Title	最適消費の理論についてのノート
Sub Title	A note on "optimum consumption"
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1967
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.60, No.3 (1967. 3) ,p.322(74)- 328(80)
JaLC DOI	10.14991/001.19670301-0074
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19670301-0074

最適消費の理論についてのノート

川　又　邦　雄

一　序

年々の生産物のうち、どれだけを消費し、どれだけを投資に向けるべきかは、ラムゼイ〔7〕以来多くの経済学者によって論じられてきた。その最近の成果は「新古典派定理」や「消費ターンパイクの定理」によって要約的に示されている。(1)

これらの定理は、新古典派的生産関数と一定率で成長する労働供給という仮定を含めて、その基礎となる条件を認めれば論理的にはまったく正しいが、その中にはいくつかの問題とすべき前提が含まれている。「新古典派定理」の場合には、実現可能な径路として均衡成長径路だけを考えていることがとりわけ注意されなければならないし、この困難を克服し、その一般化として提示された「消費ターンパイク定理」では、目的関数が各期の効用の和としてとらえられ、異時点間の消費の間の代替・補完関係が無視されていることが、何よりも問題とされなければならないであろう。

このノートの目的は、異時点間の消費の相互依存関係を認める一般的な厚生関数を想定することによって最適径路の条件を求めその経済的意味を考察し、厚生関数を特定化することによって、いかに「消費ターンパイク定理」が導かれるかを示すことにある。われわれの方法は、伝統的な資本理論との関連において最近の進展を理解し、変分学や「最大値原理」を用いない初等的な手法によって「消費ターンパイク定理」の証明を与えうるという特色をもつものである。

(1)「新古典派定理」とは「均衡成長経路の中で、一人当りの消費量を最大にするものは、成長率が資本の限界生産力（自己利子率）に等しい径路である」ことを主張する定理である。この事実は、たとえばフェルプス〔6〕、ソロー〔9〕などによって証明された。

また「消費ターンパイク定理」とは、「初期および期末の資本ストックを所与として、計画期間（$0 \sim T$期）内の消費$c(t)$がもたらす効用の一定率ρで割引かれた総和$\int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}dt$を最大にするような径路は、計画期間が長期の場合には、大部分「新古典派定理」の最適径路の近くを通る」ことをいうものである。これはサミュエルソン〔8〕、キャス〔1〕、宇沢〔10〕などによって証明が与えられた。

なお以上の点についてヨリくわしくは川又〔4〕ならびにそこに掲げた引用文献を参照されたい。

二　モデルの仮定

社会には、資本、労働の二つの生産要素があり、資本をK、労働をLだけ用いると生産物が、

(1)　$Y=F(K, L)$

だけ生産できるものとする。ここで生産関数$F(K, L)$については、各要素の限界生産力がプラスで逓減すること、ならびに規模に関する収穫不変性があることを仮定するものとする。

生産物Yは、

(2)　$Y(t)=C(t)+I(t)$

を満たすような任意の仕方で、消費Cおよび投資Iに配分されうるとする。ここで、

(3)　$I(t)=K(t+1)-K(t)$

とあらわされることに注意しよう。なおtは時点を示す文字である。

最後に労働の供給は、初期量を$L(0)=L_0$として、毎期一定のnの増加率で、

(4)　$L(t)=L_0(1+n)^t$　　$n>0$

のように外生的に与えられ、初期点0および期末Tにおける資本量は、$K(0)=K_0$、$K(T)=K_T$の水準に定まっているものとする。

以上の資源ならびに技術の制約の下で、目的関数、

(5)　$W=W\left(\frac{C(0)}{L(0)}, \frac{C(1)}{L(1)}, \cdots\cdots, \frac{C(T-1)}{L(T-1)}\right)$

を最大にするような径路を見いだすことが以下の目標である。ここでWは各要素の増加関数、かつ凹であるものとしよう。

つぎに分析を簡単にするために、

(6)
$$\frac{Y}{L}=y \qquad \frac{K}{L}=k \qquad \frac{C}{L}=c \qquad \frac{I}{L}=z$$

のような変数の変換を行い、

(7)　$F\left(\frac{K}{L}, 1\right)=f(k)$

と定義することにしよう。

するとわれわれの問題は、

(8)　$y(t)=f(k(t))$

(9)　$y(t)=(1+n)k(t+1)-k(t)+c(t)$

(10)　$k(0)=k_0=\frac{K_0}{L_0}$,　　$k(T)=k_T=\frac{K_T}{L(T)}$

の制約の下に、

(11) $W=W(c(0), c(1), \cdots\cdots, c(T-1))$

を最大にするということに帰着される。

三　最適条件

この問題を解くために、

$$\Phi=W(c(0),\ c(1), \cdots\cdots,\ c(T-1))$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1} p_t(f(k(t))-(1+n)k(t+1)+k(t)-c(t)) \qquad (12)$$

