Title	ノイマン径路と技術進歩
Sub Title	The von Neumann ray and technical progress
Author	市石, 達郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1967
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.60, No.4 (1967. 4) ,p.399(49)- 414(64)
JaLC DOI	10.14991/001.19670401-0049
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19670401-0049

争賃金と同一であるという保証もない。しかし、もしパタンが重要な条件を無視して決められたら、例えば極端に同質でない労働力の賃金も同一化したなら、そのパタンの及ぶ範囲が修正されるか、あるいは企業をして同一の賃金に基いた新たな労働力配置を実行せしめるかして、長期的には競争賃金に一致する傾向があろう。

ノイマン径路と技術進歩

市石達郎

一、序

本稿に於て、一般化されたノイマン・モデル——ゲイルのモデル〔1〕に技術進歩を導入する。その場合、全ての期間について財の構成比が一定で、同じ率で成長し、競争価格のもとで零の利潤をもたらす径路の存在を証明する。(注1)

技術進歩については与件と看做される場合と、経済内的に定まるものとして扱われる場合とがある。ここでは後者、所謂、誘発技術進歩を取り扱う。特に、シュムペーターの技術革新（innovation）を想起すれば分かり易い。

尚、純粋数学的記号として、次の定義を用いる。

R^n_+　n次元ユークリッド空間の非負象限。

S_n （$n-1$）次元シンプレックス

ϕ 空集合

また、任意のベクトル $a=(a_1, \cdots, a_m)$, $b=(b_1, \cdots, b_m)$ に関し、

$a \geqq b$ は全ての i に関して $a_i \geqq b_i$ を意味し、

$a \geq b$ は全ての i に関して $a_i \geqq b_i$ であるが、少くとも一つの i に関し $a_i > b_i$ を意味し、

$a > b$ は全ての i に関して $a_i > b_i$ を意味する。

（注1） 本稿の作成にあたり、討論の場を与えて下さった千種義人教授、多数の貴重な助言を下さった根岸隆助教授（東京大学）、川又邦雄助手、谷口興二氏をはじめ、諸先輩方に謝意を表したい。無論、本稿での論述の責任は全て筆者のものである。私の学部学生時代から薫陶を惜しまれなかった福岡正夫教授の元気な帰国を祝し、この論文を福岡正夫教授に捧ぐ。

二、モデル

我々は n 財から成る閉鎖型モデルを考える。ここで、財は全ての種類の財・サーヴィスを意味し、人間は「労働」という財を供給する産業と考えられる。

記号を次のように定義する。

$x \equiv (x_1, \cdots\cdots, x_n)'$ n 次元縦ベクトル。この第 j 成分 x_j は第 j 財の投入量を表す。また、$x(t)$ は第 t 期の投入量を表す n 次元縦ベクトルと定義する。

$y \equiv (y_1, \cdots\cdots, y_n)'$ n 次元縦ベクトル。この第 j 成分 y_j は第 j 財の産出量を表す。また、$y(t)$ は第 t 期の産出量を表す n 次元縦ベクトルと定義する。

(x, y) アクティヴィティ。財を x だけ投入すれば y だけ産出される。

T 生産可能性の集合であり、技術を表す。すなわち、$(x, y) \in \mathrm{T}$ なるアクティヴィティ (x, y) は技術的に実現可能である、と解釈される。

$p \equiv (p_1, \cdots\cdots, p_n)$ n 次元横ベクトル。この第 j 成分 p_j は第 j 財の価格を表す。従って $(x, y) \in \mathrm{T}$ が与えられたとき、$p \cdot x$ はアクティヴィティの費用を表し、$p \cdot y$ は収入を表す。尚、$p(t)$ は第 t 期の価格を表す n 次元横ベクトルと定義する。

技術進歩を考慮するからには T は毎期々々変化していくものでなければならない。この論文で考察する技術進歩は次の諸仮定を満たしているものに限られる。

仮定1（a） 第 t 期の T は前期に採用されたアクティヴィティ、前期の価格に、それぞれ連続的に依存する。すなわち、

第 t 期の $\mathrm{T} \equiv \mathrm{T}(x(t-1), y(t-1), p(t-1))$

と書け、$(x(t), y(t)) \in \mathrm{T}(x(t-1), y(t-1), p(t-1))$ を満たすアクティヴィティは第 t 期に実現可能である。

