 E +01	.63415708 E +00	.83376411 E +00	.32599811 E −01
−.13454169 E −01	.18620354 E +00	.36088651 E −01	.76912802 E +00	−.20172546 E +00
.61542858 E +00	.10000000 E +01	.94197114 E +00	.71608505 E +00	.58375911 E +00
.82302350 E +00	.74537048 E +00	.57933286 E +00	.33514773 E +00	.84614863 E +00
.10000000 E +01	.47529385 E +00	.46822296 E +00	.65374580 E +00	.49643475 E +00
.74579365 E +00	.15205875 E +00	.85853333 E +00	.10000000 E +01	.69251101 E +00
.87835166 E +00	.98015668 E +00	−.90210329 E −01	.33477225 E +00	.37385424 E +00
.10000000 E +01	.79614869 E +00	.65753985 E +00	.99325069 E −01	.29007228 E +00
.45511240 E +00	.10000000 E +01	.86905966 E +00	.13439837 E +00	.36489078 E +00
.57479300 E +00	.10000000 E +01	−.23805765 E −01	.47982637 E +00	.44612893 E +00
.10000000 E +01	.15421851 E +00	.83663441 E +00	.10000000 E +01	.47646476 E +00
.10000000 E +01				

Parameter Combinations Used in Sampling Experiments

	β_{12}	γ_{11}	γ_{12}	γ_{10}	β_{22}	γ_{23}	γ_{24}	γ_{20}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{22}	T	N
Experiments 1A and 1B	−.7	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	20	50
Experiments 2A and 2B	−.7	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	40	50
Experiments 3A and 3B	−.1	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	20	50
Experiments 4A and 4B	−1.3	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	20	50
Experiments 5A and 5B*	−.7	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	20	50
Experiments 6A and 6B**	−.7	.8	.7	−149.5	.4	.6	−.4	−149.6	400	200	400	20	50

T: Number of observations in each sample in the experiment.

N: Number of observations in the sampling experiment.

* In Experiments 5A and 5B, $\gamma_{21}=+.5$ instead of zero as assumed in all other experiments except Experiments 6A and 6B.

** In Experiments 6A and 6B, $\gamma_{21}=-.5$ instead of zero as assumed in all other experiments except Experiments 5A and 5B.

Intercorrelations of the Z Variables Correlation Matrices

	A Experiments				B Experiments			
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	1	.078	.16	.38	1	−.37	.86	.98
Z_2		1	.017	−.057		1	−.52	−.43
Z_3			1	.31			1	.83
Z_4				1				1

をもっている。サマーズは附録として各母数に対して詳しい計算値を示しており、ジョンストンがこれを要約しているが、かたよりからみると、実験1A－4Aについて、完全情報(F)、情報制限(L)、二段階(T)、古典的最小自乗法(O)、の順序で、標準偏差からは、O、F、T、Lの順、平均平方誤差の平方根からは、F、O、T、Lの順になっている。その他いろいろな判定基準をつくってその場合の順位をつくっている。実験5及び6は定式化に誤まりを含んでいる場合であるが、このときはFの価値が下っている。誘導形母数の推定については、制約なしの最小自乗法(LS)も加わって五つの比較になるが、この場合でも1A－4AではFが最もよいが、5A－6AではLSが最もよくなっている。次にサマーズは、いろいろな推定法の相対的な予測力を研究した。このことを行なうためにZの特定の値に対する内生変数y_1とy_2の期待値が計算され、いろ

Results of Pairwise Comparisons of LISE, TSLS, OLS, FIML, and LSNR in Predicting $y_1|Z^*$ and $y_2|Z^*$