を考えよう。ここで p_t はラグランジュの未定乗数である。

(12)を未知数 $c(t)$ $(t=0,\ 1, \cdots\cdots, T-1)$, $k(t)$ $(t=1, 2, \cdots\cdots, T-1)$ $p_t(t=0, 1, \cdots\cdots, T-1)$ について偏微分したものをそれぞれ0とおくと、

$$\frac{\partial W}{\partial c(t)}=p_t \qquad (t=0, 1, \cdots\cdots, T-1) \qquad (13)$$

$$p_t\left(\frac{\partial f(k(t))}{\partial k(t)}+1\right)=p_{t-1}(1+n) \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots, T-1) \qquad (14)$$

$$f(k(t))-(1+n)k(t+1)+k(t)=c(t) \qquad (t=0, 1, \cdots\cdots, T-1) \qquad (15)$$

をうる。

方程式の数は 3T−1 箇で未知数の数と一致しているので、(13)〜(15)は適当な条件の下に解くことができる。

これらの式の経済的意味を知るために(13)より p_t を求めそれを(14)に代入すれば、

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial c(t-1)}}{\dfrac{\partial W}{\partial c(t)}}\times(1+n)=1+f'(k(t)) \qquad (17)$$

をうる。ここで $f'(k(t))$ が資本の限界生産力を意味し、

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial c(t-1)}}{\dfrac{\partial W}{\partial c(t)}}\times(1+n)=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial c(t-1)}}{\dfrac{\partial W}{\partial c(t)}}\times\frac{L(t)}{L(t-1)} \qquad (18)$$

$$=\frac{\dfrac{\partial W}{\partial C(t-1)}}{\dfrac{\partial W}{\partial C(t)}}$$

となることを考慮すれば、(17)式は、

(19) 今期の消費と次期の消費の間の時差選好率＝資本の限界生産力（自己利子率）

という異時点間の最適資源配分のための周知の条件を示していることがわかる。

(13)から明らかなように p_t は一般に計画期間内のすべての期の消費量に依存して定まる変数である。ところが「消費ターンパイク定理」の依拠する仮定の下では目的関数(5)は、

$$\widetilde{W}=\sum_{t=0}^{T-1}u_t(c(t)) \qquad (20)$$

のような形をしているので、(2)

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial c(t)}=u'_t(c(t)) \qquad (21)$$

となり、p_t は t 期の消費のみに依存して定まってしまう。この場合(17)の左辺の値は明らかに、他の期の消費水準から独立である。

逆に(17)の左辺が他の期の消費水準から独立に定まるとしよう。すると W は一般に $\widetilde{W}$ の単調増加関数として表現可能であり、(3) したがって(20)を最大にすることは(11)を最大にすることに帰着する。

（2）　通常は ρ は一定の割引率として、さらに

$$u_t(c(t))=u(c(t))e^{-\rho t}$$

のように特殊化し、時間を連続的に扱って、目的関数

$$\overline{W}=\int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}\,dt$$

を最大にすることが考えられている。

（3）　厳密な証明はゴルドマン＝宇沢〔2〕定理1を参照されたい。

つぎにわれわれは目的関数(20)をさらに、

$$\overline{W}=\sum_{t=0}^{T-1}\frac{u(c(t))}{(1+\rho)^t} \qquad (22)$$

のように特殊化すると、条件(13)は、時間を連続的に扱う場合「消費ターンパイク定理」を証明するための基礎になるオイラー条件に対応するものとなることを示そう。

いまの場合、(13)より

$$p_t=\frac{u'(c(t))}{(1+\rho)^t} \qquad (23)$$

であるから、

$$q(t)=u'(c(t))=(1+\rho)^t p_t \qquad (24)$$

と定義すると、$q(t)$ は t 期の消費のみに依存する変数となる。

また(14)は、

$$\frac{q(t-1)}{q(t)}(1+n)(1+\rho)=1+f'(k(t)) \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots, T-1) \qquad (25)$$

あるいはさらに変形して、

$$q(t)-q(t-1)=-\frac{1}{(1+n)(1+\rho)}(f'(k(t))-(n+\rho+n\rho))q(t) \qquad (t=1, 2, \cdots\cdots, T-1) \qquad (26)$$