（b） 価格が T の変数であっても、それは $\mathrm{T}-(0, 0)$ が空集合であるか否かとは無関係である。すなわち、

$\mathrm{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})-(0, 0) \neq \phi$

ならば、この $\bar{p}$ と任意の $p \in R^n_+$ とを入れ替えても

$\mathrm{T}(\bar{x}, \bar{y}, p)-(0, 0) \neq \phi$

仮定2 第 t 期に実現可能な任意のアクティヴィティは前期に採用されたアクティヴィティに関して同次である。すなわち、

$(x(t), y(t)) \in \mathrm{T}(x(t-1), y(t-1), p(t-1))$

ならば任意のスカラー $\gamma\geqq 0$ に関し、

$$(\gamma^k\cdot x(t),\ \gamma^k\cdot y(t))\in \mathrm{T}(\gamma\cdot x(t-1),\ \gamma\cdot y(t-1),\ p(t-1))$$

を満たす実数 k が存在する。

仮定2は後に若干検討されるであろう。(注2)

仮定3　過去に実現可能であったアクティヴィティは現在でも実現可能である。すなわち、任意の t に関し、

$$\mathrm{T}(x(t),\ y(t),\ p(t))\subset \mathrm{T}(x(t+1),\ y(t+1),\ p(t+1))$$

仮定4　$(x^1, y^1)\in \mathrm{T}(x^*, y^*, p^*)$, $(x^2, y^2)\in \mathrm{T}(x^{**}, y^{**}, p^{**})$ であり、$(x^1, y^1)\neq(0, 0)$, $(x^2, y^2)\neq(0, 0)$ ならば、

$$\mathrm{T}(x^1+x^2,\ y^1+y^2,\ p)-(0, 0)\neq\phi$$

仮定5　数学的便宜の為、$\bigcup_{\mathrm{T}\neq\phi}\mathrm{T}$ は $2n$ 次元ユークリッド空間上の閉集合であることを仮定する。

（注2）　第四節参照。

任意の t 期に於ては $\mathrm{T}(x(t-1),\ y(t-1),\ p(t-1))$ は固定されている。そこで、固定された**T**に関して次の仮定を設ける。つまり、各期の**T**が仮定6—9を満たしているように、仮定1—5の仕方で変化していくのである。

仮定6　**T**は $2n$ 次元ユークリッド空間の非負象限に於て原点を頂点とする閉じた凸錘である。すなわち、

（a）　**T**は $2n$ 次元ユークリッド空間の非負象限に含まれる。

$$(x, y)\in \mathrm{T}\subset R_+^{2n}$$

投入量、産出量が非負の実数値をとる、という経済的意味を持つ。

（b）　**T**は原点を頂点とする錘体である。

$$(x, y)\in \mathrm{T}\ \text{ならば任意のスカラー}\ \gamma\geqq 0\ \text{に関して、}\ \gamma\cdot(x, y)\in \mathrm{T}$$

生産関数が一次同次であることを意味する。また、$\gamma=0$ と置いて $(0, 0)\in \mathrm{T}$ すなわち、生産活動を全然行わないことも可能である。

（c）　加法性。

$$(x, y)\in \mathrm{T},\ (\hat{x}, \hat{y})\in \mathrm{T}\ \text{ならば、}\ (x+\hat{x},\ y+\hat{y})\in \mathrm{T}$$

外部不経済が存在しないことを表す。

（d）　数学上の便宜の為、**T**は $2n$ 次元ユークリッド空間上の閉集合であることを仮定する。

仮定7　桃源郷の不可能性。すなわち、無から有を生み出すアクティヴィティは実現不可能である。

$$(0, y)\in \mathrm{T}\ \text{ならば}\ y=0$$

仮定8　どの財についても、その産出量が正となるアクティヴィティが少くとも一つは存在する。

$$(x, y)\in \mathrm{T}\ (\text{ただし}\ y_j>0)\ \text{が任意の}\ j\ \text{について存在。}$$

仮定9　自由処分。すなわち、余った財の処分に費用がかからない。

$$(x, y)\in \mathrm{T},\ x\leqq\hat{x},\ 0\leqq\hat{y}\leqq y\ \text{ならば}\ (\hat{x}, \hat{y})\in \mathrm{T}$$