H_0: MAE $\hat{y}_1^i|z^* =$ MAE $\hat{y}_1^j|z^*$

	$\hat{y}_1\|Z^*$						$\hat{y}_2\|Z^*$					
Estimating Methods	Exp. 1A-4A	Exp. 1B-4B	Exp. 5A, 6A	Exp. 5B, 6B	Exp. 5A, 5B	Exp. 6A, 6B	Exp. 1A-4A	Exp. 1B-4B	Exp. 5A, 6A	Exp. 5B, 6B	Exp. 5A, 5B	Exp. 6A. 6B
LISE		+1.27	+4.20(2)*		+2.20(1)*	+1.00(1)	+ .71	+ 1.27	+1.80	+ .40	+ .80	+1.4
TSLS	− .14			−1.00								
LISE	+8.20(4)*	+5.66(3)*	+8.80(2)*	+3.60(1)*	+6.80(2)*	+5.60(1)*	+7.21(4)*	+10.89(4)*	+6.00(2)*	+7.40(2)*	+6.40(2)*	+7.00(2)*
OLS												
LISE		+1.41					+ .28(1)			+ .40(1)	+1.20(1)	
FIML	− .28		−2.40(1)*	− .20	− .60	−2.00(1)*		− .57	− .60			−1.40
LISE	+ .85	+ .99(1)	+ .60	+ .20	+ .40	+ .40	+ .14(1)	+ .42		+ .20		0
LSNR									− .80		− .60	
TSLS	+8.49(4)*	+5.66(3)*	+9.20(2)*	+5.80(2)*	+7.60(2)*	+7.40(2)*	+8.34(4)*	+11.74(4)*	+7.40(2)*	8.20(2)*	+7.40(2)*	+8.20(2)*
OLS												
TSLS	+ .42	+ .57									+ .40	
FIML			−5.40(2)*	0	+3.00(1)*	−2.40(1)*	−1.13(1)	− 1.98(2)*	−1.80(1)	0		−2.20(1)*
TSLS	+2.83(2)*	+1.56(1)		+ .60				+ .14		+ .60		
LSNR			−4.60(2)*		−2.20(1)*	−1.80(1)	− .14		−2.00*		− .60	− .80
OLS												
FIML	−7.92(3)*	−5.37(3)*	−8.80(2)*	−4.80(2)*	−7.00(2)*	−6.60(2)*	−7.21(4)*	−11.74(4)*	−6.00(2)*	−7.20(2)*	−5.20(2)*	−8.00(2)*
OLS												
LSNR	−7.35(3)*	−6.08(3)*	−8.80(2)*	−3.40(2)*	−6.00(2)*	−6.20(2)*	−6.36(3)*	−10.61(4)*	−6.60(2)*	−8.00(2)*	−6.20(2)*	−8.40(2)*
FIML	+ .99	+1.13	+1.00	+ .80	+1.00	+ .80	+ .28			+ .80	+1.40	+1.00
LSNR								− 1.27	−1.20			

A table entry represents the proportion of times one method gave estimates closer to the true value than the other, expressed in standardized normal units (i.e., $(p_{kl}-P_{kl})/\sigma_{pkl}|P_{kl}$ where $P_{kl}=1/2$). Thus each entry is a test statistic for the null hypothesis.

Asterisks indicate cases where proportions are significantly different from one-half at the .95 confidence level. Numbers in parentheses indicate the number of significant cases that have been aggregated.

いろな推定法を二つずつ組にして比較された。特定の実験の組につき、個々の内生変数について一つの方法が他の方法よりも真の値に近い推定値を与えた回数の割合を数える。もし二つの方法が予測の点で等しい効率をもつならば、この割合は 1/2 となる。そこで観測された割合が 1/2 という期待値に対し、有意な差をもつかどうかが検定された。Oが劣っていることは示されたが、それ以外の組合せには顕著な差はみられない。

サマーズは更にスチューデント化された比率を用いた検定からOが劣っていることを示した。またZが与えられたときの $y_1 y_2$ の推定値を各実験ごとにぎんみしたり、平均絶対誤差 (Mean Absolute Error (MAE) 母数と推定値の差の絶対値) が各測定法で等しいという仮説の検定も、測定法を二組ずつ組合せて行なっている。各種の検定の結果、総合的にFが最も良くOが最も劣るということがいえそうであるが、その他は明瞭ではない。Fといえども先に述べたように劣る場合もある。

以上のような実験や理論的研究の結果から、現段階ではケース・バイ[17]・ケースで適材適所に各種の方法を使うということになろう。また予測のあたりはずれということよりも、理論の計量化に重点をおくということで、モデル確立の必要性を説くこともできるのである。