とあらわされる。

ここで比較のために時間を連続的にとり扱って、

(8) $y(t)=f(k(t))$

(9)′ $y(t)=\dot{k}(t)+nk(t)+c(t)$

(10) $k(0)=k_0,\ k(T)=k_T$

の制約の下に、

$$\overline{W}=\int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}\,dt \qquad (22)'$$

を最大にする問題を考えよう。

(24)′ $q(t)=u'(c(t))$

とおけば、その場合のオイラー条件は

$$\dot{q}(t)=-(f'(k(t))-(n+\rho))q(t) \qquad (27)$$

となる。(4) 期間の幅を十分に小さくとるとき、(27)と(26)とが同値な条件となることは、(26)を、

$$q(t)-q(t-1)=-\left(f'(k(t))+(n+\rho+n\rho)\frac{q(t-1)}{q(t)}\right)q(t) \qquad (28)$$

と書き換えて、

(29) $n\rho \to 0,\ \dfrac{q(t-1)}{q(t)} \to 1$

と考えるならば納得的であろう。

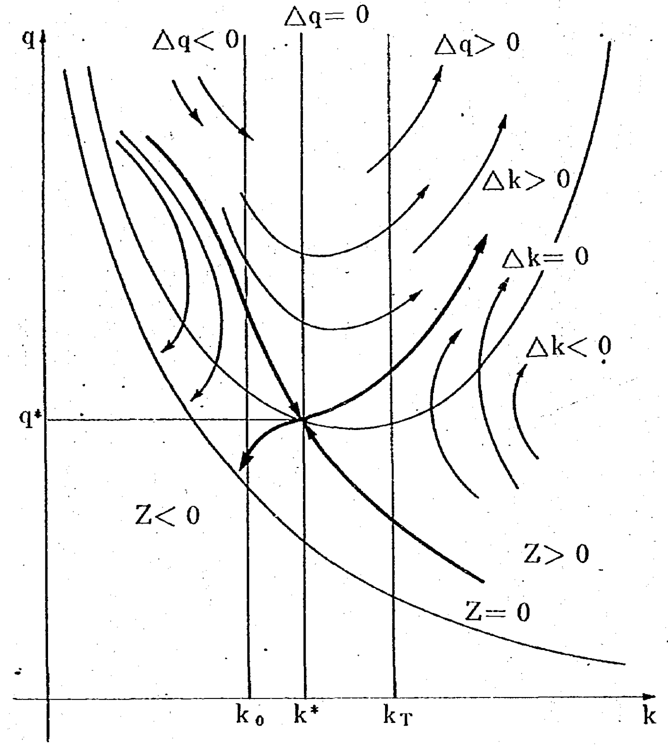
いっぽう(15)、(24)より、

(30) $q(t)=u'(f(k(t))-(1+n)k(t+1)+k(t))\quad (t=0,1,\cdots\cdots,T-1)$

がえられるが、ここで、

(31) $\Delta q(t-1)=q(t)-q(t-1)$
$\Delta k(t-1)=k(t)-k(t-1)$

第１図



とおくことにすれば、(30)、(26)はそれぞれ、

(32) $q(t)=u'(f(k(t))-nk(t)+(1+n)\Delta k(t))\quad (t=0,1,\cdots\cdots,T-1)$

(33) $\Delta q(t-1)=-\dfrac{1}{(1+n)(1+\rho)}(f'(k(t))-(n+\rho+n\rho))$

$(t=1,2,\cdots\cdots,T-1)$

とあらわされる。

これに $q(t)$ の定義式、

(24)′ $q(t)=u'(c(t))$

を加えれば、最適径路の動きは完全に記述されたことになる。

（4） (8)、(9)′より $c(t)$ を $k(t)$、$\dot{k}(t)$ の関数であらわし、オイラー方程式を求めればよい。

四 「消費ターンパイク定理」

「消費ターンパイク定理」は、(32)、(33)式に注目することによって、時間を連続的に扱った場合と本質的に同一の方法によって証明することができる。以下にそのスケッチを与えておく。(5)

（i） (32)で $\Delta k(t)=0$ とおくと、$(k,\ q)$ 平面に、

(34) $(q)_{\Delta k=0}=u'(f(k)-nk)$

で示される曲線を描くことができる。この曲線の上側では $\Delta k(t)>0$、下側では $\Delta k(t)<0$ となる。（1図を見よ。）

（ii） (33)で $\Delta q(t-1)=0$ とおくと、

(35) $(f'(k))_{\Delta q=0}=n+\rho+n\rho$

がえられる。これは1図ではたて軸に平行な直線となり、その右側では $\Delta q(t-1)>0$、左側では $\Delta q(t-1)<0$ となることがわかる。