さて、以上の仮定のもとで、我々は全ての財が毎期々々同一の成長率で構成比を変えずに成長していく径路を考える。先ず**T**を固定して考える為、$\mathrm{T}=\mathrm{T}(x^*, y^*, p^*)$ と置く。以下、しばらくの論述はゲイル〔1〕及びカーリン〔2〕によっている。仮定6—9のもとで、

$$\lambda(x, y)\equiv\max\{c\mid y\geqq c\cdot x\}$$

と定義すると、

$$\bar{y}^* = \lambda_M^* \bar{x}^*$$

を満たすλ_M^*及び $(\bar{x}^*, \bar{y}^*) \in T(x^*, y^*, p^*)$ が存在する。ここで、

$$\lambda_M^* \equiv \lambda_M(x^*, y^*, p^*) \equiv \max_{\substack{(x,\, y) \in T(x^*, y^*, p^*) \\ x \geq 0}} \lambda(x, y) > 0$$ [注3]

さらに、このλ_M^*及び任意の $(x, y) \in T(x^*, y^*, p^*)$ に対し、

（1）　$\bar{p}^* y - \lambda_M^* \bar{p}^* x \leqq 0$

を満たす $\bar{p}^* \geqq 0$ が存在する。[注4]

$(\bar{x}^*, \bar{y}^*) = (\bar{x}^*, \lambda_M^* \bar{x}^*)$ が、技術 $T(x^*, y^*, p^*)$ のもとでのノイマン径路を構成する。価格が$\bar{p}^*$、利子率が $(\lambda_M^* - 1)$ に定められたとき、任意のアクティヴィティ $(x, y) \in T(x^*, y^*, p^*)$ による利潤は、

$$\bar{p}^* y - \lambda_M^* \bar{p}^* x$$

で表されて(1)式により非正。他方、ノイマン径路上のアクティヴィティが(1)式を等号で満たすことは明らかである。つまり、動学的完全競争の下で、$\bar{p}^*$を均衡価格、$(\lambda_M^* - 1)$ を均衡利子率と解釈することが出来、ノイマン径路上のアクティヴィティが実際に稼動され得る。

（注3）　ゲイル〔1〕p. 288　又はカーリン〔2〕Theorem 9.10.1, p. 338 参照。

（注4）　ゲイル〔1〕Theorem 1, p. 290　又はカーリン〔2〕Theorem 9.10.2, p. 339 参照。

上述の議論は $T(x^*, y^*, p^*)$ を所与としていた。そこで次に (x^*, y^*, p^*) を或る定義域D上で動かすと、(2)式を満たす $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ の存在が証明される。

$$(2)\quad \begin{cases} \bar{y} = \lambda_M \bar{x}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in T(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \\ \lambda_M = \max_{\substack{(x,\, y) \in T(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \\ x \geq 0}} \lambda(x, y) > 0 \\ \text{任意の } (x, y) \in T(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \text{ に関して } \bar{p}y - \lambda_M \bar{p} x \leqq 0, \quad \bar{p} \geqq 0 \end{cases}$$

この証明は次節で与えられている。

今、全ての期間について価格、利子率は一定で $\bar{p}$, $(\lambda_M - 1)$ とし、

$$x(t) = \bar{x} \qquad y(t) = \bar{y}$$

$$x(t+1) = y(t) = \lambda_M \bar{x} \qquad y(t+1) = \lambda_M \bar{y}$$

$$x(t+2) = y(t+1) = \lambda_M^2 \bar{x} \qquad y(t+2) = \lambda_M^2 \bar{y}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

を満たす径路、

$$(x(t),\ y(t)) \qquad t = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

を考える。(2)式より、第 $(t+1)$ 期のアクティヴィティ $(x(t+1), y(t+1)) \in T(x(t), y(t), \bar{p})$ による利潤は非負。実際にこれが稼動されたとすると第 $(t+2)$ 期の技術集合は $T(x(t+1), y(t+1), \bar{p})$ となる。仮定2に於て、

$$\gamma = \lambda_M^{-1}$$

と置けば、仮定6(b)を考慮して、結局、

$$T(x(t), y(t), \bar{p}) = T(x(t+1), y(t+1), \bar{p})$$

を得る。従って、

$(x(t+2),\ y(t+2))\in T(x(t+1),\ y(t+1),\ \bar{p})$

しかもこのアクティヴィティによる利潤は非負。以下、同様に考えて行けばよい。

このモデルでは仮定1―5に従って技術が変化する。このとき、全ての期間について、財の構成比が一定で、同じ率で成長し、競争価格のもとで非負の利潤をもたらす径路が少くとも一つは存在するのである。