（1） 宮川公男　計量経済学入門、二二九—二三二頁、昭和四一年。
（2） H. Theil, Studies in Mathematical and Managerial Economics, p. 80, 1965.
（3） S. Goldberger, Econometric Theory, p. 284-287, 1964.
（4） H.O.A. Wold, Causality and Econometrics, Econometrica 1954. No. 2, p. 162-176.
（5） 計量経済学の方法、J・ジョンストン、竹内啓訳、二五七—二五八頁、昭和三九年。
（6） H.M. Wagner, A Monte Carlo Study of Estimates of Simultaneous Lenear Structural Equations of Econometrica 1958, No. 1, p. 118-122, p. 126-127.
（7） T.M. Brown, Simplified Full Maximum Likelihood and Comparative Structural Estimates Econometrica 1959, No. 4, p. 651-652.
（8） A.L. Nagar, A Monte Carlo Study of Alternative Simultaneous Equation Estimators Econometrica 1960, No. 3, p. 573-590.
（9） A.C. Nagar, The Bias and Moment Matrix of the General k Class Estimators of the Parameters in simultaneous Equations Econometrica 1959, No. 4, p. 590.
（10） A Simposium on Simultaneous Equation Estimation.
C.F. Christ, Simultaneous Equation Estimation: Any Verdict Yet?
C. Hildreth, Simultaneous Equations: Any Verdict Yet?
T.C. Liu. Underidentification, Structural Estimations, and Fore Casting.
L. R. Klein, Single Equation Vs. Equation System Method of Estimation is Econometrics, Econometrica 1960, No. 4, p. 835-871.
（11） F. V. Waugh, The Place of Least Squares in Econometrics. Econometrica 1961, No. 3, p. 386.

(12) 柴山幸治 計量経済学、四五四―四五九頁、昭和三七年。

(13) Arnold Zellner and H. Theil, Three-Stage Least Squares: Simultaneous Estimation of Simultaneous Equations Econometrica 1962, No. 1, p. 54–78.

(14) L.R. Klein, Economic Fluctuations in the United States, 1921–1941, 1950, p. 135.

(15) A. Madansky, On the Efficiency of Three-Stage Least-Squares Estimation Econometrica 1964, No. 1–2, p. 51.
T. J. Rothenberg and C. T. Leenders, Efficient Estimation of Simultaneous Equations Systems, Econometrica 1964, No. 1–2, p. 57–75.
J. D. Sargan. Three-Stage Least-Squares and Full Maximum Likelihood Estimates, Econometrica 1964, No. 1–2, p. 767.

(16) R. Summers, A Capital Intensive Apllproach to the Small Sample Properties of Various Simultaneous Equations Estimators, Econometrica 1965, No. 1, p. 1–42.

(17) 内田忠夫・栗林世・矢島昭・渡部経彦 経済予測と計量モデル 一一頁、昭和四一年。

擬制資本について（上）

―信用論の基本問題との関連において―

飯田裕康

はじめに

ここでは、信用論の基本的課題である、「貨幣資本と現実資本」（＝信用と再生産過程）問題への一接近として、いわゆる擬制資本（das fiktive Kapital, fictitious capital）の理論について、若干の検討をこころみる。そのさい、この「擬制資本」なる概念を成立せしめる諸前提についても、併せて検討し、それらが、信用論の基本問題とのかかわりにおいて、いかなる方向で展開されねばならないか、という点を、検討する。本稿の展開は、㈠マルクスにおける擬制資本にかんする範疇の整理、㈡それにかんする諸見解の検討（以上本号）、㈢範疇展開の問題性、㈣信用論の基本問題への関連（以上八月号）の順序でなされる。

一 擬制資本範疇の構成要因

〔一〕 ここで擬制資本という場合は、証券形態をとって存在する、株式、公・社債を意味する。(1)

このような有価証券形態――擬制資本証券――が生起する基本的な前提は、諸資本の競争に規制される生産力の増大と、資本の集積・集中の進展である。

しかし、このような基礎的過程は、競争と同時に信用制度という形で推進されるのであって、擬制資本は、専ら基礎過程と信用制度との連関において形成されるものと考えうる。したがって、実際に擬制資本と資本集中は密接な結びつきをもっている。しかしその結びつきは、信用制度を媒介とするそれであることに注意する必要がある。資本の集積・集中という基本問題にとっても、擬制資本は、信用制度の方面から光を当てているということに充分留意していなければならない。(2)

このような基本的な前提に立脚して、さらに具体的に擬制資本を生ぜしめる諸前提は、以下の六つの要因である。

（a） 銀行信用の展開
（b） 長期的貨幣資本需要の増大
（c） 金利体系の確立