（iii） 以上を総合して、$k(t)$ と $q(t)$ の径路を1図に記入する。(35)を満たす k を k^*、それを(34)に代入した場合の q を q^* とすると、平衡点 $(k^*,\ q^*)$ は鞍形結節点となる。

（iv） k_0、k_T ならびに T の所与の値に対して、1図でそれに対応する径路が一本定まる。ここで計画期間が長期のものほど、平衡点 (k^*, q^*) の近くを通ることがいえる。

（v） $(k^*,\ q^*)$ の ε 近傍を定義すると、実際に最適径路がその外にある期間は ε および初期ならびに最終資本ストック量によって T から独立におさえられる。

（5） くわしくはキャス〔1〕、川又〔3〕を参照されたい。

以上われわれは一般的な目的関数を想定することによって、最適条件(17)を求め、それが完全予見の下における主体の合理的行動の結果を記述する周知の条件と同一のものであることをみた。そして「消費ターンパイク定理」の証明の基礎となる方程式は、目的関数を(22)のように特殊化することによって、条件(17)から導かれること、したがってそれ以上の何物もつけ加えるものでないことを示した。

このようにみると、分離可能な効用関数の仮定がいかに「消費ターンパイク定理」の証明にとって重要であるかは明らかであろう。(6) この仮定をゆるめた場合に「定理」がどこまで主張されるかは興味ある問題ではある。しかし通常の消費者行動の分析の基礎となる効用関数を想定した場合には、「定理」の成立は、極めて疑わしいといわなければならないであろう。

なおわれわれの分析では、投資および消費の非負性について特別に考慮しなかったが、これを厳密に処理するためには、先の最適条件をクーン・タッカー〔5〕の条件でおきかえればよい。この手続きは変分法の代りに「最大値原理」を適用することに対応するものである。

（6） なおヒックス〔3〕参照。

引用文献

〔1〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Cowles Foundation Discussion Paper* No. 178, 1964.
〔2〕 Goldman, S.M. and H. Uzawa, "A Note on Separability in Demand Analysis," *Econometrica*, July 1964.
〔3〕 Hicks, J., *Capital and Growth*, 1965, Chapter XIX.
〔4〕 川又邦雄，最適成長の理論『経済学年報9』一九六五年度。
〔5〕 Kuhn, H. and A. W. Tucker, "Nonlinear Programming" *Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1951.
〔6〕 Phelps, E.S., "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen," *American Economic Review*, January 1966.
〔7〕 Ramsey, F.P., "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, December 1928.
〔8〕 Samuelson P. A., "A Catenary Turnpike Theorem Involving

Consumption and Golden Rule," *American Economic Review*, June 1965.
〔9〕 Solow, R.M., "Comment," *Review of Economic Studies*, June 1962.
〔10〕 Uzawa, H., "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, January 1964.

次号目次

論説

資料・研究ノート

書評

新刊紹介

書評

大河内一男先生還暦記念論文集第二集
『労働経済と労働運動』

飯田鼎

一

本書は、東大総長大河内一男教授の還暦を記念して編纂した論文集の第二集であり、主として労働運動と労働経済にかんする数多くの論文がおさめられている。内容は三部から成っており、第一部は、賃金および労働時間にかんする論文から成っており、第二部は労働組合運動を中心とし、三部は、ひろく日本の労働問題ともいうべき問題をあつかっている。すなわち、

I

賃金構造の国際比較　藤本武
企業間賃金構造　桜林誠
日本の賃金水準と都市自営業　小池和男
労働時間短縮問題の経済的背景　山本潔
複雑労働還元問題　下山房雄

II

アメリカ職能別組合の一考察——ジョンス・ホプキンズ学派の産業民主制論を中心として——　神代和欣
産業国有化政策と労働運動——イギリス労働運動史の一研究——　栗田健
「アナ・ボル論争」考　白井泰四郎
陸軍の労組否認と団結権擁護運動　内藤則邦
労務管理と労働組合——団体交渉の「インパクト」に関連して——　高橋洸
組合分裂の組織的・法的処理について　藤田若雄
大学の自治——京大・滝川事件　塩田庄兵衛

III

経営の発達と労働　柳川昇
経済成長と農業人口　山崎春成
現代日本の企業集中と労働問題　儀我壮一郎
日本の住宅問題　関谷嵐子
工業立地の新傾向——アメリカの高速道路時代の研究——　高野源八郎

この豊富な内容を成す諸論稿について、ひとつひとつ紹介批判することは、まず第一に筆者の能力の制約があり、またその余裕もないのであるが、さまざまの興味ある問題が提出されているので筆者は三部から成る本書の各部から一篇ずつをとりあげ、簡単な紹介および批評を行いたいと思う。