三、解の存在証明

定理　仮定1―9を満たすこのモデルに於て、(2)式を満たす $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{p})$ が存在する。

定理を証明する為、準備的考察をし、補助定理1―5を得る。以下では

$$H(x,\ y,\ p)\equiv T(x,\ y,\ p)\cap S_{2n}$$

とし、$(x,\ y)\in S_{2n}$ の場合に限って考察してよい。

補助定理1　$\lambda_M^*\equiv\lambda_M(x^*,\ y^*,\ p^*)$ は $(x^*,\ y^*,\ p^*)$ に関して連続、且つ、一意に定まる。

証明

一意性は自明。

$(x^*,\ y^*,\ p^*)$ に収斂する任意の点列、

$$(x^\nu,\ y^\nu,\ p^\nu)\qquad \nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

を考え、各々の ν に λ_M^ν を対応させる。ただし、

$$\lambda_M^\nu\equiv\max_{\substack{(x,\ y)\in H(x_\nu,\ y_\nu,\ p_\nu)\\ x\geqq 0}}\ \max\{c\,|\,y\geqq c\cdot x\}$$

各 $T(x^\nu,\ y^\nu,\ p^\nu)$ について仮定6―8が満たされているから、λ_M^ν は常に実直線上の正なる有界部分に存在。以下、

$$\lambda_M^\nu\longrightarrow\lambda_M^*$$

を示せばよい。仮定1より、

$$H(x^\nu,\ y^\nu,\ p^\nu)\longrightarrow H(x^*,\ y^*,\ p^*)$$

そこで、一方で、λ_M^ν が λ に収斂すると仮定すると、

$$\lambda=\max_{\substack{(x,\ y)\in H(x^*,\ y^*,\ p^*)\\ x\geqq 0}}\max\{c\,|\,y\geqq cx\}$$

すなわち、一意性より、$\lambda=\lambda_M^*$ となり、$\lambda_M^\nu\longrightarrow\lambda_M^*$ を得る。

他方、λ_M^ν が収斂しないと仮定すると、極限の異る二つの収斂部分列を選ぶことが出来、λ_M^* の一意性に矛盾。

点対集合写像

$$P(x^*,\ y^*,\ p^*)\equiv\{\bar{p}^*\,|\,\text{任意の}\ (x,\ y)\in H(x^*,\ y^*,\ p^*)\ \text{に関して}\ \bar{p}^*y-\lambda_M^*\bar{p}^*x\leqq 0,\ \bar{p}^*\in S_n\}$$

を定義し、次の補助定理を得る。

補助定理2　写像 $P:\ (x^*,\ y^*,\ p^*)\longrightarrow\{\bar{p}^*\}$ は上半連続である。

証明

$(x^*,\ y^*,\ p^*)$ に収斂する任意の点列

$$(x^\nu,\ y^\nu,\ p^\nu),\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

を考え、各νに対して

$$P(x^\nu, y^\nu, p^\nu)\equiv\{\bar{p}^\nu \mid 任意の\ (x, y)\in H(x^\nu, y^\nu, p^\nu)\ に関して\ \bar{p}^\nu y-\lambda_M^\nu \bar{p}^\nu x\leqq 0,\ \bar{p}^\nu\in S_n\}$$

を定義する。

$P(x^\nu, y^\nu, p^\nu)$ は $(n-1)$ 次元シンプレックスに属するから、

$$\{P(x^\nu, y^\nu, p^\nu)\}\quad \nu=1, 2, \cdots\cdots$$

はS_n上で収斂部分列を持つ。各νに対し、Pより一つずつ要素をとって得られる、任意の収斂部分列を

$$\bar{p}^\theta,\ \theta=1, 2, \cdots\cdots;\ \bar{p}^\theta\to\bar{p}^0$$

と置けば、以下、

$$\bar{p}^0\in P(x^*, y^*, p^*)$$

を示せばよい。

全てのθに関し、任意の $(x, y)\in H(x^\theta, y^\theta, p^\theta)$ に対して、

$$\bar{p}^\theta y-\lambda_M^\theta \bar{p}^\theta x\leqq 0$$

ここで、

$$H(x^\theta, y^\theta, p^\theta)\to H(x^*, y^*, p^*)$$

及び、補助定理1より $\lambda_M^\theta\to\lambda_M^*$ なる事実を考慮すると、任意の $(x, y)\in H(x^*, y^*, p^*)$ に対し、

$$\bar{p}^0 y-\lambda_M^* \bar{p}^0 x\leqq 0$$

すなわち、$\bar{p}^0\in P(x^*, y^*, p^*)$ が証明された。

点対集合写像Fを

$$F(x^*, y^*, p^*)\equiv\{(\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{p}^*)\mid \bar{y}^*=\lambda_M^* \bar{x}^*,\ (\bar{x}^*, \bar{y}^*)\in H(x^*, y^*, p^*),\ 任意の\ (x, y)\in H(x^*, y^*, p^*)\ に関して$$
$$\bar{p}^* y-\lambda_M^* \bar{p}^* x\leqq 0,\ \bar{p}^*\in S_n\}$$

と定義する。$F(x^*, y^*, p^*)$ は $S_{2n}\times S_n$ 上に存在する。

補助定理3　写像 F: $(x^*, y^*, p^*)\to\{(\bar{x}^*, \bar{y}^*, \bar{p}^*)\}$ は上半連続である。

証明

(x^*, y^*, p^*) に収斂する任意の点列

$$(x^\nu, y^\nu, p^\nu),\ \nu=1, 2, \cdots\cdots$$

を考え、各νに対して $F(x^\nu, y^\nu, p^\nu)$ を考える。$F(x^\nu, y^\nu, p^\nu)$ はコンパクトな集合に属するから、

$$\{F(x^\nu, y^\nu, p^\nu)\}\quad \nu=1, 2, \cdots\cdots$$

は収斂部分列を持つ。各νに対し、Fより一つずつ要素をとって得られる、任意の収斂部分列を

$$(\bar{x}^\theta, \bar{y}^\theta, \bar{p}^\theta),\ \theta=1, 2, \cdots\cdots$$

$$(\bar{x}^\theta, \bar{y}^\theta, \bar{p}^\theta)\to(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{p}^0)$$

と置けば、以下

$$(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{p}^0)\in F(x^*, y^*, p^*)$$

を示せばよい。

全てのθに関し、

$\bar{y}^0=\lambda_M^0\bar{x}^0$，$(\bar{x}^0, \bar{y}^0)\in H(x^0, y^0, p^0)$

が満たされている。ここで、

$H(x^0, y^0, p^0)\rightarrow H(x^*, y^*, p^*)$

及び補助定理1を考慮して、

$\bar{y}^0=\lambda_M^*\bar{x}^0$，$(\bar{x}^0, \bar{y}^0)\in H(x^*, y^*, p^*)$

また、補助定理2より

$\bar{p}^0\in P(x^*, y^*, p^*)$

かくして $(\bar{x}^0, \bar{y}^0, \bar{p}^0)\in F(x^*, y^*, p^*)$ が証明された。

補助定理4　写像Fによる像は凸集合である。

証明

(x^1, y^1, p^1)，$(x^2, y^2, p^2)\in F(x^*, y^*, p^*)$

とし、任意の α：$0\leqq\alpha\leqq1$ を定める。

$H(x^*, y^*, p^*)$ は凸集合だから、

$(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2,\ \alpha y^1+(1-\alpha)y^2)\in H(x^*, y^*, p^*)$

$\alpha y^1+(1-\alpha)y^2=\alpha\cdot\lambda_M^*x^1+(1-\alpha)\lambda_M^*x^2=\lambda_M^*[\alpha x^1+(1-\alpha)x^2]$

また、$[\alpha p^1+(1-\alpha)p^2]\in S_n$ は自明であり、任意の $(x, y)\in H(x^*, y^*, p^*)$ に関し、

$[\alpha p^1+(1-\alpha)p^2]y-\lambda_M^*[\alpha p^1+(1-\alpha)p^2]x=\alpha[p^1y-\lambda_M^*p^1x]+(1-\alpha)[p^2y-\lambda_M^*p^2x]\leqq0$

かくして、

$(\alpha x^1+(1-\alpha)x^2,\ \alpha y^1+(1-\alpha)y^2,\ \alpha p^1+(1-\alpha)p^2)\in F(x^*, y^*, p^*)$

を得る。

上述では暗黙のうちに $H(x^*, y^*, p^*)\neq\phi$ が想定されていた。そのもとでは $F(x^*, y^*, p^*)\neq\phi$ は自明である。

$D\equiv\{(x^*, y^*, p^*)\mid H(x^*, y^*, p^*)\neq\phi,\ (x^*, y^*)\in S_{2n},\ p^*\in S_n\}$

と定義しよう。このモデルが意味を持つ為には、無論、$D\neq\phi$ でなければならない。

補助定理5　Dは R_+^{3n} 上のコンパクトな凸集合であり、$F(D)\subset D$

証明

$(x, y, p)\in D$ とすると $H(x, y, p)\neq\phi$

(x, y) は前期に採用されたアクティヴィティだから、仮定3により、今期にも実現可能。すなわち、$(x, y)\in H(x, y, p)$

$\therefore$ $(x, y, p)\in(\bigcup_{H\neq\phi}H)\times S_n$

逆に、$(x, y, p)\in(\bigcup_{H\neq\phi}H)\times S_n$ とすると、$(x, y)\in H\neq\phi$ を満たすHが存在する。これが今期、実際に稼動されたとすると、次期の技術集合は $H(x, y, p)$ となる。仮定3より、$H(x, y, p)\ni(x, y)\neq\phi$ さらに、仮定1（b）より $H(x, y, p)\neq\phi$

$\therefore$ $(x, y, p)\in D$

すなわち、$D=(\bigcup_{H\neq\phi}H)\times S_n$ が証明された。故に、先ず、$F(D)\subset D$

次に、仮定5より $(\bigcup_{H\neq\phi}H)$ がコンパクトであることは自明であり、従ってDもコンパクト。

最後に、(x^1, y^1, p^1)，$(x^2, y^2, p^2) \in \mathrm{D}$ とすると、

$$\mathrm{H}(x^1, y^1, p^1) \neq \phi, \quad \mathrm{H}(x^2, y^2, p^2) \neq \phi$$

仮定３及び仮定６(ｂ)より、任意の α: $0 \leqq \alpha \leqq 1$ に関して、

$$\alpha(x^1, y^1) \in \mathrm{H}(x^1, y^1, p^1), \quad (1-\alpha)(x^2, y^2) \in \mathrm{H}(x^2, y^2, p^2)$$

従って仮定４及び仮定１(ｂ)より、

$$\mathrm{H}(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2, \ \alpha y^1 + (1-\alpha)y^2, \ \alpha p^1 + (1-\alpha)p^2) \neq \phi$$

$$\therefore \ [\alpha(x^1, y^1, p^1) + (1-\alpha)(x^2, y^2, p^2)] \in \mathrm{D}$$

かくしてＤの凸性が証明された。

定理の証明

補助定理３－５より、角谷の不動点定理が援用出来る。すなわち、次を満たす $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ が存在する。

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \in \mathrm{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$$

Ｆの定義により、この $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ は次を満たす。

$$\bar{y} = \lambda_M \bar{x}, \quad (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$$

$$\lambda_M = \max_{\substack{(x, y) \in \mathrm{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \\ x \geqq 0}} \max\{c \mid y \geqq cx\}$$

任意の $(x, y) \in \mathrm{H}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ に関して $\bar{p}y - \lambda_M \bar{p}x \leqq 0$

Q・E・D・

四、結　語

先ず、仮定２を吟味する。$(x, y) \in \mathrm{T}(x^*, y^*, p^*)$ ならば、$(\gamma^k x, \gamma^k y) \in \mathrm{T}(\gamma x^*, \gamma y^*, p^*)$　ここで仮定６(ｂ)を考慮すると、$(x, y) \in \mathrm{T}(\gamma x^*, \gamma^*, p^*)$　すなわち、ここで考察される技術進歩は過去の生産の絶対水準に依存しない。この事実がこのモデルの決定的な欠陥となっている。と同時に、技術進歩のある場合に $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ の存在を証明する為には、仮定２と類似のものが必要と思われる。

各Ｔに応じてノイマン径路がそれぞれ考えられる。その中で特に $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ を選べば、経済はそのまま斉一成長をし続ける。重要な点は $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ の構成比になると技術進歩が止まってしまうことである。不変のＴのもとでのノイマン径路を「高速道路（Turnpike）」と呼べば、仮定１－５に従って可変的なＴのもとでの $(\bar{x}, \bar{y})$ は「迷路（Maze）」と言うべきものである。技術進歩を促進し、将来の資本蓄積を最大にすることを考えよう。政策当局はこの「迷路」から離れるように計画せねばならない。

従って問題点は仮定１－５の現実的妥当性如何にあろう。これは、もとより、経験的リサーチに照らしてみなければならぬ問題である。もし、それ等が非現実的なら、従来、様々なモデルについて証明された Turnpike Theorem が一層強く主張されるであろう。他方、もしそれ等が現実への近似として容認されるなら、或るノイマン径路に対しては Maze Theorem が成立する。

参考文献

〔1〕 Gale, David, "The Closed Linear Model of Production," Paper 18 from *Linear Inequalities and Related Systems*, ed. by Kuhn and Tucker, Annals of Mathematical Studies 38 (Princeton; 1956).

〔2〕 Karlin, Samuel, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol. 1* (Addison-Wesley; 1959).

〔3〕 Kemeny, John G., and Morgenstern, Oskar, and Thompson, Gerald L., "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy," *Econometrica*, Vol. 24, No. 2 (April, 1956).

〔4〕 Morishima, Michio and Thompson, Gerald L., "Balanced Growth of Firms in a Competitive Situation with External Economies," *International Economic Review*, Vol. 1, No. 2 (May, 1960).

〔5〕 von Neumann, J., "Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, No. 8 (1937), translated in English as, "A Model of General Economic Equilibrium," *Review of Economic Studies*, Vol. 13 (1) (1945-46).

〔6〕 Thompson, Gerald L., "On the Solution of a Game-theoretic Problem," Paper 17 from *Linear Inequalities and Related Systems*, op. cit.

資料

Frohnden について

宇尾野　久

Werner Conze, Quellen zur Geschichte der deutschen Bauernbefreiung, 1957. で、編纂者 W. Conze は、Albrecht Thaer, Grundsätze der rationellen Landwirtschaft, (1809—1812). § 101. Frohnden. から大要次のような抜萃を掲げている。

「最後に、賦役 (die Frohnden), (Hofedienst, Herrendienst, Robot, Scharwerk) が問題となる。

之等は、まず第一に役畜奉仕 (Gespanndienst) と手の奉仕 (Handdienst) に分かれる。前者は通常もともと役畜を保持するに充分大きな農家敷からしか給付されない。後者は、(役畜を保持するに) 充分でないか、もともと役畜が存在しない小さな農家から給付される。前者は普通農民と云われる、そして更にそれは四頭の馬を以て奉仕する完全農民と二頭又は一頭の馬を以て奉仕する半農民に区別される。

手を以て奉仕する者は、小百姓 (Kossäten) 又は小舎住農 (Kätner) と呼ばれる、しかし手の奉仕は、耕地をもたず、家や庭や放牧地 (Viehweide) しかもたない小舎住農 (Büdner, Häuslern, Gärtnern, Einliegern, Insten 等) と呼ばれるような者達からも給付される。

第二に、測定された奉仕と不測定の奉仕に区別される。

測定された奉仕は、普通日数によって定められている。かくて年間の一定数の賦役日 (Hofetagen) が、給付されねばならない。年間のこの (賦役) 日時の選定は、稀にグーツヘルに依存する、然らざれば各農業季節の各週に定められる。

その際当該 (賦役) 日の一定量の各種労働が規定されるか又は規定されていない場合とがある。最後の場合には、その賦役は権利者達にとって通常きわめて価値が少いか又は廃止された農奴制や臣従制度、さらに廃止された領主裁判制度の場合のように、そこで即座に肉体的強制手段が役立ち得ない場合には、その賦役の価値は無に低下してしまう。

之等の無限定の賦役は義務農民自身にとっても一般の上級農民にとってもそれぞれ外の奉仕種類より不利となる。つまりそれは怠惰、無関心、故意な不完全なやり方や悪意の反抗を誘発し、それに